Cilt: 23, Sayı: 3, Yıl: 2023
e-ISSN: 2667-8583

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

AÜSBD
Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Anadolu University Journal of Social Sciences

Kıt Kaynakların Paylaştırılması: Talepler Problemi Literatürü Üzerine Bir İnceleme [1]

Orhan AYGÜN[2] - Sinan ERTEMEL [3] - Burak DOĞAN [4]

Başvuru Tarihi: 29.06.2023 **Kabul Tarihi:** 15.09.2023 **Makale Türü:** Araştırma Makalesi

Öz

Bu makale, literatürde "talepler problemi" olarak bilinen, hak sahiplerinin taleplerini karşılamada yetersiz bir kaynağın, kaynak üzerindeki mülkiyet iddiaları gözetilerek paylaştırılması modelini inceler. Bu modelin miras dağıtımından tayınlamaya, iflas eden şirketin mallarının alacaklılara tahsisinden vergilendirmeye kadar birçok farklı uygulaması bulunur. Makalede, aksiyomatik bir yaklaşım benimsenerek talepler problemine çözüm sunan dağıtım kurallarının matematiksel aksiyom olarak ifade edilen özellikleri irdelenir. Ayrıca, literatürde öne çıkan orantılı kural ve eşitlikçi kurallar gibi dağıtım kuralları aksiyomatik karakterizasyonları ile incelenir. Son olarak, bu çalışma, yetersiz kaynağın, kaynak üzerinde birbiriyle çelişen iddiaları bulunan talep sahipleri arasında adil ve hakça dağıtılması konusunda kapsamlı bir çerçeve sunar.

Anahtar Kelimeler: *Talepler Problemi, Tayınlama, İflas Problemi, Miras, Vergilendirme, Adil Dağıtım*

Atıf: Aygün, O., Ertemel, S. ve Doğan, B. (2023). Kıt kaynakların paylaştırılması: Talepler problemi literatürü üzerine bir inceleme. *Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 23*(3), 989-1004.

[1] Bu çalışma etik kurul izin belgesi gerektirmemektedir.
[2] Boğaziçi Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İktisat Bölümü, **orhan.aygun@boun.edu.tr**, ORCID: 0000-0003-0132-3429
[3] İstanbul Teknik Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Ekonomi Bölümü, **ertemels@itu.edu.tr,** ORCID: 0000-0003-0089-4641
[4] Bahçeşehir Üniversitesi, İktisadi, İdari ve Sosyal Bilimler Fakültesi, Ekonomi Bölümü, **burak.dogan@eas.bau.edu.tr,** ORCID: 0000-0002-9585-3318

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
Cilt: 23, Sayı: 3, Yıl: 2023
e-ISSN: 2667-8583
AÜSBD
Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Anadolu University Journal of Social Sciences

Allocating Scarce Resources: A Survey of Claims Problems

Orhan AYGÜN [5] - **Sinan ERTEMEL** [6] - **Burak DOĞAN** [7]

Submitted by: 29.06.2023 **Accepted by:** 15.09.2023 **Article Type:** Research Article

Abstract

This paper studies the allocation of a scarce resource among competing claimants, which is commonly known as the "claims problem". This model has numerous practical applications ranging from estate division to rationing, bankruptcy, and even basic taxation problems. An axiomatic approach is used to examine the properties of division rules that are expressed as mathematical axioms. The paper provides an analysis of prominent division rules, such as the proportional and egalitarian rules, along with their axiomatic characterizations. Ultimately, the paper presents a comprehensive framework for achieving a fair and equitable allocation of limited resources among competing claimants.

Keywords: *Claims Problem, Rationing, Bankruptcy, Inheritance, Taxation, Division Rules*

[5] Boğaziçi University, Faculty of Economics and Administrative Sciences, Department of Economics, **orhan.aygun@boun.edu.tr**, ORCID: 0000-0003-0132-3429
[6] İstanbul Technical University, Faculty of Management, Department of Economics, **ertemels@itu.edu.tr,** ORCID: 0000-0003-0089-4641
[7] Bahçeşehir University, Faculty of Economics, Administrative, and Social Sciences, Department of Economics, **burak.dogan@eas.bau.edu.tr,** ORCID: 0000-0002-9585-3318

Giriş

Bir kaynağı, kaynak üzerindeki taleplerin toplamının kaynaktan daha büyük olduğu durumlarda hak sahiplerine dağıtmanın en iyi yolu nedir? Yetersiz kaynağın hak sahiplerine dağıtımı talepler problemi (İng. claims problem) olarak bilinir. Problemin çözümü için kaynağın nasıl dağıtılması gerektiğini gösteren dağıtım kuralları kullanılır.

Ele aldığımız modelin gündelik hayata ilişkin birçok uygulaması bulunur. Başlıca uygulamalardan biri miras paylaşımıdır. Bir kişi öldükten sonra geriye kalan mirası borçlarını karşılamaya yetecek düzeyde değilse, murisin terekesinin alacaklılar arasında nasıl dağıtılacağına karar verilmesi gerekir. Miras uyuşmazlıkları, literatürde, tayınlamaya (İng. rationing) ilişkin Rabinovitch (1973, s. 162) tarafından Babil Talmud'undan alınan meselelerle kayda alınan ilk örneklerdir. Başka bir uygulama olan iflas probleminde, ele aldığı üzere iflas ederek tasfiye edilen bir şirketin borçlarını karşılamaya yetmeyen varlıkları alacaklılar arasında paylaştırılır.

Modelin bir başka uygulaması, bir tür tayınlama problemi olan bir şirketin yetersiz miktardaki ürününü, ürünün siparişini veren müşteriler arasında paylaştırılması mevzuudur. Bu tayınlama problemi; kıt kaynağın yiyecek, temiz su, sağlık malzemeleri ya da farklı ülke ve bölgeler arasında paylaştırılacak küresel karbon bütçesi olarak tanımlanarak daha büyük ölçeklere de uyarlanmaktadır. Benzer şekilde, uluslararası yardım kuruluşları yoksul bölgelere yardım dağıtırken kıt kaynakların tahsis edilmesi sorunuyla karşı karşıya kalır.

Modelimiz, basit vergilendirme problemleri formel olarak tanımlanırken de kullanılır. Bu durumlarda, iddia sahiplerinin yerini gelirleri toplamı bahsi geçen projenin maliyetini aşan vergi mükellefleri yer alır. Burada sorulması gereken ise Young (1988, 1990) tarafından ele alındığı üzere her bir mükellefin toplam maliyete katkı vermesinin adil ve hakça nasıl sağlanabileceğidir.

Daha genel anlamda, bu model, hak sahiplerinin taleplerini tamamen karşılamakta yetersiz bir kaynağın hak sahipleri arasında paylaştırılması gerektiğinde kullanılabilir.

Bu makalede, aksiyomatik yaklaşım benimsenmiştir. Öncelikle, matematiksel "aksiyomlar" olarak ifade edilen kural özelliklerini inceleyeceğiz. Bu aksiyomlar, bir kuralın farklı durumlarda nasıl işlemesi gerektiği bilgisini ihtiva eder. Aksiyomatik bir çalışma tipik olarak küçük bir aksiyom kümesi üzerinde yoğunlaşır, aksiyomların mantıksal bağlantılarını inceler ve bu aksiyomları farklı kombinasyonlarda uygulamanın sonuçlarını araştırır. Aksiyomatik yaklaşım aracılığıyla elde edilen sonuçlar ikiye ayrılabilir. İlk durumda, belirli aksiyomların birbiriyle uyumsuz olduğu bulunur ve bu durum bir imkânsızlık teoremini ortaya çıkarır. İkinci durumda, bir aksiyom listesi uyumlu bulunabilir ve onları karşılayan kurallar familyası, kuralın aksiyomatik karakterizasyonu olarak adlandırılır. Aksiyomatik yaklaşımın ana hedefi, uyumlu ve uyumsuz aksiyomlar listesi arasındaki sınırları belirlemek ve uyumlu aksiyomların tümünü karşılayan kuralları veya kural ailelerini elde etmektir.[8]

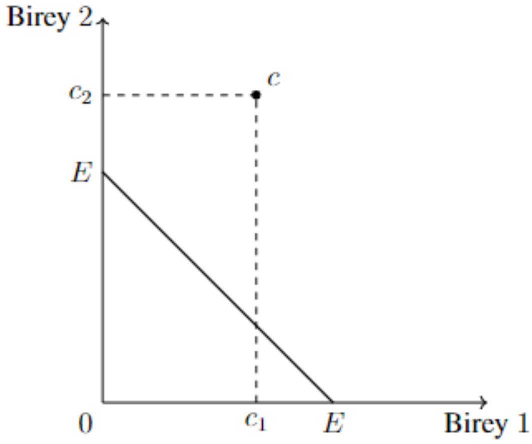
Çalışma şu şekilde organize edilmiştir: İkinci bölümde talepler problemi için önbilgileri sunuyoruz. Üçüncü bölümde, literatürden çeşitli, iyi bilinen dağıtım kurallarını tartışıyoruz. Ardından, dördüncü bölümde, verimlilik, adalet, monotonluk ve değişmezlik gibi önemli özellikleri yansıtan standart aksiyomları tanıtıyor ve üçüncü bölümde tartışılan dağıtım kuralları için aksiyomatik karakterizasyonlar sağlıyoruz. Son olarak, beşinci bölümde sonuçları özetliyoruz.

[8] Dağıtım kurallarının aksiyomatik karakterizasyonunu daha derinlemesine araştırmakla ilgilenen okuyucular için Moulin (2002) ve Thomson (2019) tarafından hazırlanan incelemeleri öneriyoruz.

Önbilgiler

Sınırsız bölünebilen kaynak $E \in R_+$; N grubunu oluşturan, kaynak üzerinde $c_i \in R_+$ büyüklüğünde talebi bulunan $i \in N$ bireyleri arasında paylaştırılacaktır. $c = (c_i)_{i \in N}$ vektörü bireylerin taleplerini göstermektedir. Burada, N'nin sonlu olduğu ve $\{1, 2, \ldots, n\}$ şeklinde ifade edilen doğal sayılar kümesinin alt kümesi olduğu varsayılmıştır.

Bir problemi "talepler problemi" olarak tanımlayabilmek için, bireylerin talepleri toplamının kaynağın mevcut değerinden fazla olması, yani $\sum_{i \in N} c_i \geq E$, gereklidir. Bu durumda, $(c, E) \in R_+^N \times R_+$ çifti "talepler problemi" olarak anılır. Eğer C^N kümesinin dikkate alınan tüm problemleri içerdiği düşünülürse, talepleri arasında $c_1 < c_2$ ilişkisi bulunan iki bireyin olduğu talepler problemi, Şekil 1'de gösterilmiştir.

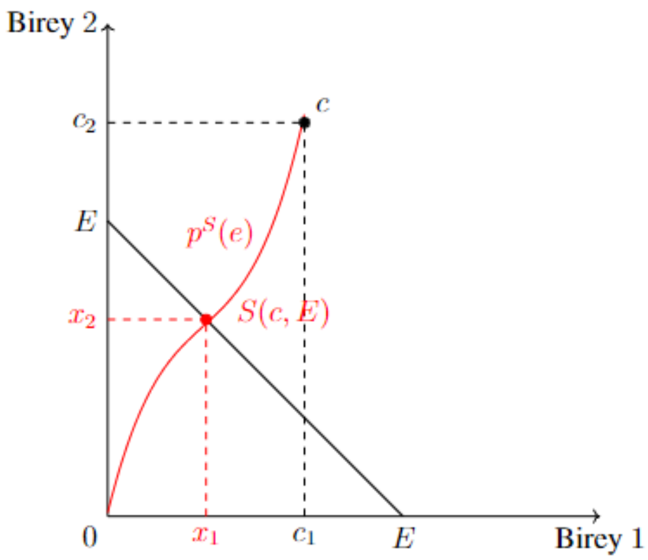


Şekil 1. $|N| = 2$ için Talepler Problemi ($c_1 < c_2$ olmak üzere).

Amaç, hak sahiplerine, talepleri gözetilerek ve toplamın kaynağa eşit olacak şekilde "ödül" (İng. award) dağıtmaktır. Hak sahiplerine, negatif olmayan ve taleplerinden büyük olmayan bir ödül verildiği varsayılır.

Formel olarak her (c, E) problemi için, talepte bulunan hak sahipleri, $0 \leq x \leq c$ olacak şekilde[9] ve ödül dağıtımı dengeli, yani, $\sum_{i \in N} x_i = E$ olacak şekilde bir $x \in R_+^N$ vektörü ile ödüllendirilir. Dolayısıyla, bir (c, E) probleminin ödül vektörü $X(c, E)$ ile gösterilir. Bir dağıtım kuralı, her (c, E) problemine bir ödül vektörü atayan bir fonksiyon olarak temsil edilir ve S ile gösterilir. Bir problemde, iki bireyin olduğu durumda, $S(c, E)$ dağıtım kuralı için $e \in [0, \sum_{i \in N} c_i]$ olan $p^S(e)$ ile ifade edilen ödüller patikası (İng. path of awards) aracılığıyla Şekil 2'de gösterilebilir.

[9] Vektör eşitsizliklerinde, $x > y$ yazdığımızda, bu, x'in her bir koordinatının y'nin ilgili koordinatından kesinlikle daha büyük olduğu ve x ile y'nin eşit olamayacağı anlamına gelir. Diğer taraftan, $x \geq y$ yazdığımızda, bu, x 'in her bir koordinatının y'nin ilgili koordinatına eşit veya ondan daha büyük olduğu ve x ile y'nin eşit olabileceği anlamına gelir.



Şekil 2. $|N| = 2$ ve $c_1 < c_2$ olmak üzere; $e \in [0, c_1 + c_2]$ olmak üzere $S(c, e)$ Dağıtım Kuralı için $p^S(e)$ seklinde gösterilen Ödüller Patikası

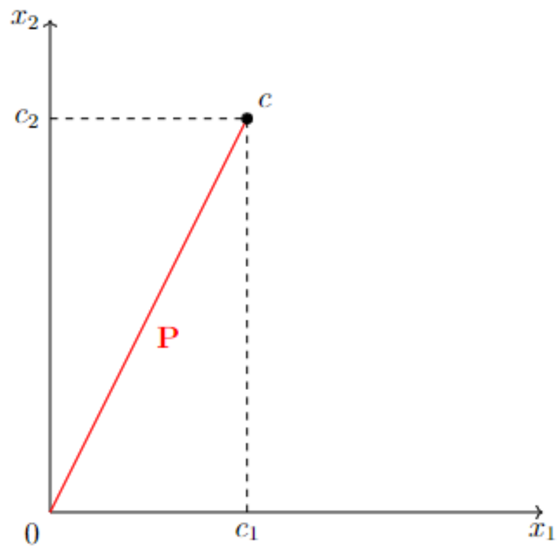
Literatür Taraması

Bu bölümde, literatürde en öne çıkan dağıtım kuralları gösterilecektir. Bu kuralların aksiyomatik karakterizasyonları dördüncü bölümde ele alınacaktır.

Orantısallık, tarihin kayıt düştüğü üzere, uzun zamandır basit dağıtım problemlerinin çözümünde kullanılan başlıca yöntem olmuştur. Bu kural ile adı sıkça anılan Aristoteles, orantısallığı dağıtıcı adaletin karşılığı olarak tanımlamıştır: “Adil bir eylemde mutlaka dört unsur bulunur: haklarında adaletin tecelli edeceği iki taraf ve adaletin üzerinden sağlanacağı iki pay. Kişiler arasındaki eşitliğin aynı oranda paylar arasında da gözetilmesinin sağlanması ...” Bu bağlamda, adil olan orantılı olan iken adaletsiz olan orantılılığı ihlal edendir.

Buna göre, talepler problemi bağlamında Orantılı (İng. proportional) Kural, hak sahiplerinin mevcut kaynaktan talepleri doğrultusunda pay almalarını sağlar. Orantılı Kural; Aristoteles'in eşitler birbirine eşit, eşit olmayanlar birbirine eşit olmayacak şekilde muamele görmelidir düsturuna göre kaynakların taleplerin büyüklükleriyle orantılı olacak şekilde dağıtımını sağlar. Böylece, orantılı kural her bireyin sağladığı katkı oranında pay alması yoluyla adaletin tesisini temin eder.

Orantılı (P) Kural: Her $(c, E) \in C^N$ için ve $\lambda = \frac{c}{\sum_{i \in N} c_i}$ olmak üzere $P(c, E) = \lambda E$.



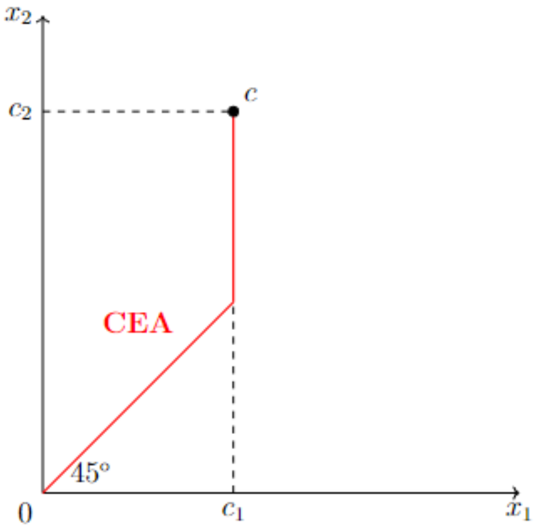
Şekil 3. Orantılı Kural için Ödüller Patikası ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

Orantılı Kural bir eşit dağıtım yöntemi olarak görülebilir. Özellikle birbiriyle çelişen iddiaların bulunduğu uyuşmazlıklarda, orantılı dağıtım, birimleri kimin talep ettiğinden ve birimlerin kimlere dağıtıldığından bağımsız olarak talep edilen tüm birimlerin eşitliğini gözetir. Böylece, her talep eden kendisi için ayrılan birimler karşılığınca ödüllendirilir.

Talep edilen birim esasına dayanan eşit dağıtım anlayışından mutlak anlamda eşitliği sağlayan kurallara geçiyoruz. Sıradaki kural, sınırlandırılmış eşit kazanımlar (İng. constrained equal awards) kuralı, hak sahiplerinin talep ettiklerinden fazlasını almamaları koşuluyla kaynaktan eşit olarak istifade etmelerini temin eder. İbn Meymun'un (Maimonides) da içinde bulunduğu birçok ortaçağ düşünürü bu kuralı savunmuştur.

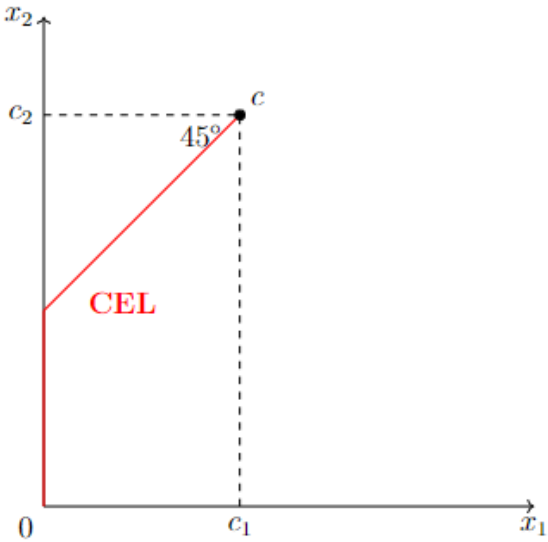
Sınırlandırılmış Eşit Kazanımlar (CEA) Kuralı: Her $(c, E) \in C^N$ için ve $\lambda \in R_+$ olmak üzere, ve $\sum_{i \in N} min\{c_i, \lambda\} = E$ eşitliği sağlanmak üzere $CEA(c, E) = (min\{c_i, \lambda\})_{i \in N}$

Sıradaki kural mutlak eşitlikçi yaklaşımı gereği sınırlandırılmış eşit kazanımlar kuralı ile benzerlikler gösterir. Ancak sınırlandırılmış eşit kazanımlar kuralı ödüllerin eşit olmasını öncelerken sınırlandırılmış eşit kayıplar (İng. constrained equal losses) kuralında, talepte bulunanların maruz bırakıldıkları kayıpların eşitliği dikkate alınır. Bu kural hak sahiplerinin talepleriyle kendilerine dağıtılan ödüller arasındaki “kaybın” olabildiğince eşit olmasını hiç kimsenin “negatif” ödül almaması koşuluyla sağlar. Bu kurala da İbn Meymun'un yazılarında rastlanmıştır.



Şekil 4. CEA Kuralı için Ödüller Patikası ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

Sınırlandırılmış Eşit Kayıplar (CEL) Kuralı: Her $(c, E) \in C^N$ için ve $\lambda \in R_+$ olmak üzere, ve $\sum_{i \in N} max\{c_i - \lambda, 0\} = E$ eşitliği sağlanmak üzere $CEL(c, E) = (max\{c_i - \lambda, 0\})_{i \in N}$.



Şekil 5. CEL Kuralı için Ödüller Patikası ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

CEA ve CEL Kuralları sırasıyla hak sahiplerinin aldıkları ödülleri x_i ve maruz kaldıkları kayıpları $(c_i - x_i)$ dağıtım kuralındaki kısıta aykırı davranmadan eşitlemeyi hedefler. $CEA(c, E)$'nin sağladığı benzersiz çözüm; leksikografi gereği x_i'deki en küçük koordinata karşılık gelen ödülü maksimize eden, daha sonra en küçük ikinci koordinata karşılık gelen ödülü maksimize eden, ve bu şekilde ödül maksimizasyonuna devam eden çözüm olarak ifade edilebilir.[10] Böylelikle, $CEL(c, E)$'in kayıplar vektörü $(c_i - x_i)$'ye uygulanan "leksimin" sıralamasının yegane maksimize edeni olduğu söylenebilir.

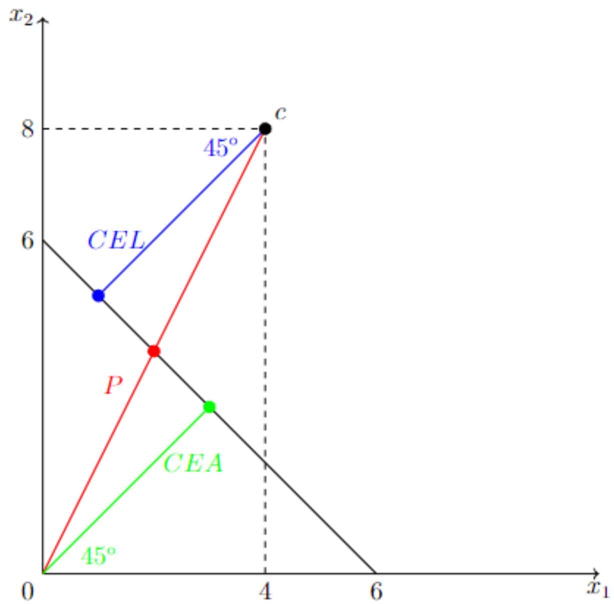
[10] Leksikografik sıralamayı formel olarak tanımlamak gerekirse; $x, y \in R^n$ kabul edelim. x, y koordinatlarının artan sırayla yeniden düzenlenmesiyle $x^*, y^* \in R^n$ elde edilsin. Eğer $x^* = y^*$ ise, x ve y'nin leksimin sıralamasına göre birbirine denk olduğunu söyleriz. Eğer $i = 1,2, \dots, m$ için $x_i^* = y_i^*$ ise ve $m = 0,1, \dots, n-1$ tam sayısı için $x_{m+1}^* > y_{m+1}^*$ ise leksimin sıralamasına göre x'in y'ye göre tercih edileceğini söyleriz.

Örnek: Yukarıda bahsi geçen üç temel kuralı daha iyi izah etmek adına bir örneğe başvuralım. İflas ederek sona erip geriye sadece $E = 6$ değerinde varlığı kalmış bir şirketin olduğu bir iflas problemini düşünelim. 1 sayılı hak sahibinin $c_1 = 4$ büyüklüğünde ve 2 sayılı hak sahibinin $c_2 = 8$ büyüklüğünde talepleri olduğunu varsayalım. Orantılı kurala göre toplam varlık taleplerin büyüklüğü oranında hak sahiplerine dağıtılır, bu da her bir hak sahibinin talebinin yarısı kadarını ödül olarak alması anlamına gelir. Bu durumda, 1. hak sahibi $x_1 = 2$ ve 2. hak sahibi $x_2 = 4$ alacaktır. Öte yandan, CEA Kuralı gereği, hiçbir hak sahibinin talebinden fazlasını almaması koşuluyla hak sahiplerinin aldıkları ödüller eşitlenecektir. Bu durumda, hak sahipleri $x_1 = x_2 = 3$ alacaktır. Son olarak, CEL Kuralı gereği, hak sahipleri hiçbir hak sahibinin negatif ödül almaması koşuluyla eşit kayba maruz bırakılacaklardır. Bu durumda, 1 sayılı hak sahibi $x_1 = 1$ ve 2 sayılı hak sahibi $x_2 = 5$ alacaktır.

Şekil 6'da yukarıdaki örneğe göre belirlenen P, CEA ve CEL kuralları için ödüller patikaları verilmiştir.

Genellikle çekişmeli kumaş (İng. contested garment) problemi olarak adlandırılan uyuşmazlığın kaynağı, iki kişinin, bir kumaş parçası üzerinde birbiriyle çelişen mülkiyet iddiasında bulunmasıdır. Uyuşmazlığın esası mülkiyet iddiaları ışığında kumaşın, değeri de gözetilerek iki kişi arasında adil bir şekilde nasıl paylaştırılacağıdır. Talmud'da uyuşmazlık ve çözümü şu şekilde yer bulmuştur: “İki kişi bir kumaşı tutar... Eğer biri, “hepsi benim” der ve diğeri “yarısı benim” derse, ... ilki üç çeyrek alır ve ikincisi bir çeyrek alır.”[11]

Kuralı formel olarak tanımlamak gerekirse, iki talep sahibinin bulunduğu bir durumda, taleplerin sırasıyla c_1 ve c_2 olduğunu varsayalım. Kuralın temel gerekçesi, talep sahiplerinden birinin belirli bir miktarda talepte bulunması durumunda talepte bulunmadığı kısımdan vazgeçtiği, bu kısmı diğer talep sahibine bıraktığı kabulüdür. Eğer talep sahiplerinden birinin talebinin büyüklüğü kaynağın değerinden küçükse kaynağın değeri ile talebin büyüklüğü arasındaki fark diğer talep edene terk edilir. Aksi halde, ilgili talep sahibinin talebinin büyüklüğü kaynağın değerinden büyük ya da eşitse ilgili talep sahibinin kaynağın herhangi bir kısmından feragat etmediği anlaşılır. Son olarak, feragat edilen kaynak kısımlarının toplamı kaynağın değerinden küçükse aradaki fark talep edenlere eşit bir şekilde paylaştırılır.



Şekil 6. P, CEA ve CEL kuralları için $E = 6$, $c_1 = 4$, $c_2 = 8$ olmak üzere Ödüller Patikaları

[11] bkz. Baba Metzia, Babil Talmudu I. Talmud'un ilgili bölümlerine atıfta bulunan ikincil literatür için O’Neill (1982), Aumann ve Maschler (1985) ve Dagan (1996) eserlerine başvurulmuştur.

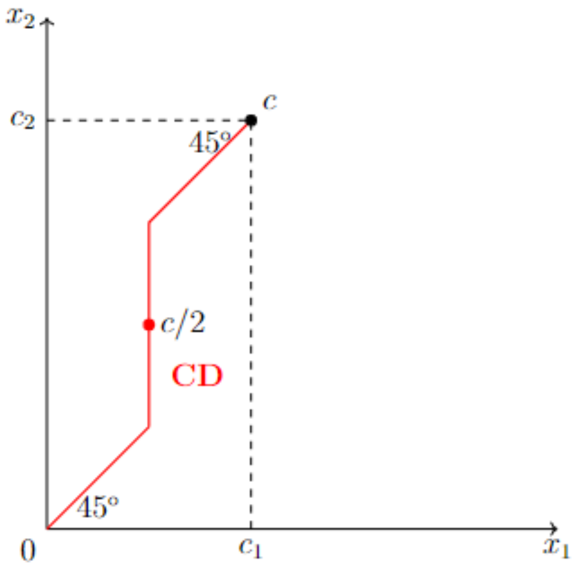
Özet olarak, Vazgeç-ve-böl (İng. concede-and-divide) adı verilen kuralın ilk uygulama adımında her bir talep edene diğer talep eden tarafından kaynak üzerinde iddia edilmemiş, vazgeçilmiş kısım ödül olarak verilir. İkinci uygulama adımında, kaynağın kalan kısmı talep edenlere eşit olarak dağıtılır.

Vazgeç-ve-böl (CD) Kuralı: $|N| = 2$ olmak üzere, her $(c, E) \in C^N$ *için*

$$CD_1(c,E) = max(E - c_2, 0) + \frac{E - max(E - c_2, 0) - max(E - c_1, 0)}{2}$$

$$CD_2(c,E) = max(E - c_1, 0) + \frac{E - max(E - c_1, 0) - max(E - c_2, 0)}{2}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 7. CD Kuralı için Ödüller Patikası ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

Sıradaki kural olarak, CD Kuralının ikiden daha fazla sayıda talep edenin olduğu durumlar için bir nevi genellemesi niteliğinde olan kuralı tanıtacağız. Aumann ve Maschler (1985, s. 211) Talmud Kuralını, Talmud'taki ilgili uyuşmazlıklara çözüm sunan kuralları üçten fazla kişi olduğu durumlara uyarlayarak tanımlamıştır. Her ne kadar aslen Talmud böyle durumlar için çözüm sunmasa da yazarlar kuralın gerekçesini ortaya çıkarmıştır. Yazarlar, ayrıca, kuralın Talmud'ta geçen çekişmeli kumaş problemine ve üç eş (İng. three wives) problemine sundukları çözümlerin Talmud'ta verilen çözümlerle aynı olduğunu da göstermiştir.[12] Talmud Kuralını formel olarak tanımlamak gerekirse; kural, taleplerin toplamının yarısının kaynağa eşit veya kaynaktan daha büyük olduğu hallerde CEA Kuralını uygulamakta diğer durumlarda ise CEL kuralını uygulamaktadır.

Talmud (T) Kuralı: Her $(c, E) \in C^N$ ve $i \in N$ için $\lambda \in R_+$ ve $\sum_{i \in N} T_i(c, E) = E$ olmak üzere:

$$T_i(c,E) = \begin{cases} min\left\{\frac{c_i}{2}, \lambda\right\} \; eğer \; E \leq \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \; ise \\ c_i - min\left\{\frac{c_i}{2}, \lambda\right\} \; eğer \; E > \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \; ise \end{cases}$$

[12] Haham Nathan tarafından Kethubot 93a'da aktarıldığı üzere: Eğer üç karısı olan bir erkek ölür ve birinci eşin ketubasının bir maneh (100 zuz), ikincinin iki yüz zuz ve üçüncünün üç yüz zuz olduğu ve mirasın (değerinin) sadece bir maneh (yüz zuz) olduğu anlaşılırsa, miras eşlere eşit olarak pay edilir. Eğer mirasın (değerinin) iki yüz zuz olduğu anlaşılırsa, (bir maneh (yüz zuz) talep eden) elli zuz alır (ve sırasıyla iki yüz ve üç yüz zuz talep edenlerin her biri üç altın denari (yetmiş beş zuz) alır. Eğer mirasın (değerinin) üç yüz zuz olduğu ortaya çıkarsa, bir maneh talep eden elli zuz ve iki yüz zuz talep eden bir maneh (yüz zuz) alırken, üç yüz zuz talep eden altı altın denari (yüz elli zuz) alır. Benzer şekilde, eğer üç kişi ortak bir fona katkıda bulundularsa ve zarar veya kararları olduysa, fondan kalanı aynı şekilde paylaşırlar.

Literatürde; Ters Talmud Kuralı (İng. Reverse Talmud Rule), Piniles Kuralı, (İng. Piniles' Rule), Rassal Varış Kuralı (İng. Random Arrival Rule), TAL-Familyası Kuralları (İng. TAL-Family Rules), Ters TAL-Familyası Kuralları (İng. Reverse TAL-Family Rules), Sıralı Öncelik Kuralları (İng. Sequential Priority Rules) gibi başka birçok dağıtım kuralı bulunmaktadır. Bu kuralların kapsamlı bir listesi ve aksiyomatik karakterizasyonları için Thomson'un (2019) çalışmasına başvurulabilir.

Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde bir önceki bölümde tanıtılmış kuralların aksiyomatik karakterizasyonuna yer verilmiştir. Ele alacağımız ilk aksiyom seti, beraber bir kuralı tanımlayan aksiyomlar olan negatif olmama (İng. non-negativity), denge (İng. balance) ve taleple sınırlılıktan (İng. claim boundedness) oluşmaktadır.

İlk aksiyom, problemlerde kaynağın tamamının tahsis edilmesini temin eder.

Denge: Her $(c,E) \in C^N$ olmak üzere, $\sum_{i \in N} S_i(c,E) = E$

Sıradaki aksiyom talep sahiplerinin negatif değerli ödül almamasını sağlar.

Negatif Olmama: Her $(c,E) \in C^N$ olmak üzere, her $i \in N$ için $S_i(c,E) \geq 0$

Sıradaki aksiyom hiçbir talep edenin talebinden fazlasını alamayacağı şekilde bir üst sınır belirler.

Taleple Sınırlılık: Her $(c,E) \in C^N$ olmak üzere, her $i \in N$ için $S_i(c,E) \leq c_i$

Yukarıda verilen her üç aksiyom da karakterizasyonlarda başlıca başvuru kaynağıdır ve talepler problemi bağlamında iflas ve miras uyuşmazlıkları gibi uyuşmazlıklarla oldukça uyumludur.

Bu bölümde tartışılan aksiyomlar, adil paylaşım teorisindeki temel bir nosyonla ilgilidir. Bu, benzer özelliklere sahip bireylerin eşit şekilde muamele görmesi gerektiği hususudur. Ancak, bireyler modelde hesaba katılmayan boyutlarda farklılaşırsa, eşitsiz muamele gereği ortaya çıkabilir. 3. Bölümde tanımlanan tüm kuralların bu aksiyomu sağladığını unutmayalım.

Eşitlere Eşit Muamele (İng. Equal Treatment of Equals): Her $(c,E) \in C^N$olmak üzere, her $\{i,j\} \subseteq N$ için, eğer $c_i = c_j$ ise $S_i(c,E) = S_j(c,E)$

Sıradaki aksiyom talep edenlerin ödülleri için bir alt sınır belirler. Bu alt sınır, kaynaktan taleplerin toplamı çıkarılarak belirlenir. Eğer bu fark negatif olarak bulunursa bulunan değer yerine 0 (sıfır) dikkate alınır. Formel olarak göstermek gerekirse, $m_i(c,E) = max\{E - \sum_{j \neq i} c_j, 0\}$, i sayılı bireyin asgari hakkını temsil eder. Aksiyom gereği, her talep edenin ödül olarak asgari hak olarak tanımlanan payı alması sağlanır.[13]

Asgari Hakların Alt Sınırı (İng. The Minimal Rights Lower Bounds): Her $(c,E) \in C^N$ olmak üzere, her $i \in N$ için $S_i(c,E) \geq m_i(c,E)$

Sıradaki aksiyomu sağlayan bir kurala göre ödül vektörü doğrudan ya da iki aşamalı olarak hesaplanabilir. Aksiyomu sağlayan kural gereği, ilk adımda, talep edenlere asgari hakları dağıtılır. İkinci adımda, kural gereği

[13] Asgari hakların alt sınırı aksiyomu bir kural tanımının ayrılmaz parçaları olan denge, negatif olmama ve taleple sınırlılık aksiyomlarını sağlayan tüm kurallar tarafından sağlanır.

dağıtım kaynakta kalan meblağ ve taleplerden asgari haklar çıkarılarak taleplerin revize edilmesi üzerinden hesaplanarak dağıtılır.

Asgari Hakların Önceliği (İng. Minimal Rights First): Her $(c, E) \in C^N$ olmak üzere, $S(c, E) = m(c, E) + S(c - m(c, E), E - \sum_{i \in N} m_i(c, E),)$.

Sıradaki aksiyom, kaynağa ilişkin taleplerin kaynaktan fazla olan kısmının gözardı edilerek taleplerin kaynak kadar olan miktarlarının dikkate alınmasını temin eden bir istikrar aksiyomudur. Formel olarak ifade etmek gerekirse, $(c, E) \in C^N$ için birey i'nin tenzil edilmiş talebini $t_i(c, E) = min(c_i, E)$ şeklinde belirtelim.[14]

Talepleri Tenzilde İstikrar: Her $(c, E) \in C^N$ için $S(c, E) = S(t(c, E), E)$

Kaynakta yapılan değişikliklerle ilgili iki istikrar aksiyomu daha tanıtacağız. Bunlardan ilki, kaynağın azaldığı durumlarla ilgili "aşağı yönlü bütünlük" (İng. composition down) aksiyomudur. Bahsi geçen durumlarda, kaynağın tahsisi için iki ayrı yaklaşım benimsenebilir: başta yapılan dağıtım iptal edilerek dağıtım kuralı gereği tahsisi baştan, tahsisi revize etmeden yapmak ya da başta yapılan dağıtımı bozmadan dağıtım kuralı gereği tahsisi revize etmek. Aşağı yönlü bütünlük aksiyomu gereği her iki yaklaşım da aynı sonucu verir.[15]

Aşağı Yönlü Bütünlük: Her $(c, E) \in C^N$ için, $E' < E$ olmak üzere, $S(c, E') = S(S(c, E), E')$ eşitliği sağlanır.

Yukarıda ele aldığımız durumun tersi olarak ifade edilebilecek kaynağın arttığı hallerle ilgili "yukarı yönlü bütünlük" (İng. composition up) aksiyomunu tanıtacağız. Aksiyomun tatbiki için yine iki ayrı seçeneğe başvuracağız. İlk seçenekte başlangıçta yapılan tahsis iptal edilerek dağıtım kuralı gereği olması gerektiği gibi tahsis yapılacaktır. İkinci seçenekte ise başta yapılan tahsis iptal edilmeden dağıtım kuralı gereği, başlangıçta tahsis edilen ödüller revize edilecektir. Daha önce olduğu gibi, burada da aksiyom gereği her iki seçenekte yapılan taksimatlar birbirine eş olacaktır.[16]

Yukarı Yönlü Bütünlük: Her $(c, E) \in C^N$ için, $E' > E$ ve $\sum_{i \in N} c_i \geq E'$ olmak üzere, $S(c, E') = S(S(c, E), E')$ eşitliği sağlanır.

Aksiyomatik karakterizasyona başlamadan önce talepler problemi bağlamında ikililik (İng. duality) kavramının öneminden bahsetmek gerekir. Bir talepler problemi iki farklı bakış açısıyla ele alınabilir. Birincisi mevcut olanı incelemenin merkezine alırken ikincisi noksana, olmayana odaklanır. Bu iki yaklaşım arasındaki simetri, sınırlandırılmış eşit kazanımlar ve sınırlandırılmış eşit kayıplar gibi kuralları tanımlarken belirginleşir. Bu simetri, aşağı ve yukarı sınırlara ve iki bütünlük aksiyomuna da esas oluşturur. Ödülün kayba eşit olduğu aynı talep vektörlerine sahip iki problemi ikili olarak tanımlarız.

Bir Kuralın İkilisi $S = S^d$: $Her\ (c, E) \in C^N\ için,\ S^d(c, E) = c - S(c, \sum_{i \in N} c_i - E)$

Sınırlandırılmış eşit kazanımlar (CEA) ve sınırlandırılmış eşit kayıplar (CEL) kuralları birbirinin ikilisi kurallardır. Bir kuralın ikilisi kuralın kendisine eş ise öz-ikili (İng. self-dual) olarak tanımlanır $S^d = S$. Geometrik bir perspektiften bakıldığında, ikililik, ödüller patikasının taleplerin yarısına karşılık gelen noktaya göre simetrik olma özelliği denilebilir. Orantılı kuralın ve Talmud kuralının her birinin öz-ikili olduğunu belirtmek gerekir.

[14] Tenzil kavramı ilk olarak Aumann ve Maschler (1985) tarafından sunulmuştur. Taleplerin tenzilde istikrar (İng. claims truncation invariance) ilk olarak Curiel vd. (1987) tarafından ortaya konmuştur ve Dagan (1993) tarafından formel olarak bir aksiyom olarak önerilmiştir.

[15] Literatürde bu aksiyomu ilk defa Moulin (1987) fazlalık paylaşımı problemleri için sabit izlek (İng. fixed path) adıyla ortaya koymuş, daha sonra Moulin (2000) aksiyomu tanımlarken "yukarı bütünlük" (İng. upper composition) tabirini kullanmıştır.

[16] Literatürde aksiyomu ilk defa Young (1988) vergilendirme bağlamında bütünlük (İng. composition) aksiyomu adıyla tanıtırken Moulin (2000) aşağı bütünlük (İng. lower composition) adıyla tanımlamıştır.

İkililik kavramı kural-aksiyom bağlamında da ele alınabilir. Buna göre, iki aksiyom birbirinin ikilisi ise ve bir kural bu iki aksiyomdan birini sağlarsa, kuralın ikilisi de aksiyomun ikilisini sağlar. Örnek vermek gerekirse, negatif olmama ve taleple sınırlılık aksiyomları birbirinin ikilisidir. Benzer şekilde, talepleri tenzilde istikrar ve asgari hakların önceliği aksiyomları da birbirinin ikilisidir. Yine, aşağı yönlü bütünlük ve yukarı yönlü bütünlük aksiyomları da birbirlerine ikilisidir. Öte yandan bir aksiyom eğer öz-ikilisine eş ise bu aksiyom öz-ikili olarak anılır. Örneğin, eşitlere eşit muamele aksiyomu öz-ikili bir aksiyomdur. Her ne kadar CEA, CEL, CD ve P Kurallarının farklı aksiyom kümeleriyle karakterizasyonu mümkün olsa da aşağıda, ikili karakterizasyonlara imkan sağlayacak şekilde aksiyomatik karakterizasyonlar tercihlerinde bulunulmuştur, bu sayede daha bütüncül bir yapıya erişmeye çalışılmıştır.

Literatürde Dagan'ın (1996) karakterize ettiği üzere sınırlandırılmış eşit kazanımlar (CEA) kuralının karakterizasyonu ile başlıyoruz.

Teorem 1. Sınırlandırılmış eşit kazanımlar (CEA) kuralı eşitlere eşit muamele, talepleri tenzilde istikrar ve yukarı yönlü bütünlük aksiyomlarını karşılayan yegâne kuraldır.

Sıradaki karakterizasyon teoremi bir önceki teoremin karşıtı mahiyetindedir. Bu teoremde, önceki teoremdeki kural ve aksiyomların ikililerini kullanıyoruz.

Teorem 2. Sınırlandırılmış eşit kayıplar (CEL) kuralı eşitlere eşit muamele, asgari hakların önceliği ve aşağı yönlü bütünlük aksiyomlarını karşılayan yegâne kuraldır.

Sırada, öz-ikili bir kural olan vazgeç-ve-böl (CD) kuralının karakterizasyonu var. Bu kural, CEA ve CEL kurallarının oluşan karma bir kuraldır. Bu karakterizasyona Dagan (1996)'da yer verilir.

Teorem 3. Vazgeç-ve-böl (CD) kuralı eşitlere eşit muamele, asgari hakların önceliği ve talepleri tenzilde istikrar aksiyomlarını karşılayan yegâne kuraldır.

Vazgeç-ve-böl (CD) kuralı asgari hakların önceliği ve öz-ikililik aksiyomlarının oluşturduğu aksiyom kümesi ile de karakterize edilir. Ek olarak, aksiyomların ikilileri aracılığıyla karakterizasyon; talepleri tenzilde istikrar ve öz-ikililik aksiyomları ile de yapılabilir.

Son olarak orantılı kuralın bazı karakterizasyonlarını aktaracağız. İlk olarak Young (1988)'de anılan karakterizasyonu göstereceğiz.

Teorem 4. Orantılı (P) kural yukarı yönlü bütünlük ve öz-ikililik aksiyomlarını karşılayan yegâne kuraldır.

Ayrıca, ikililik uygulaması ile orantılı kuralın karakterizasyonu aşağı yönlü bütünlük ve öz-ikilik aksiyomları vasıtası ile de yapılabilir.

Orantılı kuralın bir sonraki karakterizasyonu, bir grup bireyin taleplerini kendi aralarında aktardığı bir istikrar aksiyomuna dayanır. Formülünden de anlaşılacağı gibi orantılı kural, her birey için göreceli kazançları eşitlemeyi amaçlar. Sonuç olarak, orantılı kurala göre hiçbir birey grubu, taleplerini grup içinde yeniden dağıtarak bir avantaj elde edemez. Bu nosyon, Moulin (1985)'e göre, kısmi doğrusal faydalarla sosyal seçim bağlamında, orantılı kuralı eşsiz bir şekilde karakterize eder. Moulin tarafından tanımlanan iltimas sağlayan aktarım yasağı aksiyomu ile formel hale getirilebilir. Bu aksiyom, tek başına, orantılı kuralı benzersiz bir şekilde karakterize eder.

İltimas Sağlayan Aktarım Yasağı: Herhangi bir $(c, E) \in C^N$ için ve her $M \subseteq N$ için ve her $(c_i')_{i \in M} \in R_+^M$ için, eğer $\sum_{i \in M} c_i' = \sum_{i \in M} c_i$ ise $\sum_{i \in M} S_i((c_i')_{i \in M}, C_{N \setminus M}, E) = \sum_{i \in M} S_i(c, E)$ eşitliği sağlanır.

Sonuç

Talepler problemi; miras paylaşımı, iflas problemi, tayınlama ve vergilendirme gibi gerçek hayatta karşılaşılan pek çok uygulaması olan bir problemdir. Kaynakların birbiriyle çelişen iddiaları bulunan hak sahipleri arasında dağıtımı; verimlilik, adillik, biteviyelik (İng. monotonicity) ve istikrarlılık (İng. invariance) gibi önemli özellikleri ihtiva eden aksiyomlar kümesine dayanarak belirlenen bir dağıtım kuralının tatbikini gerektirir.

Bu makalede, literatürden önde gelen çeşitli dağıtım kurallarının bir incelemesini sunduk ve bu kurallar için aksiyomatik karakterizasyonlar sağladık. Aksiyomatik yaklaşım, farklı aksiyomlar arasındaki mantıksal bağıntıları irdelememize ve hangi kuralların veya kural sınıflarının tüm aksiyomları karşıladığına dair kapsamlı bilgi elde etmemize olanak sağladı.

Gelecekte, araştırmacılar, bu literatürde anılan kuralları güncel meselelere tatbik ederek bu meselelerin çözümünde kullanılan alışılagelmiş çözümlere alternatif çözümler sunabilirler. Ayrıca, farklı alanlarda uygulanagelen bazı paylaşımları aksiyomatik karakterizasyon vasıtasıyla genelleyerek kural haline getirebileceklerdir.

Özetle, talepler problemi, ekonomistlerin, matematikçilerin ve bilgisayar bilimcilerinin dikkatini çekmeye devam eden devingen bir araştırma alanıdır. Aksiyomatik yaklaşım, bu problemi incelemek için değerli bir araç olmuştur ve umarız ki bu inceleme, bu yaklaşım ve dağıtım kuralları değerlendirmeleri için yararlı olacak bir giriş sağlamıştır.

Kaynakça

Aumann, R. J. ve Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, *36*(2), 195–213. https://doi.org/10.1016/0022-0531(85)90102-4

Curiel, I. J., Maschler, M. ve Tijs, S. H. (1987). Bankruptcy games. *Zeitschrift Für Operations Research, 31*, A143–A159. https://doi.org/10.1007/BF02109593

Dagan, N. (1996). New characterizations of old bankruptcy rules. *Social Choice and Welfare, 13*(1), 51–59. http://www.jstor.org/stable/41106151

Dagan, N. ve Volij, O. (1993). The bankruptcy problem: A cooperative bargaining approach. *Mathematical Social Sciences, 26*(3), 287–297. https://doi.org/10.1016/0165-4896(93)90024-D

Moulin, H. (1987). Equal or proportional division of a surplus, and other methods. *International Journal of Game Theory, 16*(3), 161–186. https://doi.org/10.1007/BF01756289

Moulin, H. (2000). Priority rules and other asymmetric rationing methods. *Econometrica, 68*(3), 643–684. https://doi.org/10.1111/1468-0262.00126

Moulin, H. (1985). Egalitarianism and utilitarianism in quasi-linear bargaining. *Econometrica, 53*(1), 49–67. https://doi.org/10.2307/1911723

Moulin, H. (2002). Axiomatic cost and surplus sharing. *Handbook of Social Choice and Welfare, 1*, 289–357. https://doi.org/10.1016/S1574-0110(02)80010-8

O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences, 2*(4), 345–371. https://doi.org/10.1016/0165-4896(82)90029-4

Rabinovitch, N. L. (1973). *Probability and statistical inference in ancient and medieval Jewish literature.* Toronto, Canada: University of Toronto Press.

Thomson, W. (2019). *How to divide when there isn't enough*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Young, H. P. (1988). Distributive justice in taxation. *Journal of Economic Theory, 44*(2), 321–335. https://doi.org/10.1016/0022-0531(88)90007-5

Young, H. P. (1990). Progressive taxation and equal sacrifice. *The American Economic Review, 80*(1), 253–266. http://www.jstor.org/stable/2006747

Extended Abstract

Purpose

This research seeks to understand the optimal method for allocation of scarce resources among competing claimants, a problem referred to as the "claims problem". It aims to examine the properties of various division rules through an axiomatic approach. The importance of this study stems from the universal applicability of the claims problem, which is found in various aspects of life including estate division, rationing, bankruptcy, and even basic taxation issues.

Design and Methodology

This is applied research that adopts a conceptual design, relying on mathematical axioms to dissect the problem. It reviews and analyses well-known division rules such as the proportional and egalitarian rules, offering axiomatic characterizations for each. The paper is designed to provide a comprehensive framework for achieving a fair and equitable distribution of scarce resources among competing claimants. The research process began by defining and articulating the claims problem, followed by an identification of applicable real-life scenarios where the claims problem emerges. The methodology then delved into an axiomatic approach, where mathematical axioms were used to represent the intuition about how a rule should operate in varying situations. It examined the logical connections between the properties of each division rule, explored the implications of imposing these properties in different combinations, and provided a categorization of the results.

Findings

The analysis has shown that the division rules are largely guided by a set of axioms which capture essential properties such as efficiency, fairness, monotonicity, and invariance. The axiomatic approach permitted the exploration of the logical connections between these properties, yielding comprehensive and explicit descriptions of rules or families of rules satisfying all the compatible properties. The results also revealed certain properties that were incompatible, leading to an impossibility theorem.

Research Limitations

The main limitation of this research is the inherent difficulty in the application of mathematical models to complex social phenomena such as the claims problem. Additionally, the paper focuses primarily on the proportional and egalitarian division rules, potentially overlooking other division rules that could be equally relevant.

Implications (Theoretical, Practical and Social)

The findings have significant theoretical implications, providing insights into the logical underpinnings of division rules, particularly within the context of scarce resource allocation. They also have practical implications, offering guidance for the implementation of fair and equitable resource division strategies in real-world scenarios like taxation, bankruptcy, and rationing. The social implications are evident in situations where resource allocation directly impacts societal welfare, such as aid distribution among impoverished nations. Moreover, the study identifies a potential for future research in exploring additional division rules such as fixed path rules and parametric rules.

Originality/Value

The original value of this study lies in its comprehensive analysis of division rules in the context of the claims problem, using an axiomatic approach. It builds upon existing literature, offering a novel perspective and furthering understanding of this multifaceted problem. It provides a clear delineation between compatible and incompatible properties, thereby enhancing the comprehension of the complexities involved in resource allocation among competing claimants. The study thereby contributes to the ongoing discourse in the fields of economics, mathematics, and computer science.

Araştırmacı Katkısı: Orhan AYGÜN (%35), Sinan ERTEMEL (%35), Burak DOĞAN (%30).