

BORSA İSTANBUL'DA LOG-OPTIMAL PORTFÖY UYGULAMASI

Erhan Ustaoglu¹

Marmara Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme Enformatiği Bölümü

Erdoğan Altay

İstanbul Üniversitesi, İktisat Fakültesi, İşletme Bölümü

Öz

Modern Portföy Teorisine dayanan ortalama-varyans yöntemi günümüzde de en yaygın olarak kullanılan portföy optimizasyon yöntemidir. Bu yöntem bütün yatırımcılar için tek dönemli ve sabit bir yatırım ufku varsaymasına rağmen yatırımcılar ve akademisyenler tarafından her vadede portföy optimizasyonu için kullanılmaktadır. Optimizasyon dönemleri uzadıkça ortalama-varyans yöntemi doğru sonuçlar vermekten uzaklaşmaktadır. Bu durumda uzun dönemli portföy optimizasyonları için fiyat hareketlerinin stokastik doğasını da yansıtan Geometrik Brown Hareketini baz alan portföy teorisi bir alternatif olarak ortaya çıkmaktadır. Bu teoriye dayanan ve son servetin maksimizasyonu ile optimize edilen log-optimal portföylerin uzun dönemli analizlerde daha doğru sonuçlar vereceği düşünülmektedir. Bu çalışmada ortalama-varyans portföyler ile log-optimal portföylerin performansları Borsa İstanbul verileri kullanılarak değişik dönemlerde karşılaştırılmalı olarak incelenmiştir. Analiz dönemleri uzadıkça log-optimal portföylerin ortalama-varyans portföylere oranla daha doğru sonuçlar vereceğine dair teorik yaklaşımı destekler nitelikte sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Geometrik Brown Hareketi, Portföy Optimizasyonu, Log-optimal Portföy, Log-optimal Etkin Sınır, Ortalama-varyans Analizi.

Abstract

The mean-variance method based on Modern Portfolio Theory is currently the most widely used method of portfolio optimization. Although it assumes only one fixed period investment horizon for all investors it is used for portfolio optimization across all periods by academics and investors. As the optimization periods get longer results of mean-variance method become less accurate. In such cases a portfolio theory based Geometric Brownian Motion, which reflects the stochastic nature of price movements, emerges as an alternative for the long-term portfolio optimizations. Log-optimal portfolios based on this theory and optimized by maximizing final wealth are considered to give more accurate results for long-term analyses. In this study, mean-variance and log-optimal portfolio performances are compared with Istanbul Stock Exchange data for different investment periods. As the analysis periods get longer log-optimal portfolios are observed to outperform the mean-variance portfolios in support of the theoretical considerations.

Keywords: Geometric Brownian Motion, Portfolio Optimization, Log-Optimal Portfolio, Log-optimal Efficient Frontier, Mean-Variance Analysis

¹ Sorumlu Yazar, Marmara Üniversitesi, İşletme Fakültesi, İşletme Enformatiği Bölümü, erhan.ustaoglu@gmail.com

GİRİŞ

Bir yatırımcı finansal piyasalarda yatırım yaparken, ne miktarda yatırım yapacağına, hangi varlıklara yatırım yapacağına ve her varlığa ne kadar yatırım yapacağına karar vermelidir. Bu üç karar sonrasında ortaya çıkan yatırım bütünü her yatırımcı için optimize edilmesi gereken portföyü oluşturur. Böyle bir portföy basit bir hisse senetleri ya da bonolar listesi değildir. Bu portföy yatırımcıya çok çeşitli risklere karşı koruma ve fırsatlar sağlayan dengeli bir bütün olmalıdır. Yatırımcı bu portföyü kendi ihtiyaçlarına en uygun biçimde şekillendirmelidir. Bu şekilde ifade edilen yatırım problemini sistematik olarak çözmeye odaklanan ilk çalışma günümüzde Modern Portföy Teorisi olarak da adlandırılan ortalama-varyans modeli olmuştur (Markowitz, 1952).

Modern Portföy Teorisi, portföyü oluşturan varlıkların beklenen getiri oranları ve standart sapmaları olmak üzere iki temel parametreye dayanmaktadır. Fakat tek dönemli bir yaklaşıma dayanan bu teori kısa ve uzun dönem getirileri arasında oluşabilecek farkları göz ardı etmektedir. Örneğin kısa dönemde çok yüksek beklenen getirisi olan bir portföyün uzun dönem getirisi negatif olabilmektedir. Bu nedenle kısa ve uzun dönem getirileri arasındaki farkları elimine edebilecek ve uzun dönemde daha iyi sonuçlar verebilecek portföy teorilerine gerek duyulmuştur. Fiyat hareketlerinin stokastik doğasını da yansıtan ve getiri oranlarından çok büyüme oranlarının uzun dönemde portföy davranışlarını belirleyeceğini varsayan yaklaşımlar ortaya çıkmıştır.

Hisse senedi piyasalarındaki fiyat hareketlerini stokastik süreçler olarak tanımlayan ve piyasa analizlerini bu temele dayandıran teoriler, yapısını piyasa ve yatırımcı davranışlarına yönelik varsayımlar altında açıklamaya çalışan Modern Portföy Teorisi'nden oldukça farklıdır. Log-optimal portföy yöntemi de bu yaklaşımlardan birisidir ve varlık fiyatlarını Geometrik Brown hareketi biçiminde tanımlamaktadır.

Bu çalışmada Borsa İstanbul (BİST) verileri kullanılarak stokastik süreçlere dayanan modellerden birisi olan log-optimal portföy modeli ile Modern Portföy Teorisi'nin uygulama yöntemi olan ortalama-varyans optimizasyonu karşılaştırılacak ve stokastik yöntemin teoride ifade edildiği biçimde uzun dönem performans açısından tek dönemli yöntemlere göre bir üstünlük sağlayıp sağlamadığı irdelenecektir.

Fiyatları Geometrik Brown hareketi biçiminde verilen n sayıda varlıktan oluşan bir portföy içinde her bir varlığın fiyatı aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$\frac{dp_i}{p_i} = \mu_i dt + dz_i \quad 1$$

p_i = i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

z_i = i varlığının değerindeki rassal değişimi betimleyen Wiener Süreci.

Bir portföy söz konusu olduğunda varlıkların Wiener Süreci üzerinden ilişkili olmaları gerekmektedir. Başka bir deyişle varlık fiyatını etkileyen rassal değişkenler birbirleri ile ilişkilendirilmelidir. Bu da varlık fiyatlarındaki rassal değişimi gösteren Wiener Süreçleri'nin kovaryansları ile mümkündür;

$$\text{cov}(dz_i, dz_j) = E(dz_i dz_j) = \sigma_{ij} dt \quad 2$$

z_i = i varlığının değerindeki rassal değişimi betimleyen Wiener Süreci,

z_j = j varlığının değerindeki rassal değişimi betimleyen Wiener Süreci,

σ_{ij} = i ve j varlıklarının t zamanındaki anlık kovaryansı.

Bu denklemden görüldüğü biçimde iki varlığın kovaryanslarındaki anlık değişim Geometrik Brown Hareketi'ne dayanan fiyat modelindeki kovaryansı göstermektedir. Geometrik Brown Hareketi'ne dayalı varlık fiyatlarının log-normal dağılması nedeniyle herhangi bir t zamanında bu n varlıktan her birinin Ito dönüşümü yardımı ile aşağıdaki beklenen getiri ve varyansa sahip oldukları gösterilebilir (Luenberger, 1998);

$$E \left[\ln \left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right) \right] = \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t = \nu_i t \quad 3$$

$$\text{var} \left[\ln \left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right) \right] = \sigma^2 t. \quad 4$$

p_i = i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

σ_i^2 = i varlığının t zamanındaki anlık varyansı,

ν_i = i varlığının t zamanındaki anlık büyüme oranı.

LOG-OPTİMAL PORTFÖY

Geometrik Brown Hareketi'ni temel alan varlık fiyat davranışlarının log-normal özelliği nedeniyle bu strateji ile oluşturulan optimum portföyler de belli zaman dilimi içerisinde en yüksek bileşik getiri

oranına sahip olmaktadırlar. Portföy büyüme oranı belli bir zaman aralığı içerisinde maksimize olacak biçimde ağırlıklandırılmış portföyler diğer bütün çeşitlendirmelere üstünlük sağlamaktadırlar (Long, 1990).

Bir portföyün anlık getirisi portföyü oluşturan varlıkların getirilerinin ağırlıklı toplamı olacağı için denklem 1'deki varlık fiyatı da kullanılarak portföy değeri aşağıdaki biçimde gösterilmektedir;

$$\frac{dV}{V} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{dp_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i dt + w_i dz_i \quad 5$$

V = Portföyün t zamanındaki anlık değeri,

p_i = i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

$w_i = \sum_{i=1}^n w_i = 1$ olacak şekilde varlıkların portföy içindeki ağırlıkları,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

z_i = Wiener Süreci.

Bu denklemdeki stokastik terimin varyansı da denklem 2'deki kovaryans tanımı ile aşağıdaki biçimde olmaktadır;

$$E \left(\sum_{i=1}^n w_i dz_i \right)^2 = E \left(\sum_{i=1}^n w_i dz_i \right) \left(\sum_{j=1}^n w_j dz_j \right) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j dt. \quad 6$$

Portföyün anlık beklenen değeri de tek bir varlık için denklem 3'te verilen eşitliğe benzer biçimde log-normal olarak oluşmaktadır;

$$E \left[\ln \left(\frac{V(t)}{V(0)} \right) \right] = vt = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i t - \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_i \sigma_{ij} w_j t. \quad 7$$

Portföyün anlık varyansı ise yine denklem 4'te verilen eşitliğe benzer biçimde aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\sigma^2 t = \sum_{i,j} w_i \sigma_{ij} w_j t. \quad 8$$

Denklem 7 aynı zamanda portföyün anlık büyüme oranını verir ve bu oran ağırlık katsayıları w_1, w_2, \dots, w_n seçimleri ile kontrol edilebilir;

$$v = \frac{1}{t} E \left[\ln \left(\frac{V(t)}{V(0)} \right) \right]. \quad 9$$

Geleneksel portföy teorisi beklenen getiri ve varyans parametreleri üzerinde yoğunlaşmaktadır. Fakat portföylerin uzun dönemli davranışlarını getiri oranından çok büyüme oranı belirlemektedir. Bu nedenle uzun dönemli yatırımlar için getiri oranları yerine büyüme oranlarını göz önüne almak gerekmektedir. Büyüme oranı v maksimize edilerek optimum log-normal portföy ağırlıkları bulunabilir. Bunun için denklem 7’de gösterilen büyüme oranı maksimize edilerek optimum portföy ağırlıkları belirlenmektedir (Fernholz, 2002);

$$Max \sum_{i=1}^n w_i \mu_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j . \quad 10$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 . \quad 11$$

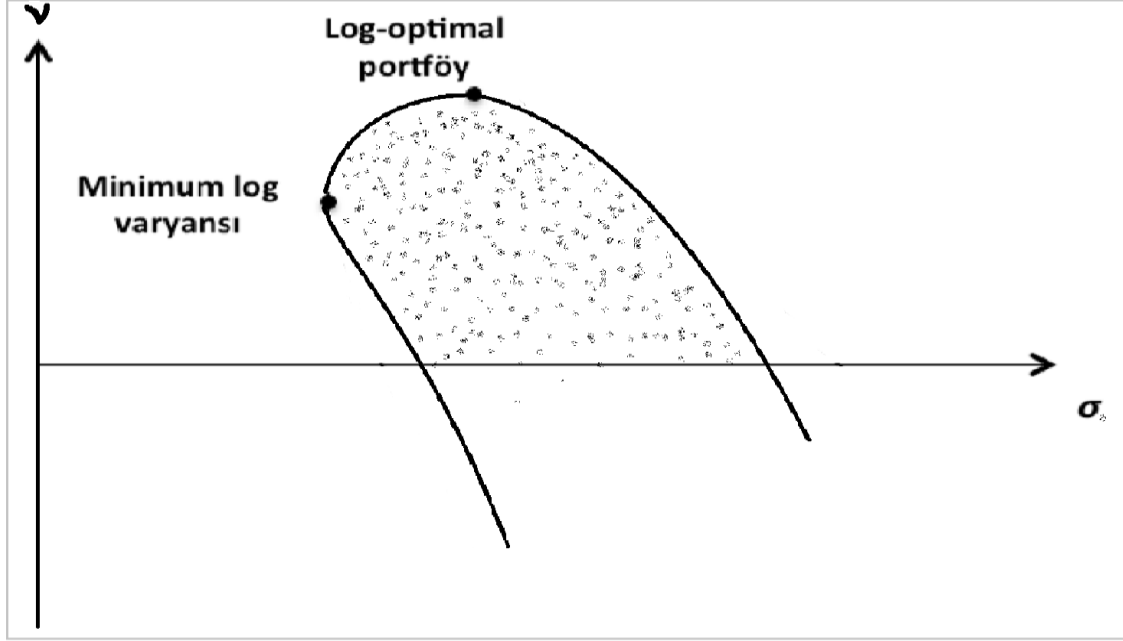
Anlık büyüme oranı zamana bağlıdır fakat yukarıda verilen maksimizasyon işlemi için zaman bağımlılığı bir engel oluşturmamaktadır. Matematiksel olarak denklemin bir zaman değeri, t , ile çarpılıp çarpılmamasının optimum ağırlıkların belirlenmesine bir etkisi bulunmamaktadır. Denklem 10’a bakıldığında maksimize edilen değerin beklenen getiri oranlarından varlıkların varyans ve kovaryanslarının yarısının çıkarılmasından oluştuğu görülmektedir. Bu eksiltelen terim zamanın büyüme oranı üzerindeki etkisi olarak değerlendirilmektedir ve piyasa verileri ile desteklenmektedir (Fama, 1992).

LOG-NORMAL ETKİN SINIR

Log-normal portföyler de Modern Portföy Teorisi’ne benzer biçimde v ve σ değerlerinden oluşan iki boyutlu bir diagramda gösterilebilmektedirler. Bütün mümkün olan portföyler tarafından taranan alan Modern Portföy Teorisi’nde bulunan yatırım olanakları kümesine denk gelmektedir. Fakat log-normal yatırım olanakları kümesi ile Modern Portföy Teorisi yatırım olanakları kümesi arasında önemli bir fark vardır. Bu bölge v maksimum değeri ile, başka bir deyişle log-normal portföyün büyüme oranıyla sınırlandırıldığı için üste doğru sınırsız bir biçimde uzanmamaktadır. Buna rağmen Modern Portföy Teorisi’ne benzer biçimde minimum bir standart sapma, σ , değeri bulunmaktadır.

Modern Portföy Teorisi’ne benzer biçimde etkin sınır yatırım olanakları kümesinin üst sol bölümü olarak tanımlanmaktadır. Aslında etkin sınır tam bir kesinlikle eğrinin minimum varyans noktası ile log-optimal noktası arasında kalan bölümden oluşmaktadır. Etkin sınır üzerindeki herhangi bir noktaya yine etkin sınır üzerindeki iki noktanın kombinasyonu olarak ulaşılabilir. Özellikle bu iki nokta olarak minimum varyans ve log-normal noktaları kullanılmaktadır. Log-normal yatırım olanakları kümesi ve etkin sınırı Şekil 1’de gösterilmektedir (Luenberger, 1998).

Şekil 1 : Log-normal Yatırım Olanakları Kümesi



LOG-OPTİMAL VE ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY OPTİMİZASYONLARI

Log-optimal yöntem, ardışık biçimde belirsiz ve rastgele seçimlerle karşı karşıya olan ve son servetini maksimize etmeye çalışan yatırımcıların optimum stratejisinin en yüksek büyüme oranına ulaşmak olduğunu varsaymaktadır. Bu nedenle optimum hisse oranlarının belirlenmesi için uzun dönemde büyüme oranının maksimizasyonu amaçlanmaktadır. Modern Portföy Teorisi çerçevesinde oluşturulan ortalama-varyans portföylerin ise optimal olmaktan uzaklaşacakları varsayılmaktadır. Uzun dönemli uygulamalarda bu özelliğin daha belirgin olacağı düşünülmektedir (Krause, 2001).

Ortalama-varyans portföylerin optimizasyonu için Sharpe oranı maksimizasyonu kullanılmaktadır. Daha yüksek bir Sharpe oranı birim risk başına daha yüksek getiri anlamına gelmektedir. Bu nedenle ortalama-varyans etkin sınır üzerindeki portföyler içinde en yüksek Sharpe oranına sahip olan portföy, optimum portföy olarak değerlendirilmektedir. Bir portföyün Sharpe oranı portföyün beklenen getirisinin portföy standart sapmasına bölümü olarak ifade edilmektedir (Sharpe 1966);

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \quad 12$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad 13$$

$$SR_p = \frac{\mu_p}{\sigma_p} . \quad 14$$

x_i = portföyün i varlığına yatırılan bölümü,
 μ_i = i varlığının beklenen getirisi,
 σ_{ij} = i ve j varlıkları arasındaki kovaryans,
 μ_p = portföyün beklenen getirisi,
 σ_p^2 = portföyün varyansı,
 SR_p = portföyün Sharpe oranı.

Sharpe oranı tanımı risksiz varlık terimini de içermektedir fakat maksimizasyon durumunda sabit bir terimin etkisi olmayacağı için bu terimin denkleme yer alması sonucu değıştirmemektedir. Bu durumda Sharpe oranının maksimize edilmesi aşğıdaki biçimde ifade edilmektedir;

$$\max_{x_1, x_1, \dots, x_n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}}} . \quad 15$$

Sharpe oranı portföy içerisindeki varlık oranlarının optimum dağılımları bulunarak maksimize edilmektedir. Bu maksimizasyon, varlık oranları toplamını $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ve bütün i değerleri için $x_i \geq 0$ büyük olacak biçimde tanımlanmaktadır. Koşul $x_i \geq 0$ açğı satış olmaması anlamına gelmektedir.

Log-optimal portföy optimizasyonu da denklem 7'de verilen

$$vt = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i t - \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_i \sigma_{ij} w_j t \quad 16$$

eşitliğinin maksimize edilmesi ile sağlanacaktır. Ortalama-varyans portföy optimizasyonuna benzer gösterimler kullanılarak, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ve bütün i değerleri için $x_i \geq 0$ büyük olacak biçimde maksimizasyon problemi şu biçimde oluşmaktadır;

$$\max_{x_1, x_1, \dots, x_n} \sum_{i=1}^n x_i \mu_i - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}}{2 (\sum_{i=1}^n x_i \mu_i)^2} \quad 17$$

Denklem 17 Modern Portföy Teorisi ile uzun dönemli sürekli zamanlı teoriler arasındaki bir farkı da ortaya çıkarmaktadır. Modern Portföy Teorisi oynaklık istenmeyen bir durumdur ve risk ile eşdeğerdir.

Geometrik Brown Hareketine dayanan portföy teorisinde ise oynaklık, portföy büyümesini düşürmesi nedeniyle olumsuz bir etki yapmaktadır.

LOG-OPTİMAL VE ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY PERFORMANSLARI KARŞILAŞTIRMALI UYGULAMASI

Bu bölümde Stokastik Portföy Teorisine dayanan log-normal portföyler ile Modern Portföy Teorisine dayanan Markowitz portföylerinin Borsa İstanbul verileri ile performans açısından karşılaştırması yer almaktadır. Karşılaştırmanın amacı Stokastik Portföy Teorisine dayanan yöntemlerin uzun dönemde Modern Portföy Teorisine dayanan yöntemlere göre üstün olup olmadığını ortaya koymaktır. Karşılaştırmada üçüncü bölüm denklem 14 (MPT) ve denklem 17 (log-optimal) kullanılarak gerçekleştirilen portföy optimizasyonları kullanılmaktadır.

Kullanılan veriler 2000 ile 2015 yılları arasında BIST100 endeksinde yer alan ve sürekli işlem gören 59 hisse senedine aittir. Bu hisselerin Ocak 2000 tarihinden Nisan 2015 tarihine kadar olan aylık getirileri hesaplanmış ve analizde kullanılmıştır. İki yöntemle oluşturulan portföylerin özellikleri ve performansları farklı oluşturma ve performans ölçüm dilimleri içeren üç kategoride analiz edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Analizde kullanılan hisse senetlerinin listesi ve karşılaştırılan portföyler içerisindeki ağırlıkları EK-1'de verilmektedir (Ustaoglu, 2015).

Uygulamanın amacı log-optimal portföylerin uzun dönemdeki performanslarını ölçmek ve ortalama-varyans portföyler ile karşılaştırmak olduğu için portföy oluşturma ve performans ölçme süreleri veri setinin el verdiği ölçüde uzun tutulmuştur.

İlk kategoride üçer yıllık portföy oluşturma dönemlerinde iki yöntemle optimize edilerek elde edilen portföylerin, takip eden bir, iki ve üç yıllık gerçek getiriler ile performansları ölçülerek karşılaştırılmıştır. İlk olarak 2000-2002 yılları getiri ve standart sapmaları kullanılarak oluşturulan portföyler 2003, 2003-2004, 2003-2005 dönem gerçek getirileri ile performans ölçümüne tabii tutulmuş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu şekilde 2000-2015 yılları arasında dört ayrı dönemde iki yöntem kullanılarak oluşturulan portföylerin performansları, gerçek getiriler kullanılarak on iki ayrı zaman diliminde karşılaştırılmıştır.

İkinci kategoride portföy oluşturma süreleri beş yıla çıkarılmış ve oluşturulan portföyler, takip eden bir, iki, üç, dört ve beş yıllık sürelerde gerçek getiriler ile performans ölçümü yapılarak karşılaştırılmıştır. Bu kategoride iki ayrı dönemde portföyler oluşturulmuş ve on ayrı zaman diliminde performans ölçümü yapılmıştır.

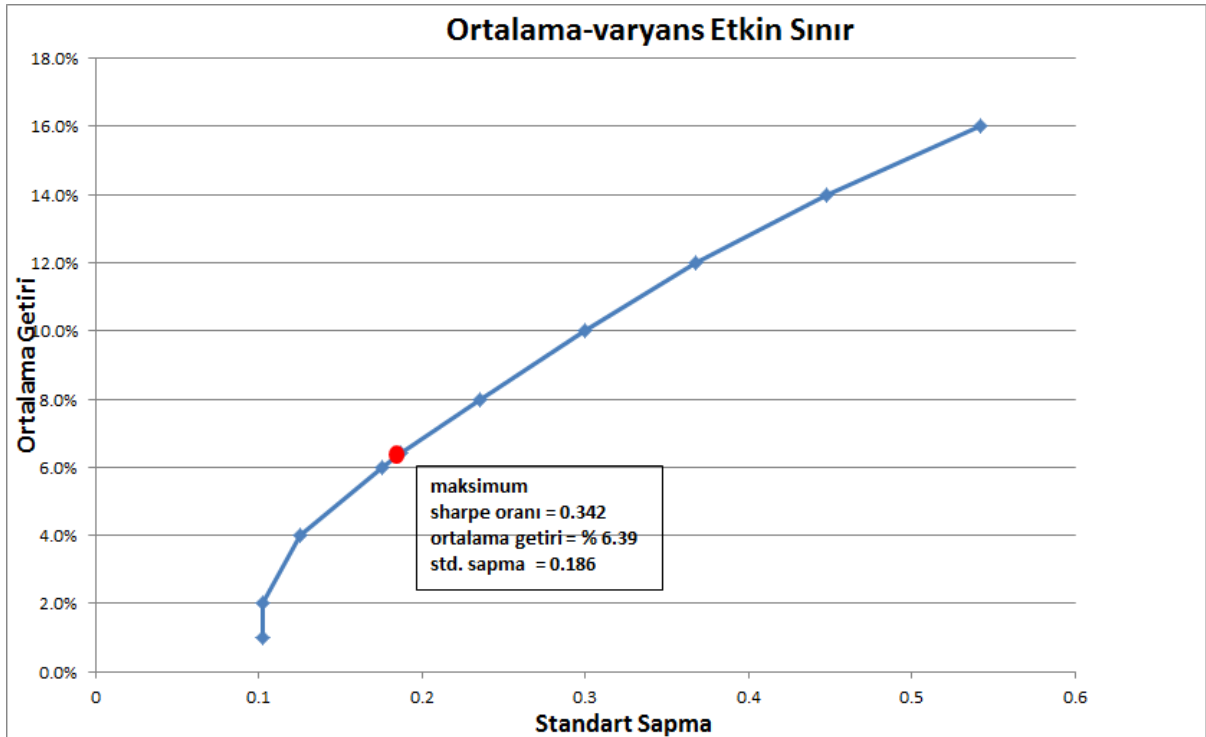
Üçüncü kategoride ise veri dönemi elverdiğince (2000-2015) hem portföy oluşturma hem de performans ölçüm süreleri uzun tutularak portföyler oluşturulmuştur. Bu kategoride dokuzar yıllık

veriler ile iki ayrı dönemde oluşturulan portföylerin performansları veri seti sonuna kadar on ayrı dönem için ölçülmüş ve karşılaştırılmıştır. Her üç kategori uygulamaları ve bulguları aşağıdaki kısımlarda açıklanmaktadır.

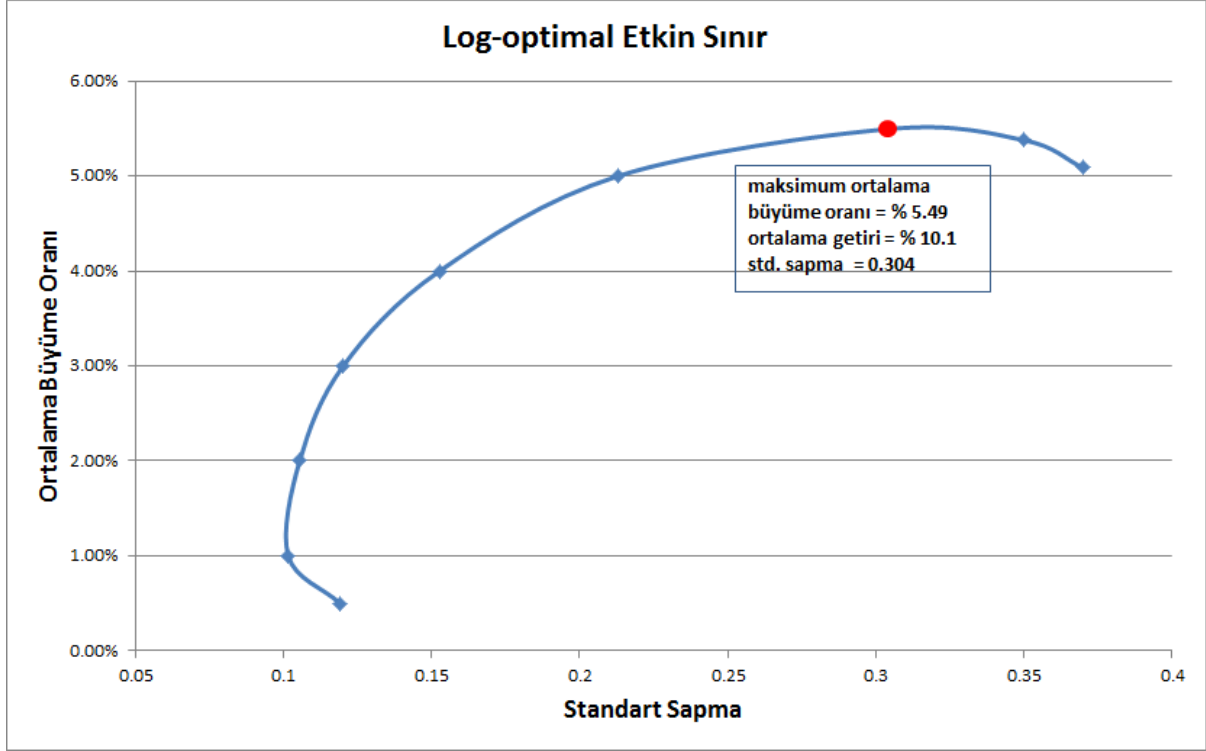
İlk Kategori Bulgular

İlk olarak Ocak 2000 ile Aralık 2002 tarihleri arasındaki aylık getiriler kullanılarak ortalama-varyans ve log-optimal etkin sınırlar üzerinde bulunan portföyler, çeşitli getiri-risk ve büyüme-risk değerleri için belirlenmiştir. Bu portföyler belirlenirken önceki kısımlarda anlatılan Sharpe oranı (ortalama-varyans) ve büyüme (log-optimal) maksimizasyonu ile optimum hisse ağırlıkları saptanmıştır. Ortalama-varyans ve log-optimal etkin sınırlar Şekil 2 ve 3'te verilmektedir. Şekillerde maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme sağlayan (log-optimal) portföyler ayrıca belirtilmişlerdir. Log-optimal sınır şekillerinde görüldüğü üzere log-optimal noktadan sonra büyüme, risk artışı ile keskin bir biçimde düşmektedir. Bu log-optimal portföylerin, log-optimal etkin sınır üzerinde riskin en yüksek olduğu noktalara yakın biçimde oluştuğunu göstermektedir. Bu yüksek riske karşın büyüme değeri ve getiri oranları da ortalama-varyans portföylere oranla daha yüksek değerlere ulaşmaktadır. Bu ve izleyen tablolarda ortalama-varyans portföyler O, log-optimal portföyler ise L ile gösterilmektedir.

Şekil 2 : 2000-2002 Portföyleri Ortalama-varyans Etkin Sınırı



Şekil 3 : 2000-2002 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Yukarıdaki etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 1'de özetlenmektedir.

Tablo 1 : 2000-2002 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	6	10.14%	5.49%	0.332	0.304
M	5	6.39%	4.65%	0.342	0.186

Tablo 1'den log-optimal portföyün daha yüksek bir ortalama getiri ve büyüme oranına fakat aynı zamanda daha yüksek risk değerine sahip olduğu görülmektedir. Bu iki portföyün 2003, 2003-2004, 2003-2005 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümü Tablo 2'de verilmektedir.

Tablo 2 : 2000-2002 Portföy Performansları

	2003	2003-2004	2003-2005
L	28.47%	234.97%	298.66%
M	56.13%	227.41%	315.69%

Tablo 2’de log-optimal ve ortalama-varyans portföylerin iki ve üç yıllık performanslarının yaklaşık olduğu fakat ortalama-varyans portföyünün ilk yıl performansının log-optimal portföye oranla daha iyi olduğu görölmektedir.

2003-2005, 2006-2008, 2009-2011 verileri ile oluşturulan ve izleyen bir, iki ve üç yıl için gerçekleşen getiriler ile yapılan performans ölçümlerinde de benzer grafikler ve sonuçlar elde edilmiştir. İlk kategori portföy oluşumları sonunda, log-optimal portföylerin her zaman diliminde daha yüksek beklenen aritmetik getiri ve büyüme oranı sağladığı görölmektedir. Teorik olarak daha yüksek beklenen portföy büyümesi daha yüksek beklenen son servet anlamına gelmektedir. Ayrıca log-optimal portföylerin daha az sayıda hisse senedi içerdiği saptanmıştır. Buradan log-optimal portföylerin ortalama-varyans portföylere oranla daha az çeşitlendirilmiş olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca daha az çeşitlendirilmiş log-optimal portföyler daha yüksek standart sapma ve dolayısı ile daha yüksek oynaklık değerlerine sahiptirler.

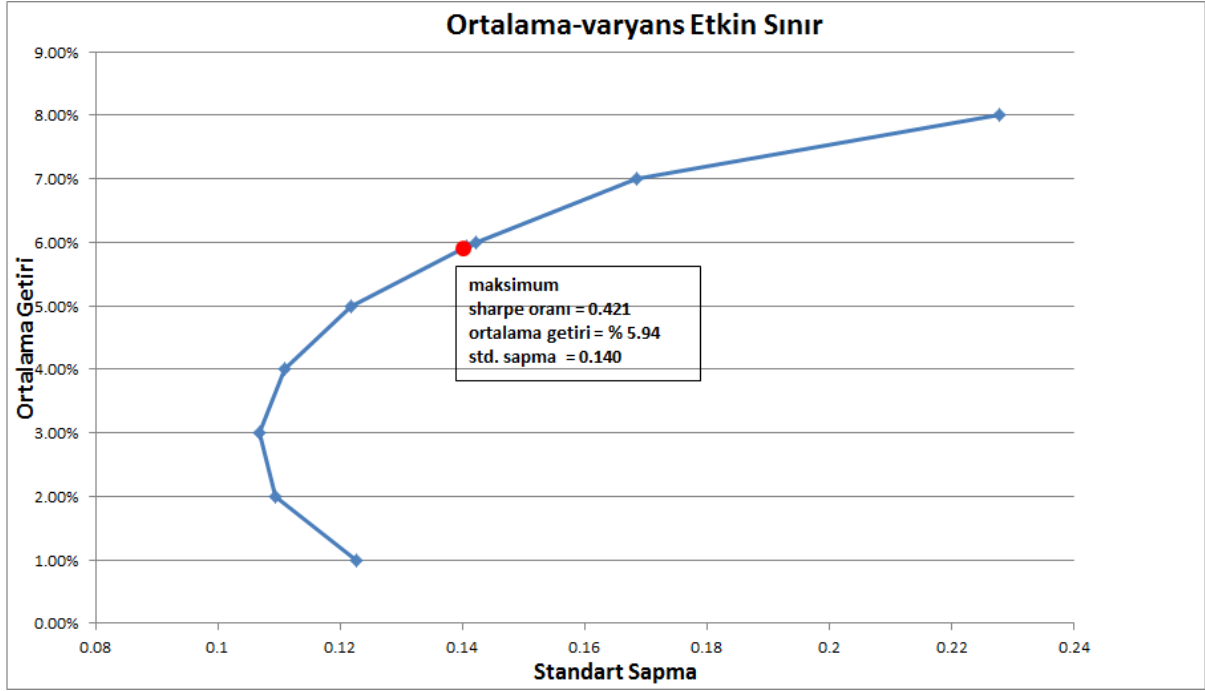
Log-optimal portföyler bütün zaman dilimlerinde beklenen aritmetik getiri ve beklenen büyüme oranı açısından üstün oldukları halde gerçek verilerle yapılan performans ölçümlerinde ortalama-varyans portföylere her dönemde üstünlük sağlayamamışlardır. Buna rağmen on iki performans ölçümünün dokuzunda log-optimal portföylerin daha üstün olduğu görölmüştür. Ortalama-varyans portföyler ikisi bir yıllık ve birisi üç yıllık olmak üç zaman diliminde daha iyi sonuçlar vermiştir.

İkinci Kategori Bulgular

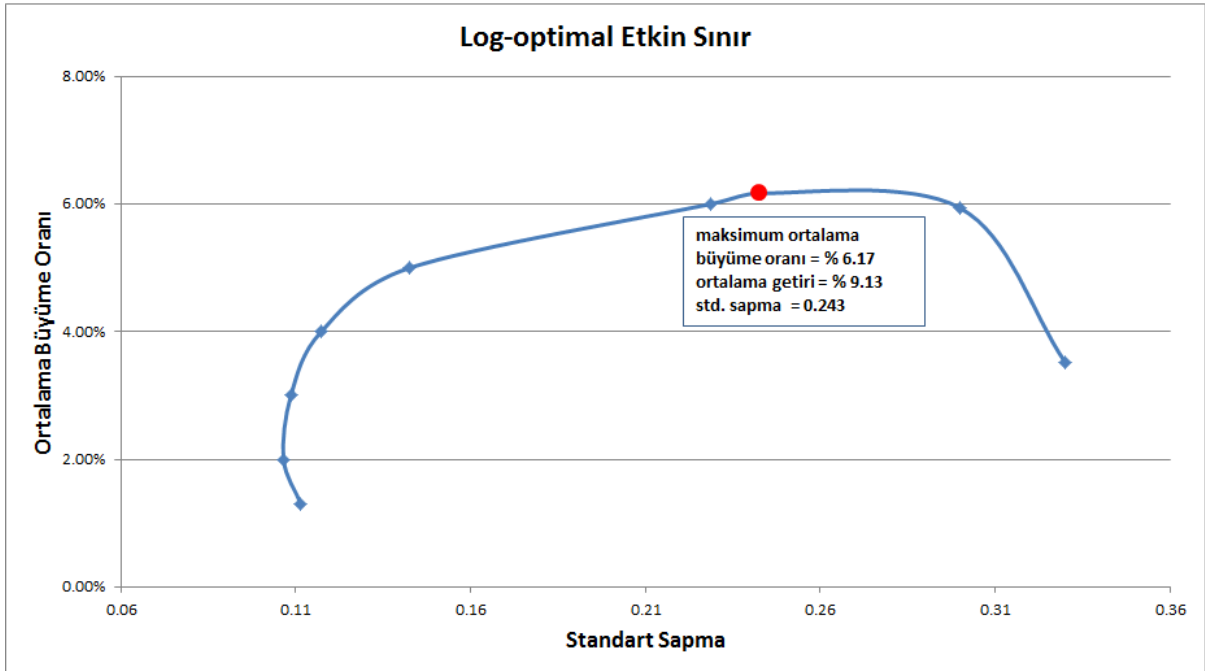
Log-optimal portföylerin daha uzun dönemli performanslarını ölçmek ve ortalama-varyans portföyleri ile karşılaştırmak amacı ile iki ayrı zaman diliminde beşer yıllık veriler kullanılarak portföyler oluşturulmuştur. Bu portföylerin izleyen bir, iki, üç, dört ve beş yıllık dönemlerde gerçek veriler ile performansları ölçülmüş ve birbirleri ile karşılaştırılmıştır. İlk kategori ölçümlerinde olduğu gibi bu kategoride de oluşturulan ortalama-varyans ve log-optimal portföy etkin sınırları belirlenmiş ve bu etkin sınırlar üzerinde maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyümeye denk gelen portföyler saptanmıştır.

Bu portföylerden 2000-2004 yılları verileri ile elde edilen ortalama-varyans ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4 ve Şekil 5'te verilmektedir.

Şekil 4 : 2000-2004 Portföyleri Ortalama-varyans Etkin Sınırı



Şekil 5 : 2000-2004 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4 ve Şekil 5’te verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değeri Tablo 3’te özetlenmektedir.

Tablo 3 : 2000-2004 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	5	9.13%	6.17%	0.375	0.243
M	7	5.94%	4.95%	0.421	0.140

Tablo 3’te log-optimal portföyün her dönemde olduğu gibi daha yüksek ortalama getiri, büyüme oranı ve risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Bu dönemde çeşitlendirme açısından ise portföyler birbirlerine yaklaşmaktadırlar. Bu iki portföyün 2005, 2005-2006, 2005-2007, 2005-2008, 2005-2009 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümleri Tablo 4’te verilmektedir.

Tablo 4 : 2000-2005 Portföy Performansları

	2005	2005-2006	2005-2007	2005-2008	2005-2009
L	37.55%	19.60%	43.24%	-8.79%	63.43%
M	31.66%	12.37%	25.95%	-14.86%	43.53%

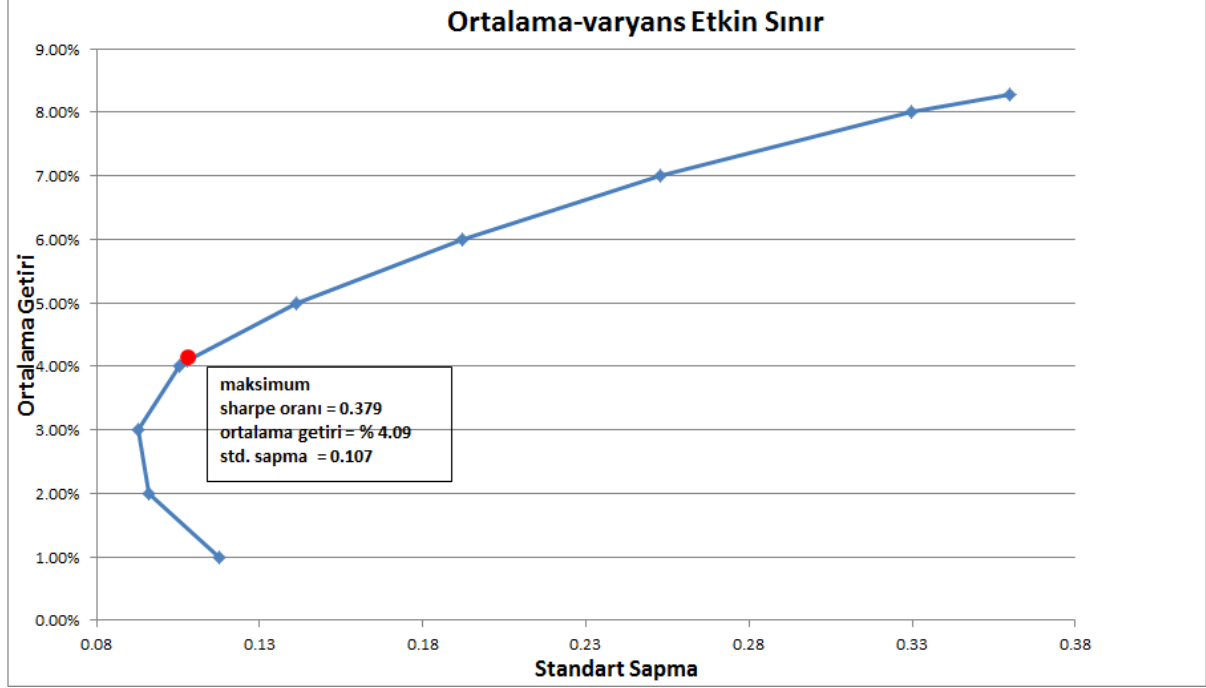
Tablo 4’te log-optimal portföylerin her beş ölçüm döneminde de ortalama-varyans portföylere oranla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir. 2005-2009 verileri ile oluşturulan portföyler için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü Kategori Bulgular

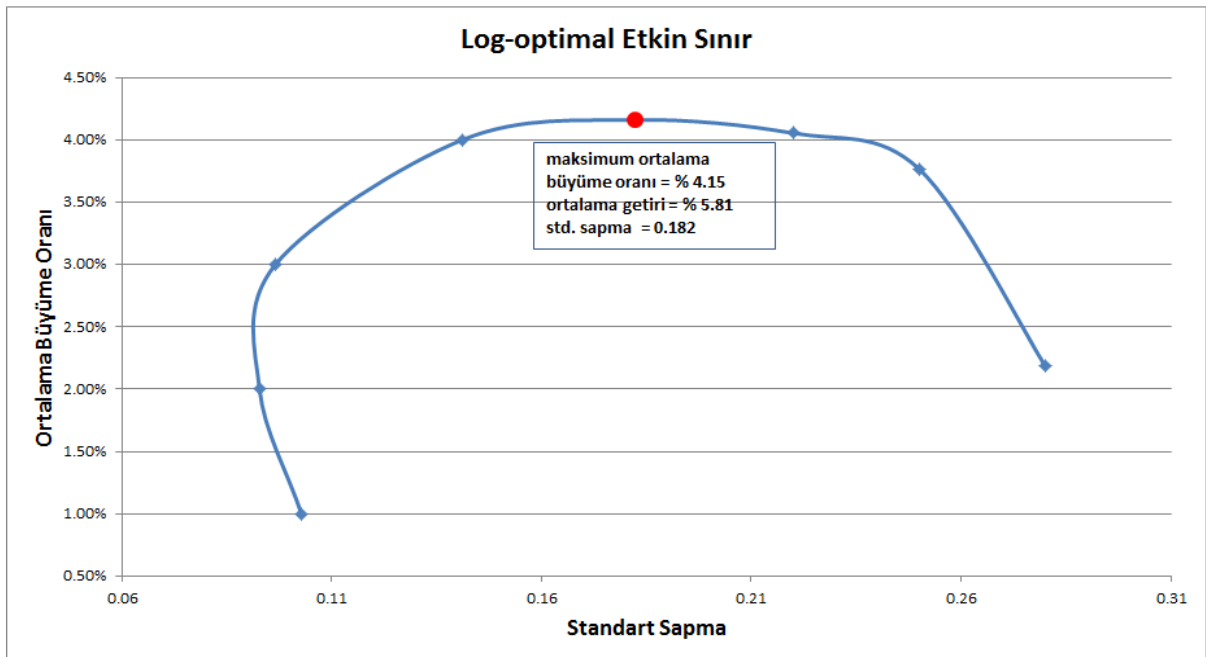
Bu kategoride log-optimal portföylerin uzun dönem performanslarının Ortalama-varyans portföylere oranla kesin olarak daha iyi olduğu savını sınamak amacı ile, dokuz yıllık veriler ile log-optimal ve ortalama-varyans portföyler oluşturulmuştur. İlk olarak 2000-2008 yılları verileri ile oluşturulan portföylerin performansları, 2009, 2009-2010, 2009-2011, 2009-2012, 2009-2013, 2009-2015 (Nisan) dönemleri gerçek getirileri ölçülmüştür. Daha sonra 2002-2010 verileri ile portföyler oluşturularak performansları, 2010, 2010-2011, 2010-2012, 2010-2013, 2010-2015 (Nisan) gerçek getirileri ile ölçülmüştür.

2000-2008 yılları verileri ile elde edilen ortalama-varyans ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 6 ve Şekil 7’de verilmektedir.

Şekil 6 : 2000-2008 Portföyleri Ortalama-varyans Etkin Sınırı



Şekil 7 : 2000-2008 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 6 ve Şekil 7’de verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değeri Tablo 5’te özetlenmektedir.

Tablo 5 : 2000-2008 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	5	5.82%	4.15%	0.319	0.182
M	10	4.09%	3.51%	0.379	0.107

Tablo 5’te log-optimal ve ortalama-varyans portföy özelliklerinin önceki kategorilere benzer olduğu görülmektedir. Bu iki portföyün 2009, 2009-2010, 2009-2011, 2009-2012, 2009-2015 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümleri Tablo 6’da verilmektedir.

Tablo 6 : 2000-2008 Portföy Performansları

	2009	2009-2010	2009-2011	2009-2012	2009-2013	2009-2015
L	110.46%	187.41%	136.60%	325.33%	354.85%	306.88%
M	92.62%	171.18%	122.74%	233.08%	262.70%	271.79%

Tabloda log-optimal portföylerin her altı ölçüm döneminde de ortalama-varyans portföylere oranla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

SONUÇ

Rassal süreçlere dayanan portföy optimizasyonu yöntemlerin uzun vadede tek dönemli piyasa modellemesine dayanan yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vereceği savını irdelemek amacı ile bahsedilen iki yöntemle oluşturulmuş portföylerin Borsa İstanbul verileri kullanılarak performansları karşılaştırılmıştır. Portföylerin oluşturulmasında 2000 ile 2015(Nisan) yılları arasında BIST100 endeksinde bulunan ve sürekli işlem gören 59 hisse senedinin verileri kullanılmıştır. Analiz farklı portföy oluşturma ve performans ölçüm zaman dilimleri içeren üç kategoride yapılmış ve oluşturulan portföylerin getiri, büyüme, Sharpe oranı ve riskleri karşılaştırılmıştır. İlk kategoride üçer yıllık oluşturma dönemlerinde iki yöntemle optimize edilen portföylerin izleyen bir, iki ve üç yıllık süreçlerde gerçek getiriler ile performansları ölçülmüş ve karşılaştırılmıştır. İkinci ve üçüncü kategorilerde portföy

oluşturma süreleri sırası ile beş ve dokuz yıla çıkarılmış ve veri seti sonuna değin farklı dönemlerdeki gerçek getiriler ile performansları karşılaştırılmıştır.

Bütün kategorilerde yapılan toplam 32 ölçümünün 29'unda log-optimal portföylerin daha iyi performans gösterdiği belirlenmiştir. Ortalama-varyans portföylerin daha iyi performans verdiği üç ölçüm de göreceli olarak kısa oluşturma ve ölçüm zamanlarının olduğu ilk kategoride bulunmaktadır. Portföy oluşturma dönemleri uzadıkça log-optimal portföyler her dönem için daha iyi performans göstermektedir. Bu sonuçlar Geometrik Brown Hareketine dayanan piyasa modellemesinin uzun dönemli portföy optimizasyonu açısından tek dönemli modellere göre daha iyi sonuçlar vereceği savını destekler niteliktedir. Log-optimal portföyler uzun dönemde her zaman dilimi için daha iyi sonuçlar vermiştir fakat bu performans üstünlüğü değişkenlik göstermektedir. Burada göz önüne alınması gereken log-optimal portföylerin tek dönemli yaklaşımlara göre performans üstünlüğünü garanti etmediği, sadece uzun dönemli büyüme ve son servetin maksimize olması olasılığını diğer modellere göre artırdığıdır.

KAYNAKLAR

- Fama, Eugene F., French, Kenneth R. (1992). Cross-Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance*, 47, p. 434.
- Fernholz, Robert. (2002) *Stochastic Portfolio Theory*, New York, NY: Springer-Verlag, p.16.
- Krause, Andreas. (2001). *An Overview of Asset Pricing Models*, http://people.bath.ac.uk/mnsak/Research/Asset_pricing.pdf.
- Long, John B. (1990). The Numeraire Portfolio, *Journal of Financial Economics*, Vol. 26, pp. 29–69
- Luenberger, David. (1998). *Investment Science*, Oxford University Press Inc., New York, p.428.
- Markowitz, Harry. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp.77-91.
- Sharpe, William F. (1996). Mutual Fund Performance, *Journal of Business*, January, pp. 121-125.
- Ustaoglu, Erhan. (2015). *Stokastik Portföy Teorisi ve Borsa İstanbul'da Uygulaması*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

EK-1

İlk Kategori Portföy Ağırlıkları

	2000-2002		2003-2005		2006-2008		2009-2011	
	L	M	L	M	L	M	L	M
ADANA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AFYON	0.00%	0.00%	0.00%	7.22%	0.00%	0.00%	8.18%	0.00%
AKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKCNS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKGRT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	20.67%	10.52%
ALARK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ANSGR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARCLK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
ASELS	26.55%	14.51%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	39.52%	12.89%
AYGAZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.25%
BAGFS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	6.63%
BANVT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BOSSA	1.57%	0.00%	0.00%	0.00%	4.29%	35.66%	0.00%	0.00%
BOYNR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CIMSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.09%
DGZTE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DOHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DYBOY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ECILC	0.00%	0.00%	0.00%	10.74%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ECYTY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
EGSER	0.00%	0.00%	0.00%	6.15%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ENKAI	0.00%	0.00%	0.00%	3.38%	0.00%	7.05%	0.00%	0.00%
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	6.69%	0.00%	0.00%
FROTO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	11.66%
GARAN	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GLYHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GSDHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GUBRF	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	95.71%	35.22%	0.00%	0.00%
GUSGR	1.61%	10.95%	0.00%	8.59%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
HURGZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ISCTR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KARTN	10.55%	43.66%	0.00%	4.55%	0.00%	0.00%	0.00%	7.65%
KCHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KIPA	0.00%	0.00%	0.00%	15.43%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KRDMD	0.00%	0.00%	4.76%	1.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MARTI	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MERKO	0.00%	0.00%	0.00%	12.96%	0.00%	7.52%	0.00%	0.00%
MGROS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NTHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	7.86%	0.00%	19.74%

BORSA ISTANBUL'DA LOG-OPTIMAL PORTFÖY UYGULAMASI

NTTUR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
OTKAR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	6.11%
PEGYO	15.89%	5.88%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PETKM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PRKME	43.84%	25.00%	0.00%	2.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SAHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SASA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.88%
SISE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.74%
SKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TATGD	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TEKST	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
THYAO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
TOASO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	31.63%	2.93%
TRCAS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TRKCM	0.00%	0.00%	0.00%	17.88%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TSKB	0.00%	0.00%	68.91%	5.77%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
TUPRS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.98%
ULKER	0.00%	0.00%	26.33%	3.61%	0.00%	0.00%	0.00%	2.89%
YKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

İkinci ve Üçüncü Kategori Portföy Ağırlıkları

	2000-2004		2005-2009		2000-2008		2002-2010	
	L	M	L	M	L	M	L	M
ADANA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AFYON	0.00%	0.00%	0.00%	5.88%	0.00%	2.20%	0.00%	11.50%
AKBNK	0.00%	7.76%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.43%
AKCNS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKGRT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ALARK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ANSGR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARCLK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ASELS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AYGAZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BAGFS	0.00%	0.00%	0.00%	4.53%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BANVT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BOSSA	0.00%	0.00%	0.00%	13.85%	0.00%	0.00%	0.00%	7.39%
BOYNR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CIMSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DGZTE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DOHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DYBOY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ECILC	0.00%	0.00%	0.00%	11.73%	0.00%	2.21%	16.06%	12.04%
ECYTY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Erhan USTAOĞLU, Erdinç ALTAY

EGSER	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ENKAI	0.00%	0.00%	0.00%	7.36%	25.93%	39.16%	0.00%	8.62%
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
FROTO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GARAN	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GLYHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GSDHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GUBRF	0.00%	0.00%	69.09%	16.88%	0.00%	0.00%	40.26%	19.54%
GUSGR	0.00%	15.01%	0.00%	0.00%	0.00%	9.86%	0.00%	1.13%
HURGZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ISCTR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KARTN	14.14%	36.26%	0.00%	0.00%	0.00%	14.35%	0.00%	3.28%
KCHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KIPA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	7.24%	0.00%	10.74%
KRDMD	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	11.98%	4.90%
MARTI	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MERKO	0.00%	0.00%	0.00%	7.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MGROS	0.00%	0.00%	0.00%	7.86%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NTHOL	0.00%	0.00%	0.00%	3.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NTTUR	0.00%	0.00%	0.00%	4.34%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
OTKAR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PEGYO	8.77%	0.20%	0.00%	0.00%	12.88%	0.00%	0.00%	0.00%
PETKM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PRKME	44.65%	19.12%	0.00%	0.00%	34.65%	11.00%	0.00%	0.00%
SAHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SASA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SISE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.13%	0.00%	0.00%
TATGD	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TEKST	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
THYAO	0.00%	0.00%	0.00%	9.22%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TOASO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TRCAS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TRKCM	0.00%	3.77%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TSKB	0.00%	0.00%	30.91%	0.00%	12.92%	4.40%	31.70%	10.15%
TUPRS	0.00%	0.00%	0.00%	7.44%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ULKER	32.44%	17.88%	0.00%	0.00%	13.61%	5.45%	0.00%	1.27%
YKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%