



Elastik bir ortamdaki grafen tabakanın titreşim hesabı

Çiğdem Demir, Bekir Akgöz, Mehmet Cihad Erdiñç, Kadir Mercan, Ömer Civalek*

Akdeniz Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 07038, Antalya, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Grafenin serbest titreşim analizi
- Grafenin plak olarak modellenmesi
- Elastik zemin üzerinde boyut etkisine bağlı titreşim

Makale Bilgileri

Geliş: 03.05.2016

Kabul: 18.07.2016

DOI:

10.17341/gazimmfd.322182

ÖZET

Grafen tabakalar uygulamada çoğu kez elastik bir malzeme ile temas halindedirler. Bu çalışmada grafen tabakaların titreşim analizi yüksek mertebeden elastisite teorisi ile yapılmıştır. Grafen tabaka; elastik bir ortam üzerindeki ince plak şeklinde modellenmiştir. Zemin modeli olarak Winkler–Pasternak iki parametrelili model kullanılmıştır. Boyut etkisine bağlı titreşim eşitliği değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile elde edilmiştir. Ayrık tekil konvolüsyon yöntemi ve analitik yöntem ile frekans değerleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler:

Nanoteknoloji,
grafen tabakalar,
titreşim,
boyut etkisi

Free vibration analysis of graphene sheets on elastic matrix

H I G H L I G H T S

- Free vibration analysis of graphene sheets
- Modelling graphene as plate
- Vibration on elastic foundation with size effect

Article Info

Received: 03.05.2016

Accepted: 18.07.2016

DOI:

10.17341/gazimmfd.322182

ABSTRACT

Graphene sheets are generally surrounded by an elastic matrix in applications. In the present study, free vibration analysis of graphene sheets is investigated via higher-order elasticity theory. Graphene sheet is modeled via thin plate on elastic medium. Winkler-Pasternak two-parameter elastic foundation model is used as foundation. The method of modified couple stress theory is used for size-dependent vibration. Frequencies have been calculated by discrete singular convolution and analytical method.

Keywords:

Nanotechnology,
graphene sheets,
vibration,
size effect

* Sorumlu Yazar/Corresponding author: ocivalek@akdeniz.edu.tr / Tel: +90 242 310 6319

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

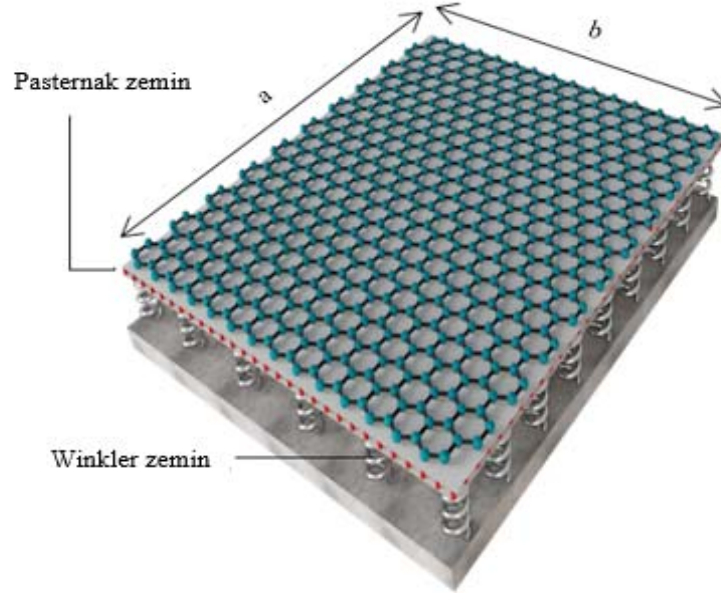
Klasik sürekli ortam mekaniği fizik bilimlerinin birçok mühendislik uygulamalarında (inşaat, mekanik, uzay, biyomedikal, vb.) kullanılan elemanları geliştirmede ortaya çıkacak temel problemleri çözmek için yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Klasik sürekli ortam mekaniğinin en temel özelliği, bir noktadaki gerilmenin sadece o noktadaki şekil değiştirme ile ilişkili olmasıdır. Dolayısıyla boyut etkisi dikkate alınmamaktadır. Oysa her malzeme mikro boyutlarda incelendikçe farklı fiziksel özellikler kazanabilmektedir. Ayrıca, modern teknolojik uygulamalar (mikro veya nano-elektromekanik cihazlar ‘MEMS, NEMS’, nano-makineler, biyoteknoloji vb.) mikro veya nano yapılar olarak tasarlanabilen sistemlerin kullanılmasını içerir. Nanoyapıların başlıca özelliği boyutlarının atomlar arası mesafeleri ile karşılaştırılabilir boyutta olması ve bu nedenle boyut etkisinin mekanik davranışta önemli hale gelmesidir. Deneysel olarak yapılan çalışmalarla boyut etkisinin varlığı test edilmiştir. Bu problem moleküler dinamik simülasyonlar ile çözülebilir fakat çok fazla sayısal hesaplama gayreti ve dolayısıyla çok fazla zaman gereksinimi doğmaktadır. Deneysel çalışmalar yine nano ölçekte kısıtlı olup her durumu benzeştirmek çok çok pahalıdır. 19. Yüzyılda başlayan çalışmaların 20. Yüzyılda hız kazanmasıyla ölçek etkisini de dikkate alan yeni sürekli ortam teorileri (yerel olmayan elastisite teorisi, değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi ve diğer yüksek mertebeden elastisite teorileri) ortaya çıkmıştır. Bu nedenle araştırmacılar sürekli ortam mekaniğine yönelmişler ve nano sistemleri çubuk [1], kiriş [2], plak [3], kabuk [4] şeklinde modellemiştirler. Aşağıda konuyla ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalar sunulmuştur. Akgöz ve Civallek [5] mikro ölçekli bir çubuğun serbest titreşimin problemini değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi (DŞDD) elastisite teorisi kullanarak çözmüştür. Bir diğer çalışmalarında ise değiştirilmiş gerilme çifti (DGÇ) teorisi ile fonksiyonel derecelendirilmiş mikro boyuttaki kirişlerin sıcaklığa bağlı, zemin etkisindeki burkulma yükü araştırılmıştır [6]. Homojen olmayan mikro kirişlerin eğilme ve burkulma yükünün hesabında yüksek mertebeden kiriş teorileri [7] kullanılan çalışmalarında ise yeni kayma düzeltme faktörleri önerilmiştir [8]. Tsiatas [9] tarafından değiştirilmiş gerilme çifti (DGÇ) teorisiyle mikro plakların Kirchhoff plak teorisine göre modellenmesi yapılmıştır. Yönetici eşitlikleri ve sınır koşullarını minimum toplam potansiyel enerji ilkesi yardımıyla çıkartmıştır. Çeşitli sınır koşullarındaki dikkörtgensel ve eliptik plakların eğilme analizlerini yaparak ilave boyut parametresinin davranış üzerine etkisini incelemiştir. İlave malzeme parametresinin artmasıyla plağın deplasman değerlerinin azaldığını ve bunun sadece Poisson oranına bağlı olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte, bu değişimin plağın sınır koşullarından ve en/boy oranından tamamen bağımsız olduğunu vurgulamıştır. Poisson oranının artmasının deplasman değerlerinin azalmasına neden olduğunu belirtmiştir. Jomehzadeh vd. [10] ise Kirchhoff plak teorisine göre mikro plakların DGÇ teorisine dayalı titreşim analizini

gerçekleştirmişlerdir. Harekete ait yönetici eşitlikleri Hamilton prensibi yardımıyla türetmişlerdir. Plak geometrisinin dikkörtgen ve dairesel olması durumlarını göz önüne almışlardır. Farklı sınır koşullarında, çeşitli ilave malzeme parametresi ve en/boy değerleri için doğal frekanslar ait sonuçlar elde etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçları hem grafiksel hem de tablolar halinde karşılaştırmalı olarak sunmuşlardır. Plak kalınlığı/boy oranının küçük olduğu durumlarda boyut etkisinin önemli olduğunu ifade etmişlerdir.

Pradhan ve Phadikar [11] tarafından polimer matris içine gömülü çok katmanlı grafen tabakaların serbest titreşim analizlerini yerel olmayan elastisite teorisi ile gerçekleştirmişlerdir. Yerel olmayan etkinin yüksek titreşim modlarında daha belirgin olduğunu, küçük ölçek etkisinin ancak zemin parametresi içermesi durumunda elastisite modülü, poisson oranı ve grafen levhanın kalınlığına da bağlı olacağını, zemin parametresindeki artışın yerel olmayan etkileri azalttığını ve kayma tabakasının etkisinin Winkler tabakasından daha fazla olduğunu belirtmişlerdir.

Samaei vd. [12], Pasternak zemin etkisindeki tek katmanlı grafen tabakaların küçük ölçek etkisine bağlı burkulma analizini yerel olmayan elastisite ile gerçekleştirmişlerdir. Modelleme sırasında Mindlin plak teorisini kullanılmıştır. Grafen plağın boyunun artmasıyla bütün burkulma modları için boyutsuz burkulma oranının arttığını ve mod sayısı arttıkça da bu oranın azaldığını göstermişlerdir. Ayrıca, hem Winkler hem de kayma parametresi değerlerindeki artışın bu oranda azalmaya neden olduğunu belirtmişlerdir. Akgöz ve Civallek [13], değiştirilmiş gerilme çifti (DGÇ) teorisine bağlı olarak Pasternak zemin üzerindeki tek katmanlı grafen tabakaların serbest titreşim analizi gerçekleştirmişlerdir. Yönetici eşitlikleri ve sınır koşulları Hamilton prensibi yardımıyla elde edilmiştir. İlave malzeme boyut ölçek parametresi değerlerinin artmasıyla doğal frekans değerlerinin önemli ölçüde arttığını tespit etmişlerdir. Ayrıca yüksek titreşim modlarında ve daha küçük boyutlarda ilave malzeme boyut ölçek parametresinin frekanslar üzerinde oldukça önemli olduğu vurgulanmıştır.

Grafen tabakalar, tamamıyla karbon atomlarından oluşan iki boyutlu hegzagonal yapıda bal peteği biçimindeki nano boyutlu yapılardır. Grafen tabakalar, karbon nanotüpler gibi mükemmel elektriksel, kimyasal, termal, mekaniksel ve optik özelliklere sahiptirler. Karbon-Karbon arası bağ uzunluğu 0,142 nm olup sadece bir atom kalınlığındadırlar (yaklaşık 0,34 nm). Çekme dayanımları çok yüksek ve elastisite modülleri 1 TPa’dan fazladır. Grafen tabakaların bu kadar yüksek dayanıma sahip olmalarının yanında standart bir kağıttan yaklaşık 1000 kat daha hafif olmaları (0,77 mg/m²) da eşsiz özelliklerinden bir diğeridir. Bahsedilen bu özelliklerinden dolayı nano-elektro-mekanik sistemlerde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu uygulamalara nano aktuatör [14], nano rezonatör [15] ve nano sensör [16] örnek olarak verilebilir. Ayrıca, karbon nanotüpe benzer olarak tek veya çok katmanlı yapıda bulunabilirler. Şekil 1’de Winkler



Şekil 1. Elastik zemin ile etkileşim halinde olan grafen tabakası (Graphene sheet on elastic foundation)

ve Pasternak zemin ile modellenmiş elastik zemin üzerine oturan, boyutları a ve b olan grafen tabaka gösterilmiştir. Bu çalışmada, yüksek mertebeden elastisite teorilerinden biri olan değiştirilmiş gerilme çifti teorisi ile tek katmanlı grafen tabakaların titreşim analizi gerçekleştirilecektir. Grafen tabakalar ince plak şeklinde modellenecek olup modellemede Kirchhoff teorisi kullanılacaktır. Grafenin elastik bir zemin üzerinde olması durumu iki parametrelili zemin modellerinden biri olan Pasternak zemin modeli kullanılarak, dikkate alınacaktır. Çalışmanın ana motivasyonu grafen tabakaların boyut etkisine bağlı serbest titreşim hesabını zemin parametrelerine bağlı çözmektir. Hem analitik çözüm yapılmış hem de Ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemi kullanılmıştır. Bu sayede ATK yönteminin nano mekanik problemlerindeki performansı da incelenmiştir.

2. TEMEL BAĞINTILAR (MAIN FORMULATION)

İnce plak teorisi olarak da adlandırılan Kirchhoff plak teorisine göre, şekil değiştirmeden önce düzlem ve orta yüzeye dik olan kesitler şekil değiştirmeden sonra da orta yüzeye düzlem ve dik kalırlar. İzotropik elastik malzemeler için 4 malzeme sabiti içeren (2 klasik, 2 ek), yüksek mertebeden elastisite teorilerinden klasik gerilme çifti elastisite teorisi Toupin [17], Mindlin [18], Mindlin ve Tiersten [19] ve Koiter [20] başta olmak üzere birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Mikro yapıdaki boyut etkisini belirlemenin zorluğundan dolayı yerel olmayan kiriş modellerinin mümkün olduğunca az ilave malzeme parametresi içermesi arzu edilir. Bu nedenle araştırmacılar, yeni teoriler geliştirmeye çalışmışlar ve var olan teorileri değiştirerek daha basit bir hale getirmeye başlamışlardır. Değiştirilmiş gerilme çifti teorisi (DGÇ) Yang vd. [21] tarafından önerilmiştir. Klasik halinden farklı olarak bu yeni

teoride gerilme çifti tansörü simetriktir ve sadece tek bir ilave malzeme boyut ölçek parametresine ihtiyaç duyulur. Bu teori Park ve Gao [22] ile Kong vd. [23] tarafından Bernoulli-Euler kirişine ve Ma vd. [24] tarafından Timoshenko kirişine uygulanmıştır. Bu teoride, şekil değiştirme enerji yoğunluğu hem şekil değiştirme hem de eğriliğin bir fonksiyondur. V hacmini kaplayan deforme olmuş lineer elastik malzeme için şekil değiştirme enerjisi U şöyledir (Eş. 1).

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) d\Omega \quad (1)$$

Burada σ_{ij} gerilme tansörü, ε_{ij} şekil değiştirme tansörü, m_{ij} gerilme çifti tansörünün deviatorik parçası ve χ_{ij} eğrilik tansörüdür (Eş. 2- Eş. 4).

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (5)$$

λ ve μ Lamé sabitleri, l malzeme boyut ölçek parametresi, u deplasman vektörü, θ dönme vektörüdür. e_{ijk} permütasyon sembolüdür.

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (6)$$

İnce dikdörtgen bir plağın deplasman ifadeleri Kirchhoff teorisine göre aşağıdaki gibi yazılabilir [25]:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8)$$

$$w(x, y, z, t) = w \quad (9)$$

Burada u_0 , v_0 , ve w_0 sırasıyla x , y ve z eksenlerine ait deplasman bileşenleridir. Küçük deformasyonlar varsayımı ve doğrusal şekil değiştirme-deplasman bağıntıları ile bir mikro boyutlu plağın sıfırdan farklı şekil değiştirme bileşenleri Eş. 10 şeklindedir [26].

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (10)$$

Dönme vektörünün bileşenleri Eş. 7-9'un Eş. 6'da kullanılmasıyla [27] Eş. 11 elde edilir.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (11)$$

Benzer biçimde simetrik dönme değişimi tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri de yukarıdaki eşitliğin, Eş. 5'te yerine yazılmasıyla Eş. 12 elde edilir:

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\chi_{xz} = \chi_{zx} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right),$$

$$\chi_{yz} = \chi_{zy} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (12)$$

Hamilton ilkesine göre, Eş. 13 koşulunu sağlanması gerekir.

$$0 = \int_0^t (\delta T - (\delta U + \delta W)) dt \quad (13)$$

Burada U şekil değiştirme enerjisi, W dış kuvvetler tarafından yapılan iş ve T ise kinetik enerjidir. Ω alanını kaplayan malzeme için, yukarıdaki eşitliklerin Eş. 1'de yerlerine yazılmasıyla mikro plağın şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu Eş. 14 elde edilebilir.

$$\delta U = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} \right. \\ \left. + m_{xx} \delta \chi_{xx} + 2m_{xy} \delta \chi_{xy} + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} \right. \\ \left. + m_{yy} \delta \chi_{yy} + 2m_{yz} \delta \chi_{yz} \right] dz dx dy$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + m_{xx} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + m_{xy} \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \frac{m_{xz}}{2} \left(-\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + m_{yy} \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{m_{yz}}{2} \left(-\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x \partial y} \right) \right] dz \right\} dx dy \quad (14)$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan klasik ve klasik olmayan gerilme bileşenleri Eş. 15'de verildiği gibi kuvvet, moment ve klasik olmayan moment ifadelerini oluşturur.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xy} \\ N_{yy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} z dz,$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{xx} \\ Y_{xy} \\ Y_{xz} \\ Y_{yy} \\ Y_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{xy} \\ m_{xz} \\ m_{yy} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (15)$$

Bu durumda Eş. 14, gerilme bileşenleri cinsinden Eş. 16 ile ifade edilebilir.

$$\delta U = \iint_{\Omega} \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + N_{yy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + Y_{xz} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. + Y_{xy} \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \frac{Y_{xz}}{2} \left(-\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2} \right) \right. \\ \left. + Y_{yy} \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Y_{yz}}{2} \left(-\frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \quad (16)$$

Dış kuvvetler tarafından yapılan işin birinci varyasyonu Eş. 17 gibidir.

$$\delta W = \iint_{\Omega} (-k_w w + k_G \nabla^2 w) \delta w dx dy \quad (17)$$

k_w ve k_G sırasıyla Winkler ve Pasternak elastik zemin parametreleri olup ∇^2 iki boyutlu Laplace operatörüdür. Diğer taraftan sistemin kinetik enerjisinin birinci varyasyonu Eş. 18 gibidir.

$$\begin{aligned} \delta T &= \iint_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dx dy \\ &= \iint_{\Omega} [I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\ &\quad - I_1 \left(\frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \dot{u}_0 + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \dot{v}_0 + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right)] dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

Buradaki I_0 , I_1 ve I_2 kütle eylemsizlik momentleri olup Eş. 19 ile ifade edilebilir ve burada ρ yoğunluktur.

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz = \rho \begin{Bmatrix} h \\ 0 \\ \frac{h^3}{12} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Yukarıdaki ifadenin düzenlenmesiyle Eş. 20'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial y^2} - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) \delta u_0 \right. \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial x \partial y} - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \delta v_0 \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_{yy}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. \left. - k_w w + k_G \nabla^2 w - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \delta w \right] dx dy \\ &\quad + \oint_{\Gamma} \left[\left(\begin{matrix} N_{xx} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial y} \\ N_{xy} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \end{matrix} \right) n_x \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{matrix} N_{xy} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \\ N_{yy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \end{matrix} \right) n_y \right] \delta u_0 \\ &\quad - \frac{1}{4} Y_{xz} n_y \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \\ &\quad - \left(\left(\frac{1}{4} Y_{xz} \right) n_x + \left(\frac{1}{2} Y_{yz} \right) n_y \right) \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \\ &\quad \left(\left(N_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \right) n_x + \left(N_{yy} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial x} \right) n_y \right) \delta v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\left(\frac{1}{2} Y_{xz} \right) n_x + \left(\frac{1}{4} Y_{yz} \right) n_y \right) \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{1}{4} Y_{yz} n_x \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ &+ \left(\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} \right) n_x \right. \\ &+ \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yy}}{\partial x} \right) n_y \left. \right) \delta w \\ &- \left((M_{xx} + Y_{xy}) n_x + \left(M_{xy} - \frac{1}{2} Y_{xx} + \frac{1}{2} Y_{yy} \right) n_y \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} \\ &- \left(\left(M_{xy} - \frac{1}{2} Y_{xx} + \frac{1}{2} Y_{yy} \right) n_x + (M_{yy} - Y_{xy}) n_y \right) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \left. \right] ds \Bigg\} dt \quad (20) \end{aligned}$$

Buradan, elastik zemin üzerindeki bir dikdörtgen grafen plağın yönetici eşitlikler aşağıdaki gibi elde edilir (Eş. 21-Eş. 23):

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}}{\partial x \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} \\ &- \frac{\partial^2 Y_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_{yy}}{\partial x \partial y} - k_w w + k_G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

İlgili sınır koşulları da Eş. 24-Eş. 32 halindedir.

$$\left(N_{xx} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial y} \right) n_x + \left(N_{xy} + \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \right) n_y = 0$$

$$\text{ya da } u_0 = 0 \quad (24)$$

$$\left(-\frac{1}{4} Y_{xz} \right) n_y = 0 \text{ ya da } \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

$$\left(-\frac{1}{4} Y_{xz} \right) n_x + \left(-\frac{1}{2} Y_{yz} \right) n_y = 0 \text{ ya da } \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$\left(N_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial y} \right) n_x + \left(N_{yy} - \frac{1}{4} \frac{\partial Y_{yz}}{\partial x} \right) n_y = 0$$

$$\text{ya da } v_0 = 0 \quad (27)$$

$$\left(\frac{1}{2}Y_{xz}\right)n_x + \left(\frac{1}{4}Y_{yz}\right)n_y = 0 \text{ ya da } \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\left(\frac{1}{4}Y_{yz}\right)n_x = 0 \text{ ya da } \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} + I_2\frac{\partial \ddot{w}}{\partial x}\right)n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_{yy}}{\partial x} + I_2\frac{\partial \ddot{w}}{\partial y}\right)n_y = 0$$

$$\text{ya da } w = 0 \quad (30)$$

$$-(M_{xx} + Y_{xy})n_x + \left(-M_{xy} + \frac{1}{2}Y_{xx} - \frac{1}{2}Y_{yy}\right)n_y = 0$$

$$\text{ya da } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

$$\left(-M_{xy} + \frac{1}{2}Y_{xx} - \frac{1}{2}Y_{yy}\right)n_x + (-M_{yy} + Y_{xy})n_y = 0$$

$$\text{ya da } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (32)$$

Eş. 15'teki gerilme bileşenleri deplasman terimleriyle aşağıda görüldüğü biçimde yeniden yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{xy} \\ N_{yy} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \\ \nu & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \\ \nu & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ \partial^2 w_0 / \partial x \partial y \\ \partial^2 w_0 / \partial y^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{xx} \\ Y_{xy} \\ Y_{xz} \\ Y_{yz} \end{bmatrix} = \mu l^2 h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \partial^2 u_0 / \partial y^2 \\ \partial^2 u_0 / \partial x \partial y \\ \partial^2 v_0 / \partial x^2 \\ \partial^2 v_0 / \partial x \partial y \\ \partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ \partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ \partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{bmatrix}$$

Buradan, dikdörtgen grafen plağın titreşim davranışına ait yönetici eşitlikler deplasman bileşenleri terimleriyle şeklinde yazılabilir (Eş. 36-Eş. 38).

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)l^2}{8} \left(-\frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 v_0}{\partial x \partial y^3} \right) \right\} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (36)$$

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\nu)l^2}{8} \left(-\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} \right) \right\} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (37)$$

$$\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu l^2 h \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + k_w w - k_G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (38)$$

3. ANALİTİK ÇÖZÜM (ANALYTICAL SOLUTION)

Eş. 38'de verilen serbest titreşim durumuna ait yönetici eşitliği çözebilmek için değişkenlerine ayırma yöntemi yardımıyla Eş. 39 yazılır.

$$w(x, y, t) = W(x, y) (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (39)$$

Burada $W(x, y)$ şekil fonksiyonu ve ω ise grafen plağın doğal frekans değeridir. Eş. 39'un kullanılmasıyla [28] Eş. 40'a ulaşılır.

$$\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu l^2 h \right) \nabla^2 \nabla^2 W + k_w W - k_G W \nabla^2 - \omega^2 \rho h W + \omega^2 \frac{\rho h^3}{12} \nabla^2 W = 0 \quad (40)$$

Diğer taraftan şekil fonksiyonu basit mesnetli durum için sınır koşullarını sağlayacak biçimde aşağıdaki gibi seri açılımı Eş. 41 ile yazılabilir ve burada C_{mn} Fourier katsayısıdır.

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (41)$$

Eş. 41'in Eş. 40'da kullanılmasıyla Eş. 42 elde edilir.

$$\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu l^2 h \right) \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k_w + k_G \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \omega_{mn}^2 \left(\rho h + \frac{\rho h^3}{12} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right) \quad (42)$$

Değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre tek katmanlı grafen plağın doğal frekans ifadesine Eş. 43 ile ulaşılır.

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu l^2 h \right) \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k_w + k_G \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}{\rho h + \frac{\rho h^3}{12} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (43)$$

Yukarıdaki eşitlikte ilave malzeme boyut ölçek parametresi sıfır alınırsa klasik doğal frekans değerine ulaşılır.

4. SAYISAL ÇÖZÜM (NUMERICAL SOLUTION)

Elde edilen eşitliği sayısal olarak çözmek için ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemi seçilmiştir. Ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemi ilk olarak Wei [29] tarafından ortaya atılmıştır. Wei'nin de belirttiği gibi [30] çeşitli fen bilimleri ve mühendislik problemlerinde görülen tekil konvolüsyonlar (TK), Hilbert, Abel and Radon dönüşümleri gibi, matematik dönüşümlerinin özel bir sınıfını oluşturur. Bu konudan ayrık tekil konvolüsyon yöntemini kullandığı, sinüs-Gordon [31] ve Fokker-Planck [32] denklemleriyle ve dalgacık methodu [33] ilgili araştırmalarında da bahsetmiştir. Son bir kaç yılda gelişme gösteren matematiğin yeni dalı Wavelet (dalgacık) bu metodun esasını teşkil eder [34]. Diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi ayrık tekil konvolüsyon yöntemi (ATK) de mevcut bir türev eşitliğini yani sürekli bir sisteme ait eşitliği yaklaşım veya test fonksiyonu (sonlu elemanlarda şekil fonksiyonu) olarak kerneller yada çekirdek kullanarak ayrıştırır. Çekirdek olarak Shannon, Shannon delta, Dirichlet, de la Vallée Poussin vb. kullanılır. Eşitlikteki T ve $\eta(t)$ test fonksiyonundaki eleman değerleridir. Tekil konvolüsyon olarak ifade edilebilir [34].

$$F(t) = (T * \eta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t-x)\eta(x)dx, \quad (44)$$

$T(t-x)$ tekil çekirdek olarak ifade edilir. Örneğin:

$$T(x) = \delta^{(n)}(x); \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (45)$$

Buradaki ayrık çekirdek delta tiptir. Çekirdek $T(x)=\delta(x)$ eşitliği yüzeysel ve eğrisel interpolasyon için önemlidir [37] ve $T(x)=\delta^{(n)}(x)$ eşitliği $n>1$ için türevsel eşitliklerin sayısal çözümünde gereklidir [38]. Yeterli sayıda düzgün yaklaşımla, ayrık tekil konvolüsyon yönteminin dikkate alınması son derece etkili olur [39].

$$F_{\alpha}(t) = \sum_k T_{\alpha}(t-x_k)f(x_k), \quad (46)$$

4.1. Shannon'un Delta (RSD) Çekirdeği (Shannon's Delta (RSD) Kernel)

Yakın geçmişte, bazı yeni çekirdeklerin kullanımı [35] mekanik ve uygulamalı matematik problemlerinin çözümünde önerilmiştir. Shannon çekirdeği düzenlenmiştir [36] (Eş. 47).

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) = \frac{\sin[(\pi/\Delta)(x-x_k)]}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right]; \quad \sigma>0. \quad (47)$$

Burada $\Delta=\pi/(N-1)$ her bir düğüm arası aralık ve N düğüm nokta sayısı. Burada σ parametresi Gauss zarfı (Gaussian envelope) genişliği olarak bilinir ve $\sigma=rh$ ile hesaplanır [37]. r hesaplanmanın başında seçilecek bir parametredir. Eş. 47 tekil konvolüsyon çekirdeklerin (delta tip) ayrık yaklaşımlar sağlama için kullanılabilir [40]. Örneğin bir fonksiyon için herhangi bir mertebeden türev $\delta_{\Delta}(x-x_k) = \Delta\delta_{\Delta}(x-x_k)$ olarak belirtilmiştir ve (n) türevin mertebesini göstermektedir [41].

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta}(x-x_k)f(x_k) \quad (48)$$

$(2M+1)$ x çevresinde konumlanan ve genellikle toplam değerinden daha küçük toplam hesap genişliğidir [42]. ATK yönteminde herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası için x koordinat yönündeki türevi aşağıdaki toplam ile verilir [43].

$$\left. \frac{d^n f(x)}{d x^n} \right|_{x=x_i} = f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x_i-x_k)f(x_k); \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (49)$$

Eşitlikte n . x değişkenine göre n . mertebeden türev olarak tanımlanır. Örneğin ATK çekirdeğinin $x=x_i$ deki ikinci mertebeden türevi aşağıdaki gibidir [44]. Ayrık formda Eş. 50'deki bu türev olarak formüle edilebilir (Eş. 51).

$$\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x-x_j) = \frac{d^2}{dx^2} \left[\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_j) \right]_{x=x_j} \quad (50)$$

$$f^{(2)}(x) = \left. \frac{d^2 f}{d x^2} \right|_{x=x_i} \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta x_N) f_{i+k,j} \quad (51)$$

5. SAYISAL ÖRNEKLER (NUMERICAL EXAMPLES)

Bu bölümde bütün kenarları basit mesnetli dikdörtgen şekle sahip tek katmanlı grafen plağın serbest titreşim analizi değiştirilmiş gerilme çifti teorisine dayalı olarak gerçekleştirilmiştir. Grafen tabakaya ait malzeme özellikleri şöyledir: $E=1,06$ TPa, $\nu=0,25$, $h=0,34$ nm ve $\rho=2250$ kg/m³. İlave malzeme boyut ölçek ve elastik zemin parametrelerinin grafen tabakaya ait doğal frekans değerleri üzerindeki etkileri detaylı bir biçimde incelenmiştir. Tablo ve şekillerde yer alan boyutsuz zemin parametreleri şeklinde ifade edilebilir (Eş. 52).

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D}, \quad K_G = \frac{k_G a^2}{D}, \quad (D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}) \quad (52)$$

Karşılaştırma amaçlı olarak tek katmanlı bir grafen için temel frekans değeri hesaplanmış ve Tablo 1 de sunulmuştur. ATK yöntemi ile 11 düğüm noktası kullanımında Lin [49] ve Foroushani ve Azhari [50] 'de elde edilen sonuçlar ile yeter doğrulukta değerler elde edilmiştir. Tablo 2'de kare grafen tabakaya ait temel frekans değeri üzerindeki boyut ve elastik zemin parametrelerinin etkisi sunulmuştur. Burada Winkler ve Pasternak zemin parametrelerindeki bir artışın temel frekans değerlerinin de artmasına neden olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca boyut etkisinin dikkate alınmasıyla klasik sonuçlardan daha büyük frekans değerleri elde edilmiştir. Tablo 3'de ise elastik zemin üzerindeki dikdörtgen grafen tabakaya ait çeşitli modlardaki frekans değerlerinin en/boy oranına bağlı değişimi verilmiştir. En/boy oranının artmasıyla doğal frekans değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca klasik ve boyut etkili frekans değerleri arasındaki farkın yüksek modlarda daha belirgin olduğu açıkça vurgulanabilir.

Tablo 1. Dört kenarı basit mesnetli grafen tabakanın temel frekans değeri (THz) ($h=0,34$ nm, $E=1,06$ TPa, $\nu=0,25$, $\rho=2250$ kg/m³)
(Fundamental frequency of four side simply supported graphene sheet)

Ref.[49]	Ref.[50]	ATK 7*7	ATK 9*9	ATK 11*11
0,06912	0,06912	0,06925	0,006916	0,06914

Şekil 2 ve Şekil 3'de sırasıyla tek katmanlı kare grafen tabakaya ait ilk iki doğal frekans değerinin elastik zemin parametrelerine ve boyut ölçek parametresinin kalınlığa oranına göre değişimi çizdirilmiştir. Boyut ölçek parametresinin kalınlığa oranı arttıkça doğal frekans değerlerinin de giderek arttığı görülmüştür. Bu şekillerden her iki elastik zemin parametresinin de frekans değerleri üzerinde artışa neden olduğu ve ayrıca Pasternak zemin modeline ait parametrenin daha etkili olduğu rahatlıkla söylenebilir.

Şekil 4 ve Şekil 5'te sırasıyla klasik ve boyut etkili temel frekans değerleri üzerinde elastik zemin parametrelerinin etkileri araştırılmıştır. Elastik zemin parametrelerinin değeri arttıkça frekans değeri de sürekli artmıştır. Ayrıca boyut etkisinin hesaba katıldığı durumda daha yüksek frekans değerlerine ulaşılmıştır.

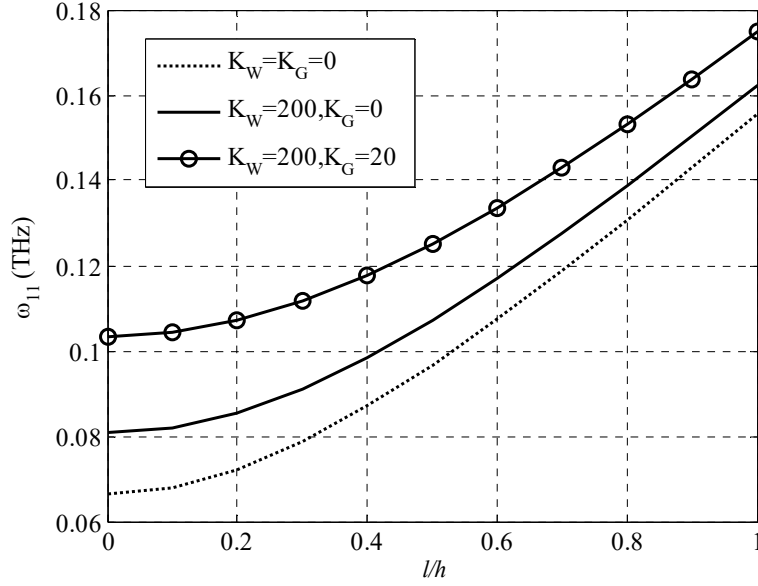
Nanoteknoloji günümüzde disiplinler arası ve popüler bir konu olup, Alümina içeren nano akışkanlar [45], nano kimyasal süreçler[46], nano akışkanlarda ısı transferi [47], nanoakışkanlarda ısı transferi [48], nano ölçekli sistem tasarımı ve malzeme mühendisliği alanındaki uygulamalar, nano teknolojinin yakın zamanda yeni teknolojilerin gelişmesine katkı yapacak bir potansiyele sahiptir. Bu çalışmada, nano teknolojik bir ürün olan grafenlerin analizleri boyut etkisine bağlı olarak yapılmış ve sonuçlar tartışılmıştır.

Tablo 2. Kare grafen plağın temel frekans değeri (THz) üzerindeki boyut ve elastik zemin parametrelerinin etkisi ($a=b=20h$, $l=h$) (Fundamental frequency of square graphene sheet with elastic foundation parameters and size effect)

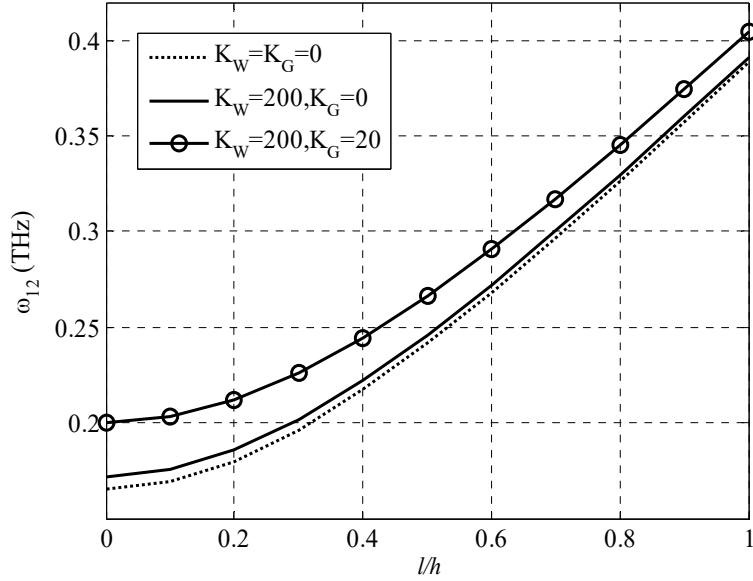
K_w	$K_G=0$		$K_G=10$		$K_G=20$	
	Klasik	Boyut etkili	Klasik	Boyut etkili	Klasik	Boyut etkili
0	0,1492	0,3499	0,1812	0,3646	0,2083	0,3789
10	0,1510	0,3506	0,1826	0,3654	0,2096	0,3796
50	0,1579	0,3537	0,1884	0,3683	0,2146	0,3824
100	0,1662	0,3574	0,1954	0,3719	0,2208	0,3859

Tablo 3. Elastik zemin üzerindeki dikdörtgen grafen tabakaya ait frekans değerlerinin (THz) değişimi ($a=20h$, $K_w=K_G=10$, $l=h$) (The variance of rectangular shaped graphene sheet fundamental frequency on elastic foundation)

Mod	$b=a$		$b=1,5a$		$b=2a$	
	Klasik	Boyut etkili	Klasik	Boyut etkili	Klasik	Boyut etkili
ω_{11}	0,1826	0,3654	0,1407	0,2685	0,1259	0,2346
ω_{12}	0,4062	0,8872	0,2409	0,5009	0,1826	0,3654
ω_{13}	0,7745	1,7502	0,4062	0,8872	0,2762	0,5831
ω_{21}	0,4062	0,8872	0,3650	0,7908	0,3506	0,7570
ω_{22}	0,6277	1,4060	0,4638	1,0220	0,4062	0,8872
ω_{23}	0,9936	2,2639	0,6277	1,4060	0,4987	1,1037
ω_{31}	0,7745	1,7502	0,7338	1,6547	0,7196	1,6213
ω_{32}	0,9936	2,2639	0,8315	1,8837	0,7745	1,7502
ω_{33}	1,3557	3,1132	0,9936	2,2639	0,8660	1,9646



Şekil 2. Temel frekans değerinin elastik zemin parametrelerine ve boyut ölçek parametresinin kalınlığa oranına göre değişimi ($m=n=1$, $a=b=30h$)
(The variance of the fundamental frequency with the variation of size scale parameter's rate on different elastic foundations)

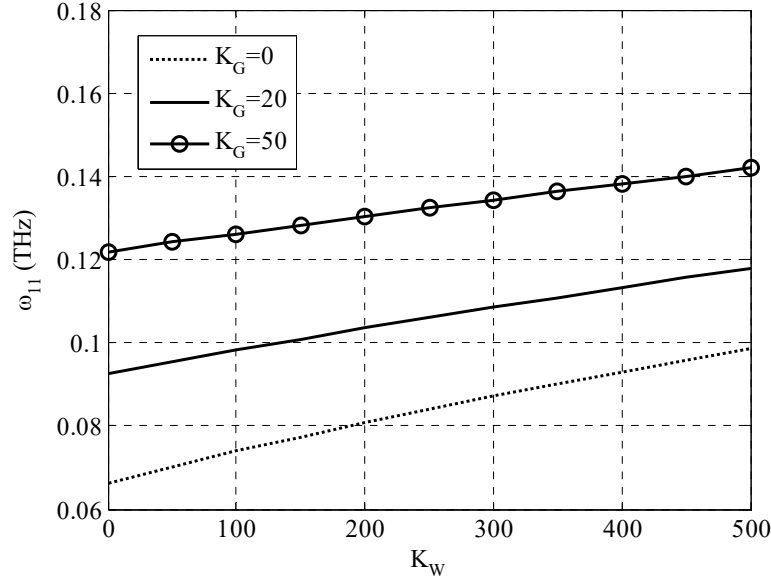


Şekil 3. Doğal frekans değerinin elastik zemin parametrelerine ve boyut ölçek parametresinin kalınlığa oranına göre değişimi ($m=1$, $n=2$, $a=b=30h$)
(The variance of the natural frequency with the variation of size scale parameter's rate on different elastic foundations)

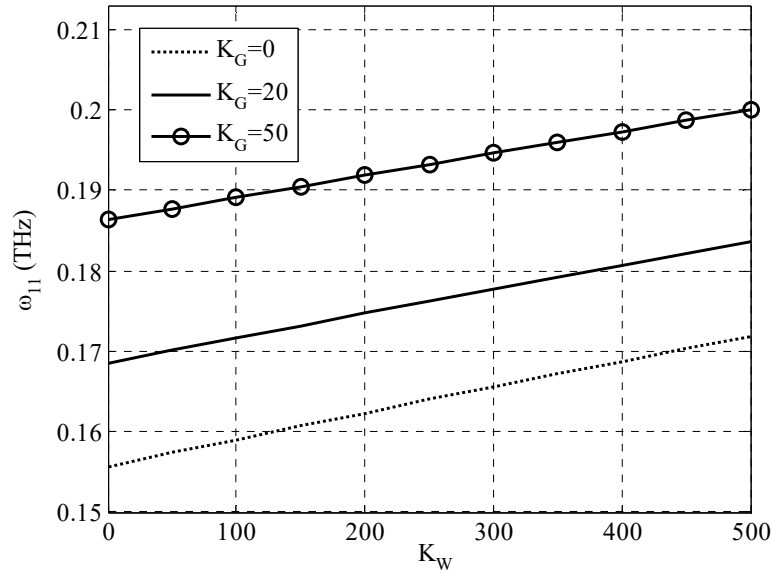
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR (RESULTS AND DISCUSSIONS)

Bu çalışmada, iki parametrelili zemin modeli olan Pasternak zemin üzerindeki tek katmanlı grafen tabakanın serbest titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir. Modelleme sırasında Kirchhoff plak teorisi kullanılmıştır. Küçük ölçek etkisini dikkate almak için değiştirilmiş gerilme çifti teorisinden

yararlanılmıştır. Zemin parametrelerinin, malzeme boyutlarının, küçük ölçek parametresinin serbest titreşime olan etkisi tablolar ve şekiller ile sunulmuştur. Yapılan analizler sonucu elastik zemin etkisinin temel frekans değerlerini arttırdığı gözlemlenmiştir. Grafen boyutlarının artması ile değiştirilmiş gerilme çifti teorisinin önemini yitirdiği ve sonuçların klasik sonuçlara yakınsadığı görülmektedir.



Şekil 4. Elastik zemin parametrelerinin klasik temel frekans değeri üzerindeki etkisi ($m=n=1$, $a=b=30h$, $l=0$)
(The effect of different elastic foundations on fundamental frequency)



Şekil 5. Elastik zemin parametrelerinin boyut etkili temel frekans değeri üzerindeki etkisi ($m=n=1$, $a=b=30h$, $l=h$)
(The effect of different elastic foundations on size effected fundamental frequency)

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGEMENT)

Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne katkılarından dolayı teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Demir Ç., Civalek Ö., Torsional and longitudinal frequency and wave response of microtubules based on the nonlocal continuum and nonlocal discrete models, *Appl. Math. Modell.*, 37 (22), 9355-9367, 2013.
- Civalek Ö., Demir Ç., Akgöz B., Static analysis of single walled carbon nanotubes (SWCNT) based on Eringen's nonlocal elasticity theory, *Int. J. Eng. Appl. Sci.*, 1 (2), 47-56, 2009.
- Akgöz B., Civalek Ö., Modeling and analysis of micro-sized plates resting on elastic medium using the modified couple stress theory, *Meccanica*, 48 (4), 863-873, 2013.
- Shen H.S., Nonlocal shear deformable shell model for postbuckling of axially compressed microtubules embedded in an elastic medium, *Biomech. Model. Mechanobiol.*, 9 (3), 345-357, 2010.
- Akgöz B., Civalek Ö., Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory, *J. Vib. Control*, 20 (4), 606-616, 2014.

6. Akgöz B., Civalek Ö., Thermo-mechanical buckling behavior of functionally graded microbeams embedded in elastic medium, *Int. J. Eng. Sci.*, 85, 90-104, 2014.
7. Akgöz B., Civalek Ö., A new trigonometric beam model for buckling of strain gradient microbeams, *Int. J. Mech. Sci.*, 81, 88-94, 2014.
8. Akgöz B., Civalek Ö., Shear deformation beam models for functionally graded microbeams with new shear correction factors, *Compos. Struct.*, 112, 214-225, 2014.
9. Tsiatas G.C., A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory, *Int. J. Solids Struct.*, 46 (13), 2757-2764, 2009.
10. Jomehzadeh E., Noori H.R., Saidi A.R., The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory, *Physica E*, 43 (4), 877-883, 2011.
11. Pradhan S.C., Phadikar J.K., Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models, *Phys. Lett. A*, 373 (11), 1062-1069, 2009.
12. Samaei A.T., Abbasian S., Mirsayar M.M., Buckling analysis of a single-layer graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory, *Mech. Res. Commun.*, 38 (7), 481-485, 2011.
13. Akgöz B., Civalek Ö., Free vibration analysis for single-layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory, *Mater. Des.*, 42, 164-171, 2012.
14. Eichler A., Moser J., Chaste J., Zdrojek M., Wilson-Rae I., Bachtold, A., Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene, *Nat. Nanotechnol.*, 6 (6), 339-342, 2011.
15. Ji Y., Choe M., Cho B., Song S., Yoon J., Ko H.C., Lee T., Organic nonvolatile memory devices with charge trapping multilayer graphene film, *Nanotechnol.*, 23 (10), 105202-105207, 2012.
16. Murmu T., Adhikari S., Nonlocal mass nanosensors based on vibrating monolayer graphene sheets, *Sens. Actuators, B*, 188, 1319-1327, 2013.
17. Toupin R.A., Theories of elasticity with couple-stress, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 17 (2), 85-112, 1964.
18. Mindlin R.D., Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 1 (4), 417-438, 1965.
19. Mindlin R.D., Tiersten H.F., Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11 (1), 415-448, 1962.
20. Koiter W.T., Couple stresses in the theory of elasticity: I and II, *Proc. K. Ned. Akad. Wet. B-Phys. Sci.*, 67, 17-44, 1969.
21. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 39 (10), 2731-2743, 2002.
22. Park S.K., Gao X.-L., Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *J. Micromech. Microeng.*, 16 (11), 2355-2359, 2006.
23. Kong S., Zhou S., Nie Z., Wang K., The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams, *Int. J. Eng. Sci.*, 46 (5), 427-437, 2008.
24. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N., A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *J. Mech. Phys. Solids*, 56 (12), 3379-3391, 2008.
25. Ventsel E. ve Krauthammer T., *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, CRC Press, 2001.
26. Pradhan S.C., Murmu T., Small scale effect on the buckling analysis of single-layered graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal plate theory, *Physica E*, 42 (5), 1293-1301, 2010.
27. Reddy J.N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, second ed. Taylor & Francis, Philadelphia, 2007.
28. Erdiñç M.C., *Elastik zemine oturan grafen tabakaların mekanik özelliklerinin belirlenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Antalya, 2016.
29. Wei G.W., Discrete singular convolution for the solution of the Fokker-Planck equation, *J. Chem. Phys.*, 110 (18), 8930-8942, 1999.
30. Wei G.W., Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 33 (3), 343-352, 2000.
31. Wei G.W., Discrete singular convolution for the sine-Gordon equation, *Physica D*, 137 (3), 247-259, 2000.
32. Wei G.W., A unified approach for the solution of the Fokker-Planck equation *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33 (27), 4935-4953, 2000.
33. Wei G.W., Wavelets generated by using discrete singular convolution kernels, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33 (47), 8577-8596, 2000.
34. Wei G.W., Yun G., Conjugate filter approach for solving Burgers' equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 149 (2), 439-456, 2002.
35. Wei G.W., Zhao Y.B., Xiang Y., Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports. Part 1: Theory and algorithm, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 55 (8), 913-946, 2002.
36. Wei G.W., Zhao Y.B., Xiang Y., A novel approach for the analysis of high-frequency vibrations, *J. Sound Vib.*, 257 (2), 207-246, 2002.
37. Wei G.W., Vibration analysis by discrete singular convolution, *J. Sound Vib.*, 244 (3), 535-553, 2001.
38. Wei G.W., Discrete singular convolution for beam analysis, *Eng. Struct.*, 23 (9), 1045-1053, 2001.
39. Wei G.W., Zhao Y.B., Xiang Y., The determination of natural frequencies of rectangular plates with mixed boundary conditions by discrete singular convolution, *Int. J. Mech. Sci.*, 43 (8), 1731-1746, 2001.
40. Zhao S., Wei G.W., Xiang Y., DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method, *J. Sound Vib.*, 284 (1), 487-493, 2005.
41. Civalek Ö., The determination of frequencies of laminated conical shells via the discrete singular convolution method, *J. Mech. Mater. Struct.*, 1 (1), 163-182, 2006.
42. Civalek Ö., Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method, *Appl. Math. Modell.*, 33 (10), 3825-3835, 2009.

43. Civalek Ö., Free vibration and buckling analysis of composite plates with straight-sided quadrilateral domain based on DSC approach, *Finite Elem. Anal. Des.*, 43 (13), 1013-1022, 2007.
44. Civalek Ö., Gürses M., Free vibration analysis of rotating cylindrical shells using discrete singular convolution technique, *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 86 (10), 677-683, 2009.
45. Çakır M.T., Improving the efficiency performance of heat pipes using Alumina containing nano-fluids, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 30 (4), 547-556, 2015.
46. Gökmeşe H., Bostan B., Microstructural characterization and synthesis by mechanochemical method of nano particle Al₂O₃/B₄C ceramic phase, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 29 (2), 289-297, 2014.
47. Çiloğlu D., Bölükbaşı A., Çifci H., Experimental investigation of pool boiling heat transfer in nanofluids around spherical surfaces, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 30 (3), 405-415, 2015.
48. Turgut A., Sağlanmak Ş., Doğanay S., Experimental investigation on thermal conductivity and viscosity of nanofluids: particle size effect, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 31 (1), 95-103, 2016.
49. Lin R.M., Nanoscale vibration characterization of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium, *Comput. Mater. Sci.*, 53 (1), 44-52, 2012.
50. Foroushani S.S., Azhari M., On the use of bubble complex finite strip method in the nonlocal buckling and vibration analysis of single-layered graphene sheets, *Int. J. Mech. Sci.*, 85, 168-178, 2014.