Osmangazi Üniversitesi Müh.Mim.Fak.Dergisi C.XV, S.1, 2002
Eng.&Arch.Fac.Osmangazi University, Vol.XV, No: 1, 2002

SU YÜZÜ PROFİLİNİN EULER METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜNDE GEREKLİ ADIM SAYISININ BELİRLENMESİ

Ender DEMİREL [1], Hasan TOZLUK [2]

ÖZET : *Tedrici değişken akımda su yüzü profilini veren bağıntı değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir. Ancak direkt olarak integrali alınamadığı için kesin çözümü yoktur. Bundan dolayı literatürde yaklaşık çözümleriyle ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada, kesin çözümü bilinmeyen problemlerin yaklaşık metotlarla çözülmesinde oluşan hata miktarının hesaplanması ve EULER metoduyla su yüzü profilinin çözümünde meydana gelen hatanın, önceden belirlenecek bir değeri aşmaması için gerekli en küçük adım sayısı araştırılmıştır.*

ANAHTAR KELİMELER : *Tedrici değişken akım, Su yüzü profili, EULER Metodu, Hata.*

DETERMINATION OF REQUIRED STEP NUMBER IN NUMERICAL SOLUTION OF WATER SURFACE PROFILE BY EULER'S METHOD

ABSTRACT: *The relationship for the water surface profile in gradually varied flow is a separable differential equation, which hasn't exact solution because it cannot be directly integrated. Therefore, a number of researches has been made for the approximate solutions of water surface profiles. In this work, the calculation of error came up from the solution of problems by approximate methods is studied, and the required minimum step number is calculated for the error resulting from the calculation of water surface profile by Euler's method, not to exceed a predetermined value.*

KEYWORDS: *Gradually varied flow, Water surface profile, EULER's Method, Error*

[1,2] *Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Batı Meşelik Kampüsü, 26480 Eskişehir*

I. GİRİŞ

Mühendislikte analitik çözümleri bulunamayan diferansiyel denklemlerin çözümü sayısal metotlarla yapılır. Hidrolikte, tedrici değişken akımın (TDA) su yüzü profili denkleminin analitik çözümü bulunmadığından yaklaşık yöntemlerle hesaplanması gerekir. Bu hesaplamada Euler, Runge-Kutta, Direk Adım, Standart Adım [1-2-3] vb. metotlar kullanılır. Bakhmeteff (1932) [4] TDA diferansiyel denklemini belirli kesit tipleri için integre etmiştir. Gill (1976) [5] sabit kesit değerleri için De Moivre teoremini kullanarak TDA diferansiyel denkleminin kesin çözümünü yapmıştır. Açık kanallarda genelleşmiş su yüzü profili için Molinas ve Yang (1985) [6] enerji ve momentum denklemlerine dayalı bir hesaplama modeli geliştirmişlerdir. Paine (1992) [7] TDA' ın enerji denklemini Newton-Raphson formunda yazmış, Dey (2000) [8] enerji denklemini Chebyshev tekniğini kullanarak çözmüş ve Newton-Raphson [9] tekniğinden daha hızlı olduğunu göstermiştir.

Özellikle analitik çözümü bilinmeyen problemlerde mühendis sayısal çözümle, kesin çözüme ne kadar yaklaştığını bilmek ister. Kesin sonuçlar bilinmediği için sayısal çözümlemede yapılan hata net bir şekilde ortaya konulamaz. Bu metotlarda yeterli doğrulukta hesap yapabilmek için gerekli adım sayısının, problemin çözümünden önce belirlenebilmesi avantaj olacaktır . Her bir metot için adım sayısı-hata ilişkisi farklıdır. Literatürde bazı sayısal metotlar için adım sayısı ile en büyük hata arasındaki ilişki araştırılmıştır. Euler Metodu için Collatz (1963) [10] bir hata ifadesi vermiştir. Bu ifade kullanılarak tedrici değişken akımın diferansiyel denkleminin *m* adımda yapılan sayısal çözümü ve kesin çözümü arasındaki fark yaklaşık olarak bulunabilir.

II. EULER METODU İÇİN BİR HATA İFADESİ

Euler Metodu ile yaklaşık çözümde oluşabilecek en büyük hatanın belirlenmesinde Collatz'ın [10] önerdiği bir yaklaşım kullanılmıştır. Bu yaklaşımda başlangıç değer problemi

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

olan bir, f(x,y) fonksiyonu

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

bölgesinde tanımlanmıştır. Şekil 1 de grafik olarak gösterilen G bölgesi içinde tanımlanmış $f(x, y)$ fonksiyonu için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

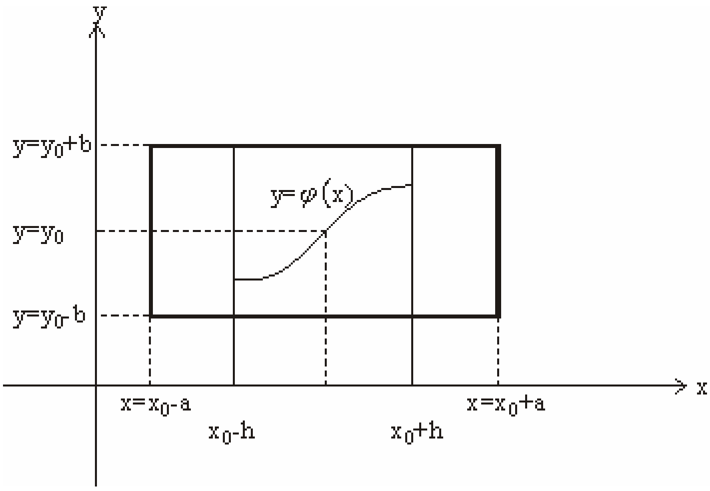
a) $f(x, y)$ fonksiyonu G dikdörtgen alanı içinde süreklidir.

$$M = \max_G |f(x,y)| \qquad ,\exists M > 0,\ \ |f(x,y)| \le M,\ \ (x,y) \in G$$

Yani bu bölgede kendinin en küçük ve en büyük değerlerini alır.

b) $f(x,y)$ fonksiyonu G dikdörtgeninde *y* değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar.

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N \qquad ,\exists N > 0,\quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \le N|y_2 - y_1|$$



Şekil 1. G bölgesinin grafik gösterilişi.

Yukarıdaki tanımlamalar ve kabuller sonucunda Euler Metodu ile kurulan *m* adım sayısı sonucu oluşacak en büyük hata şu şekilde verilmiştir.

$$|\varepsilon_m| \le \frac{HK(1+M)}{2Nm}\left(e^{NH} - 1\right) \quad , \quad N > 0$$

Burada H=hesaplamanın yapılacağı yatay x mesafesi, M=f(x,y) fonksiyonun G bölgesinde alabileceği en büyük değeri, N= Lipschitz katsayısı, m=adım sayısıdır. K ise

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq K, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K \tag{6}$$

olarak tanımlanmıştır.

III. EULER METODUNUN HATASI İÇİN BİR SAYISAL ÖRNEK

Kesin çözümü bilinen bir problemde, Euler metodu kullanılarak elde edilen sayısal çözüm sonuçlarından en büyük hata belirlenebilir. Sayısal örnek

$$y' = f(x, y) = \frac{xy}{2} \tag{7}$$

$$y(0) = 1 \tag{8}$$

olsun. Yukarıda verilen (7), (8) başlangıç değer

$$y = e^{\frac{x^2}{4}} \tag{9}$$

probleminin kesin çözümü

olur. Hazırlanan bilgisayar programıyla, bu problemin, [0,1] aralığında, m= 20 adım için kesin ve Euler Metoduyla sayısal çözüm sonuçları bulunarak, lokal hatalarla birlikte Tablo 1 de gösterilmiş olup, kesin çözümle sayısal çözüm arasında oluşan en büyük hata 0.0184 olarak bulunmuştur. Aynı örnekte, alınan adım sayısı ve aralık için oluşacak en büyük hatayı, (5) bağıntısını kullanarak Collatz yaklaşımıyla bulalım. f(x,y) fonksiyonu

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \le 1, |y - y_0| \le 1\}$$

bölgesinde tanımlanmış olsun. Böylece

$$H = |x_m - x_0| = 1$$

Tablo 1. Fonksiyon $y' = f(x, y) = \frac{xy}{2}$ için lokal hatalar

x	Kesin Çözüm	Sayısal Çözüm	Lokal hata
0.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.0500	1.0006	1.0000	0.0006
0.1000	1.0025	1.0013	0.0013
0.1500	1.0056	1.0038	0.0019
0.2000	1.0101	1.0075	0.0025
0.2500	1.0157	1.0126	0.0032
0.3000	1.0228	1.0189	0.0039
0.3500	1.0311	1.0265	0.0046
0.4000	1.0408	1.0355	0.0053
0.4500	1.0519	1.0459	0.0061
0.5000	1.0645	1.0576	0.0069
0.5500	1.0786	1.0708	0.0077
0.6000	1.0942	1.0856	0.0086
0.6500	1.1114	1.1019	0.0095
0.7000	1.1303	1.1198	0.0106
0.7500	1.1510	1.1394	0.0116
0.8000	1.1735	1.1607	0.0128
0.8500	1.1980	1.1839	0.0140
0.9000	1.2245	1.2091	0.0154
0.9500	1.2531	1.2363	0.0168
1.0000	1.2840	1.2657	0.0184

olur. Verilen fonksiyonun ilgili G bölgesinde alabileceği en büyük değer

$$M = \max_G |f(x,y)| = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Fonksiyonun Lipschitz katsayısı

$$\max_G \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N \Rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \le N$$

elde edilir. K değerini

$$\left.\begin{aligned} \max_G \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| &= \frac{1}{2} \le K \\ \max_G \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \frac{1}{2} \le K \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \le K$$

olarak belirledikten sonra Collatz yaklaşımıyla oluşacak en büyük hata

$$|\varepsilon_m| \le \frac{1\times\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2\times 20\times\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right) \qquad (10)$$

$$|\varepsilon_m| \le 0.024327 \qquad (11)$$

bulunur. (5) bağıntısıyla en büyük hatanın $|\varepsilon_m| \le 0.024327$ yi geçmeyeceği sonucuna varılır. Bu yaklaşımda, sayısal çözümle adım sayısına bağlı olarak yapılabilecek $|\varepsilon_m|$ en büyük hata değeri her zaman gerçek hatadan büyük olduğu için, seçilen bir $|\varepsilon_m|$ değerini sağlayacak *m* adım sayısıyla yapılacak yaklaşık çözümde gerçek hata her zaman $|\varepsilon_m|$ den daha küçük olacaktır.

IV. HATA İFADESİNİN TEDRİCİ DEĞİŞKEN AKIMIN DİFERANSİYEL DENKLEMİNE UYGULANMASI

Yukarıda verilen (5) hata ifadesinde görüldüğü gibi N>0 ek koşulu vardır. İlgili diferansiyel denklem için N>0 olması, $y' = f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine bağlı olmasını gerektirmektedir. Tedrici değişken akımın diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{J_0 - J}{1 + \alpha \frac{d}{dy}\left(\frac{V^2}{2g}\right)} \qquad (12)$$

y değişkenine bağlı olmasından dolayı Collatz yaklaşımıyla hata belirlenmesine uygun bir bağıntıdır. Gerçeğe yakın bir hata tahmin edebilmek için G bölgesinin iyi tanımlanması gerekmektedir. Örneğin, (12) bağıntısının küçük eğimli kanallarda

$$y > y_0 > y_C$$

yani M1 profili olarak tanımlanan bölgesinde, sayısal bir çözümleme için G bölgesi rahatlıkla tanımlanabilir. Su derinliği *y* nin alabileceği en büyük değer, akım mansap kontrollü olduğundan, mansaptaki hidrolik kontrol noktası olacaktır ve bu değer problemin çözümü için başlangıç değeridir. Su derinliği *y* nin alabileceği en küçük değer ise üniform su yüksekliği y_0 olacaktır. O halde G bölgesinin yüksekliği bu tarz bir yaklaşımla belirlenebilir. Yatay mesafe, H uygulamacı tarafından seçilerek bu aralık, M1 profilinin yeterli doğrulukta hesaplanması için gerekli adım sayısı bulunur.

V. BİR AÇIK KANAL ÖRNEĞİ

Dikdörtgen kesitli, 6 m taban genişliğine sahip ve 0.0036 taban eğimli bir kanaldan 11 m^3/s debi geçmektedir. Kanalın mansabında bir kontrol yapısı inşa edilmiştir ve mansabtaki su yüksekliği 5 m dir. Manning n pürüzlülük katsayısı 0.025 ve hız katsayısı α=1.10 alınarak su yüzü profili Euler Metodu ile 80 m lik bir kanal uzunluğunda hesaplanacaktır. Çalışmada önerilen yaklaşımla, hatanın, ε=0.01'i geçmemesi istendiğine göre gerekli en küçük adım sayısı ne olmalıdır?

Üniform derinlik y_0=0.9497 m, y_c=0.6997 m, y(0)=5 m olduğu için profil tipi M1. Böylece $G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq 80, |y - y_0| \leq 5\}$ belirledikten sonra dikdörtgen kesitli kanal için (12) ifadesi

$$y' = f(y) = \frac{J_0 - \dfrac{Q^2 n^2 (B+2y)^{4/3}}{(By)^{10/3}}}{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{gB^2 y^3}} \tag{13}$$

yazılabilir.

Denklem (13) için,

$$\mathrm{M} = \max_{\mathrm{G}} \left| \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \right| = 0.00357443 \tag{14}$$

hesaplanmıştır. Dikdörtgen kesitli bir kanal için elde edilen (13) bağıntısının y ye göre kısmi türevi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3\left(J_0 - \dfrac{n^2 Q^2 (B+2y)^{4/3}}{By^{10/3}}\right)\alpha Q^2}{gB^2 y^4 \left(1 - \dfrac{\alpha Q^2}{gB^2 y^3}\right)^2} - \frac{8n^2 Q^2 (B+2y)^{1/3}}{3By^{10/3}\left(1 - \dfrac{\alpha Q^2}{gB^2 y^3}\right)} \tag{15}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\max_G \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \le N \Rightarrow 0.000399661 \le N = K \tag{16}$$

olur. Örnek için tanımlanan G bölgesi için gerekli en küçük adım sayısı (5) bağıntısından

$$m \geq \frac{HK(1+M)}{2N|\varepsilon_m|}\left(e^{NH}-1\right) \tag{17}$$

elde edilir. (14) ve (16) ifadeleri denklem (17) de yerine konursa

$$m \geq \frac{80 \times 0.000399661 \times (1+0.00357443)}{2 \times 0.000399661 \times 0.01}\left(e^{0.000399661 \times 80}-1\right) \tag{18}$$

$$m \geq 130.018 \cong 131 \tag{19}$$

bulunur.

VI. SONUÇ

Çalışmada verilen ilk örnekteki diferansiyel denklemin kesin çözümü bilindiği için Euler Metodu ile yapılan sayısal çözüm ile kesin çözümün farkını alıp her bir adımdaki lokal hata hesaplanmıştır. Collatz tarafından verilen hata ifadesi aynı probleme uygulanmış ve oldukça hassas sonuç verdiği görülmüştür. Euler Metodu için verilen genelleşmiş hata ifadesinin tedrici değişken akımın denklemine uygulanabilirliği test edilmiş ve bir örnekte sayısal olarak sonuçlar alınmıştır. Metodun hızı (5) bağıntısından görüldüğü gibi, *1/m* değerine ve hesaplamanın yapılacağı yatay x mesafesi olan H değerine bağlıdır. Adım sayısı *m* değerini büyük veya H değerini küçük seçerek hata küçültülebilir. Verilen bir açık kanaldaki su yüzü profilinin Euler Metodu ile hesabında, lokal hataların belirli bir ε_{max} hatasını aşmaması için gerekli minimum adım sayısı (5) bağıntısı ile hesaplanabilir.

Su yüzü profilinin EULER Metodu ile belirlenmesinde, adım sayısını arttırmak suretiyle kesin çözüme yaklaşılabilir. Kesin çözümü bilinmeyen bir problem olmasından dolayı, adım sayısı arttırılarak kesin çözüme ne kadar yaklaşıldığı belirlenemediği için ya gerekenden fazla hesaplama yapılır ya da yeterli doğrulukta hesap yapılmamış olur. Bundan dolayı genelde problemin çözümünün yapıldığı bilgisayar programlarında adım sayısı hesaplayıcıya bırakılmaktadır. Uygulamacının, iteratif birkaç deneme yanılma yapması veya gereğinden fazla adım sayısı ile çalışıp gereksiz hesaplamalarla uğraşarak yeterli doğruluğa ulaştığına inanması gerekecektir. Yine de elle tutulur bir kriterle değerlendirememek ve her uygulamacıya göre değişecek adım sayısı ve çözümlemelerle karşılaşmak söz konusu olacaktır.

Anlamlı bir adım sayısı belirlemede yukarıda anlatılan açmaza düşmemek için kesin çözümle yaklaşık çözüm arasındaki en büyük hatanın boyutu belirlenerek, önerilen yöntemle adım sayısı bulunursa, hesaplamada yapılacak en büyük hata, belirlenmiş olan hata payından daha küçük olacaktır. Bu çalışmada önerilen en büyük hata payına bağlı adım sayısı belirlenmesi, tecrübesiz bir uygulamacı için bile, yeterli doğrulukta sayısal çözümleme yapma imkanını sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Chow , V. T., " *Open Channel Hydraulics*", McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1959.

[2] Henderson, F. M., "*Open Channel Flow"*, The Macmillan Co., New York, N.Y., 1966.

[3] Chaudhry, M. H., "*Open-Channel Flow*", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1993.

[4] Bakhmeteff, B. A., "*Hydraulics of Open Channels"*, McGraw-Hill, New York, 1932.

[5] Gill, M. A., "Exact solution of gradually varied flow". *ASCE J. Hydr. Div.*, 102(HY9), pp. 1353-1364, 1976.

[6] Molinas, A. & Yang, C.T., "Generalized water surface profile computations". *J. Hydr. Engrg. ASCE,* 111(3), pp. 381-397,1985.

[7] Paine, J. N., "Open-channel flow algorithm in Newton-Raphson form". *J. Irrig. And Drain. Engrg., ASCE*, 118(2), pp. 360-319, 1992.

[8] Dey, S., "Chebyshev solution as aid computing GVF by standart step method". *J. Irrig. And Drain. Engrg., ASCE*, 126(4), pp. 271-274, 2000.

[9] Cheney, E. W., Kincaid, D. R., "*Numerical Mathematics and Computing*", Wadsworth, Inc., Belmont, Calif, 1985.

[10] Collatz, L., " *The Numerical Treatment of Differential Equations*", Springer-Verlag: Berlin and New York, pp. 57-61, 1966.

NOTASYON

B = prizmatik kanalın taban genişliği;
α = hız dağılım katsayısı;
g = yerçekimi ivmesi;
n = Manning pürüzlülük katsayısı;
Q = debi;
J = enerji çizgisi eğimi;
J_0 = kanal taban eğimi;
V = ortalama akım hızı;
x = yatay pozisyon;
y = akım derinliği;
y_c = kritik derinlik;
y_0 = uniform derinlik;
m = adım sayısı;
N = Liptchitz katsayısı;
x_0 = x in başlangıç değeri;
H = profil uzunluğu, $H=|x_m-x_0|$;
N_1=matematiksel koşul, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}+f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N_1$;
$M=\max_G |f(x,y)|$
ε_m = m. adımda yapılan hata