

Fibonacci Sayıları ile Alt Yörüngesel Grafların Özel Köşeleri Arasındaki İlişkiler

Ali Hikmet DEĞER*

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 61080, Trabzon

Geliş tarihi/Received 07.02.2017

Düzeltilerek geliş tarihi/Received in revised form 23.05.2017

Kabul tarihi/Accepted 13.06.2017

Öz

(Sims, 1967) in çalışmasındaki genel fikirler kullanılarak, Γ Modüler grubunun rasyonel projektif doğrusu üzerindeki imprimitif hareketi ile üretilen alt yörüngesel graflar incelendi. $(u, N) = 1$ ve $N > 1$ olmak üzere, $\mathbf{G}_{1,1}$ Farey grafinin özellikleri $\mathbf{G}_{u,N}$ alt yörüngesel graflarına genişletildi (Jones vd., 1991). Önceki çalışmamızda $\mathbf{G}_{u,N}$ nin $[\infty]$ bloğundaki yörüngelerinden oluşan $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafinin alt grafları olan ağaçlar incelendi. Bu alt graflar üzerindeki minimal uzunluklu yolların köşelerinin sürekli kesirler ile ilişkileri tespit edildi ve $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafindaki bu yolda bir köşenin bağlanabileceği en uzak köşenin değeri bulundu (Deger vd., 2011). Bu çalışmada ise özel durumlarda bu tip köşelerin sürekli kesir yapısı ile birlikte Fibonacci sayıları ile ilişkileri incelendi. En önemli sonuç olarak, $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için n . Fibonacci sayı dizisinin değeri $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olmak üzere,
$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^nF_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^nF_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n$$
 eşitliği bulundu. Bu matris yardımı ile birlikte F_{2n-1} ve F_{2n+1} Fibonacci dizisi terimleri de elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Alt Yörüngesel Graflar, Fibonacci Sayıları, Minimal Uzunluk, Sürekli Kesirler

Relationships with the Fibonacci Numbers and the Special Vertices of the Suborbital Graphs

Abstract

Using general ideas in the study of (Sims, 1967), suborbital graphs produced by imprimitive action on rational projective line of the modular group Γ were examined. Properties of Farey graph $\mathbf{G}_{1,1}$ were extended to suborbital graphs $\mathbf{G}_{u,N}$, where $(u, N) = 1$ and $N > 1$ (Jones et al., 1991). In our previous study, trees which are subgraphs of the suborbital graphs $\mathbf{F}_{u,N}$ consisting of the orbits in $[\infty]$ block of $\mathbf{G}_{u,N}$ were examined. Relationships of continued fractions with vertices of paths of minimal length on the subgraphs were established and value of the farthest vertex which a vertex can be bound on this path of the suborbital graph $\mathbf{F}_{u,N}$ was found (Deger et al., 2011). In the present study, using structure of continued fractions, relationships of values of these type of vertices with Fibonacci numbers in special cases were investigated. As a most important result, equation
$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^nF_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^nF_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n$$
 was found, where $F_0 = 0, F_1 = 1$ and n^{th} value of Fibonacci number sequence for all $n \geq 2$ natural number is as $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. In addition, terms of Fibonacci sequence F_{2n-1} and F_{2n+1} were obtained by using this matrix.

Keywords: Suborbital Graphs, Fibonacci Numbers, Minimal Length, Continued Fractions

* Ali Hikmet DEĞER, ahikmetd@ktu.edu.tr, Tel: (0462) 377 25 71

1. Giriş

Asal sayılarının dağılımının araştırılması, sayılar teorisinin en dinamik konularından bir tanesidir. Riemann, asal sayıların sıklığının $s \neq 1$ olmak üzere tüm $s \in \mathbb{C}$ karmaşık sayıları için

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

eşitliğiyle tanımlanan *Riemann-zeta fonksiyonunun* davranışıyla yakın ilişkili olduğunu göstermiştir (Diamond, 1982). Bu yüzden Riemann-zeta fonksiyonu hem kompleks analiz, hem fonksiyonlar teorisinin, hem de sayılar teorisinin kesişiminde kalan önemli bir araştırma konusu olmuştur. Böylesine önemli bir başka kompleks değerli fonksiyon da modüler formdur.

Modüler form, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemi üzerinde Γ -Modüler grubunun grup hareketine bağlı olarak aşağıda daha detaylı verilen fonksiyonel eşitliği ve bir çeşit büyüme koşulunu gerçekleyen kompleks değerli analitik bir fonksiyondur. Buna göre bu çalışmada daha sonra ayrıntılı bir şekilde incelenecek olan Γ modüler grubu için k -değerli bir modüler form, \mathbb{H} üzerinde

- (1) f , \mathbb{H} üzerinde holomorf fonksiyondur,
- (2) $\forall z \in \mathbb{H}$ ve $\forall A \in SL(2, \mathbb{Z})$ için $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$,
- (3) f , $i\infty$ da (yani $z \rightarrow i\infty$ için) holomorftur

koşullarını sağlayan f -fonksiyondur. (2). koşuldan f fonksiyonunun periyodik olduğu ve bu yüzden de Fourier serisine açılabilirdiği anlaşılır. Günümüzde modern sayılar teorisinin en önemli kısmını *otomorf formlar* (kabaca Öklid uzayındaki periyodik fonksiyonlar kavramının genel topolojik uzaylara genişlemesi), otomorf formlar teorisinin de en zengin ve analitik kısmını modüler formlar teşkil eder (Ford, 1951). Tanımından açıkça anlaşılacağı üzere, burada

modüler grubun grup hareketinin incelenmesi esastır. Salt bu açıdan ele alındığında bile önemi aşikâr olmakla beraber, literatürde söz konusu grup hareketinin incelenmesinin Fibonacci dizileri ile ilişkisi ve Pell denklemlerinin çözümlerini üretmesi açısından da son derece önemli olduğu iyi bilinmektedir (Niven, 2008).

Bu çalışmada modüler grubun bir tür imprimitif hareketinin ürettiği grafların minimal uzunluklu yollarındaki özel köşe değerleri bazı matris bağlantıları yardımı ile hesaplanmıştır. Bu hesaplanmalarda kullanılan ve literatürdeki Pringsheim teoreminin koşullarını sağlayan özel sürekli kesirlerin Fibonacci dizileri ile olan ilişkisinin ortaya konması amaçlanmıştır. Ayrıca bu çalışma ile doğada ve yaşamdaki örnekleri bilinen altın oran ile birlikte, ekonomi, elektronik, mühendisliğin farklı alanları, sanat, mimari, bilgisayar ve istatistik bilimleri gibi dallarda çok çeşitli uygulamaları olan Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin farklı bir metot ile elde edilmesi de önemlidir. Dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe altın orana, yani 1.618 e yaklaşır. Bu oran ϕ sembolü ile gösterilir ve $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ye eşittir.

Sonlu permütasyon gruplarının alt yörüngesel grafları ile ilgili tanımlamalar Sims tarafından verildi (Sims, 1967). Sims' in bu fikrini Γ Modüler grubunun $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grupları için Jones, Singerman ve Wicks kullandılar (Jones vd., 1991). Alt yörüngesel grafları kullanarak $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ rasyonel projektif doğrusu üzerinde Γ nın hareketini çalıştılar. Bu grafların köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ doğrusu üzerindedir ve Modüler grubun yörüngelerini kenarlar ile oluşturur. Özel durumlar için bu tip kenarların köşeleri ile sürekli kesirler arasındaki ilişki, Deger, Besenk ve Güler' in çalışmasında verildi (Deger vd., 2011).

Ayrıca birçok araştırmacı tarafından alt yörüngesel graflar, hiperbolik devre uzunlukları ve normalliyen yapısı incelenmiştir (Akbas, 2001; Guler vd., 2011; Kader vd., 2010).

Sarma, Kushwaha ve Krishnan çalışmalarında özel olarak $u = 1$ ve $N = 2$ için $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafını ele alarak yeni bir tip $\mathcal{F}_{1,2}$ – sürekli kesiri tanımladılar (Sarma vd., 2015). Ayrıca herhangi bir reel sayının bu tür bir sürekli kesir açılımına sahip olduğunu ispat etmişlerdir.

Cuyt, Petersen, Verdonk, Waadeland ve Jones’ in çalışmasında verilen sürekli kesirler ve özellikleri ile ilgili teoremin özeti aşağıda 2. kısımda verilmiştir (Cuyt vd., 2008).

2. Sürekli Kesirler

$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ doğal sayılar ve \mathbb{Z} tam sayılar kümesini göstermek üzere her $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısı için $a_m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ve $b_m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (1)$$

ifadesine bir sürekli kesir denir. Bu (1) sürekli kesiri sembolik olarak

$$b_0 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (2)$$

ile temsil edilir. Buna bağlı olarak (1) sürekli kesiri için n . yaklaşım f_n sembolü ile gösterilir ve

$$f_n = b_0 + \mathbf{K}_{m=1}^n \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad (3)$$

ile ifade edilir. Ayrıca $m \geq 1$ için $a_m \neq 0$ olmak üzere bir $(\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{b_m\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}})$ sıralı dizi çifti;

$$t_0(s) := s, \quad t_n(s) := \frac{a_n}{b_n + s}, \quad n = 1,2,3, \dots \quad (4)$$

$$T_0(s) := t_0(s), \quad T_n(s) := T_{n-1}(t_n(s)), \quad n = 1,2,3, \dots \quad (5)$$

$$f_n = T_n(0) \in \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad n = 1,2,3, \dots \quad (6)$$

olmak üzere, lineer kesirli dönüşümlerin $\{t_n(s)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ve $\{T_n(s)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ dizileri ile bir

$$\{f_n\} \quad (7)$$

dizisini oluşturur.

$$((\{a_m\}, \{b_m\}), \{f_n\}) \quad (8)$$

sıralı çifti (1) ile verilen sürekli kesire karşılık gelir. a_m ve b_m tam sayılarına sırası ile sürekli kesirin kısmi payı ve kısmi paydası denir. f_n değerine ise n . yaklaşım denir ve (3) ile gösterilir. $T_n(s)$ lineer kesirli dönüşümü

$$T_n(s) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n + s}}}} \quad (9)$$

ile veya daha uygun şekilde

$$T_n(s) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n + s} \quad (10)$$

ile gösterilir. Denk olarak "o" ifadesi bileşke işlemini göstermek üzere

$$T_n(s) = (t_0 \circ t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n)(s) \quad (11)$$

olarak ifade edilir.

Burada $(t_0 \circ t_1)(s) := t_0(t_1(s))$ dir. Özellikle

$$t^n(s) := \left(\underbrace{t \circ t \circ \dots \circ t}_n(s) \right) \quad (12)$$

dir. Verilen bir $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ dizisi için

$$T_n(s_n) \in \widehat{\mathbb{R}} \quad (13)$$

sayısına n . değiştirilmiş yaklaşım denir.

2.1. Yinelenme Bağlılıları

Bir $\mathbf{K}(a_m/b_m)$ sürekli kesirinin n . payı A_n ve n . paydası B_n değerleri aşağıdaki yinelenme bağıntıları (ikinci mertebeden lineer fark denklemleri) ile bulunur;

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b_n A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n = 1,2,3, \dots \quad (14)$$

Burada başlangıç koşulları ise

$$A_{-1} := 1, B_{-1} := 0, A_0 := b_0, B_0 := 1 \quad (15)$$

olarak verilir. (13) ile verilen $T_n(s_n)$ değiştirilmiş yaklaşımı

$$T_n(s_n) = \frac{A_n + A_{n-1}s_n}{B_n + B_{n-1}s_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

olarak yazılabilir ve böylece f_n n . yaklaşımı

$$f_n = T_n(0) = \frac{A_n}{B_n}, \quad f_{n-1} = T_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (17)$$

olarak elde edilir.

2.2. Sürekli Kesirlerin Matris Bağlantısı

n . payı A_n ve n . paydası B_n olan $\mathbf{K}(a_m/b_m)$ sürekli kesiri verilsin ve

$$t_m(s) := \frac{a_m}{b_m + s}, \quad x_m := \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ 1 & b_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

olsun. Bu durumda (11) ve (16) ile verilen lineer kesirli dönüşümleri

$$X_n := x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

matrisine karşılık gelir. Böylece 2×2 lik bu matrislerin çarpımı $\{A_n\}, \{B_n\}$ ile (6) ve (17) ile verilen f_n n . yaklaşımının $\{f_n\}$ dizilerinin oluşumunda kullanılabilir. Bu şekilde sürekli kesirlerin değerleri bu yaklaşım ile birlikte elde edilebilir.

3. Alt Yörüngesel Graflar

3.1. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $T : z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki tüm Möbiüs dönüşümlerinin kümesi $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilir ve bu küme \mathbb{H} üst yarı düzlemin otomorfizmalarının grubudur. Böylece Γ Modüler grubu $\{\pm I\}$ merkezi ile $SL(2, \mathbb{Z})$ grubunun bölüm grubu olarak verilir. Buradan Γ nın elemanları

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\} \quad (20)$$

matris çifti ile temsil edilir. Burada \pm sembolünü göz ardı edip her bir matris negatifi ile eşit kabul edilir. Böylece Γ Modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi, x ve y tamsayıları aralarında asal olmak üzere, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklinde olur. Bu durumda $\frac{x}{y}, \frac{r}{s} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ise $\frac{r}{s} = T\left(\frac{x}{y}\right)$ olacak şekilde $T \in \Gamma$ vardır. Dolayısı ile Γ Modüler grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder. Böylece $(\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}})$ ikilisi bir permütasyon grubunu oluşturur. " \approx ", $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir denklik bağlantısı olmak üzere her $g \in \Gamma$ ve her $\alpha \approx \beta$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa \approx bağlantısına bir Γ -invariant denklik bağlantısı denir. Bu denklik bağlantısının denklik sınıflarına *bloklar* denir. Buna göre, " $\forall \alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \approx \beta$ " şeklindeki özdeşlik bağlantısı ve " $\forall \alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için $\alpha \approx \beta$ " şeklindeki evrensel bağlantı, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ -invariant denklik bağlantılarıdır. Bu bağlantılardan farklı, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ -invariant denklik bağlantısı varsa $(\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}})$ ikilisine *imprimitif*, aksi halde *primitif* adı verilir.

3.1. Teorem (Jones vd, 2.2. Önerme, 1991)
(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde, (G, Ω) primitiftir ancak ve ancak $\forall \alpha \in \Omega$ noktasının $G_\alpha = \{g \in G : g(\alpha) = \alpha\}$ sabitleyeni G nin bir maksimal alt grubudur. \square

∞ un Γ Modüler grubundaki sabitleyeni $\Gamma_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ dur. Γ Modüler grubunun kongrüans bir alt grubu olan $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ göz önüne alınırsa, açıkça, $N > 1$ olmak üzere $\Gamma_\infty \not\cong \Gamma_0(N) \not\cong \Gamma$ dir. Buradan 3.1. Teorem'e göre $(\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}})$ çifti imprimitiftir. Bu durumda $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ -invariant denklik bağlantısı vardır. $\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v = T(\infty)$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma$ vardır. Böylece $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde $T(\infty) = v \approx w = S(\infty) \Leftrightarrow T^{-1}S \in \Gamma_0(N)$ dir. Buradan $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{N}$ yazılır. Bu denklik bağlantısının bloklarının sayısı ise $\psi(N) := |\Gamma : \Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ dir.

3.2. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde $G, \Omega \times \Omega$ üzerinde $g \in G$ ve $\alpha, \beta \in \Omega$ olmak üzere $g: (\alpha, \beta) \rightarrow (g(\alpha), g(\beta))$ ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir. (α, β) yi içeren alt yörünge $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. Yani, $O(\alpha, \beta) = \{g(\alpha, \beta) : g \in G\}$ dir. Eğer $G := \Gamma$ ve $\Omega := \widehat{\mathbb{Q}}$ olarak alınırsa, $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden bir $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafi, köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ nin elemanları ve eğer $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya bir $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilen bir kenar var olacak şekilde oluşturulabilir. Bu kenarlar \mathbb{H} üst yarı düzleminde hiperbolik geodezikler olarak çizilir. Açıkça $O(\beta, \alpha)$ da bir yörünge ve ya $O(\alpha, \beta)$ ya eşittir ya da $O(\alpha, \beta)$ dan farklıdır. İkinci durumda, $\mathbf{G}(\beta, \alpha), \mathbf{G}(\alpha, \beta)$ nin oklarının ters yönlendirilmiştir ve bu durumda $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ ile $\mathbf{G}(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar adı verilir. Birinci durumda, $\mathbf{G}(\alpha, \beta) = \mathbf{G}(\beta, \alpha)$ ve buradan bu graf karşıt yönlendirilmiş kenar çifti içerir; bu şekildeki her çifti basit bir yönlendirilmiş kenar ile değiştirmek uygundur, böylece kendisiyle eşleşmiş graf denilen yönlendirilmemiş bir kenar elde edilir. Yani, eğer $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ve $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise buradan γ dan δ ya olan kenar $\gamma - \delta$ ($\gamma \leftrightarrow \delta$ yerine) ile gösterilir.

Bu fikirler ilk kez (Sims, 1967) tarafından ortaya atıldı ve (Neumann, 1977) in çalışmasında, (Tsukuzu, 1982) ve (Biggs ve White, 1979) in kitaplarında, sonlu grupların uygulanmasında büyük önem kazandı. Örneğin, $O(\alpha, \alpha) = \{(\gamma, \gamma) : \gamma \in \widehat{\mathbb{Q}}\}$, $\widehat{\mathbb{Q}} \times \widehat{\mathbb{Q}}$ nin köşegenidir. Her $\alpha \in \widehat{\mathbb{Q}}$ köşesi için $\mathbf{G}(\alpha, \alpha)$ grafi sadece bir düğüm içerir. Bu graf kendisi ile eşleşmiştir. Buna aşikâr alt yörüngesel graf denir. Bu çalışmada aşikâr olmayan alt yörüngesel graflar ile ilgilenilecektir.

Γ Modüler grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden, her bir alt yörünge, bir $v \in \mathbb{Q}$ için (∞, v) çiftini içerir. $N > 1$ ve $(u, N) = 1$ olmak üzere $v := \frac{u}{N}$ alınır, bu alt yörünge $O(u, N)$ ve buna karşılık gelen

$\mathbf{G}(\infty, v)$ alt yörüngesel grafi da $\mathbf{G}_{u, N}$ ile gösterilir.

3.2. Lemma (Jones vd, 1991) Eğer $v, v' \in \mathbb{Q}$ ise bu taktirde $O(\infty, v) = O(\infty, v')$ olması için gerek ve yeter şart v ve v' köşelerinin Γ_∞ un aynı yörüngesinde olmasıdır. Γ_∞ sabitleyeni $Z : v \rightarrow v + 1$ ile üretildiğinden, bu durum, $u \equiv u' \pmod{N}$ olmak üzere $v' = \frac{u'}{N}$ ifadesine denktir. \square

3.3. Sonuç (Deger, 1.1. Lemma, 2017) $\mathbf{G}_{u, N} = \mathbf{G}_{u', N'} \Leftrightarrow N = N'$ ve $u \equiv u' \pmod{N}$ dir. Dolayısı ile $\forall N \geq 1$ tamsayısı için $\Phi(N) = |U_N| = N \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ tane farklı $\mathbf{G}_{u, N}$ alt yörüngesel grafi vardır. \square

3.4. Teorem (Jones vd, 3.2. Teorem, 1991) $\mathbf{G}_{u, N}$ alt yörüngesel grafinda $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarının mevcut olması için gerek ve yeter şart $x \equiv \pm ur \pmod{N}, y \equiv \pm us \pmod{N}$ ve $ry - sx = \pm N$ olmasıdır. \square

3.5. Sonuç (Deger, 1.3. Lemma, 2017) $\bar{u}, u\bar{u} \equiv 1 \pmod{N}$ kongrüans denklemini sağlamak üzere, $\mathbf{G}_{u, N}$ ile eşleşmiş alt yörüngesel graf $\mathbf{G}_{-\bar{u}, N}$ dir. \square

3.6. Sonuç (Jones vd, 3.4. Sonuç, 1991) $\mathbf{G}_{u, N}$ alt yörüngesel grafinin kendisi ile eşleşmiş bir graf olması için gerek ve yeter şart $u^2 \equiv -1 \pmod{N}$ olmasıdır. \square

$\mathbf{F}_{u, N}$ ile, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ bloğundan oluşan $\mathbf{G}_{u, N}$ alt yörüngesel grafinin bir alt grafini gösterelim. Böylece $\mathbf{G}_{u, N}$ grafi $\mathbf{F}_{u, N}$ grafinin $\Psi(N)$ tane ayırık kopyasından oluşur.

3.7. Teorem (Jones vd, 5.1. Teorem, 1991) $\mathbf{F}_{u, N}$ alt yörüngesel grafinda $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarının mevcut olması için gerek ve yeter şart $x \equiv \pm ur \pmod{N}$ ve $ry - sx = \pm N$ olmasıdır. \square

Yukarıda incelenen Γ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif hareketinin genel olarak incelenmesinden, Γ nin $\mathbf{F}_{u, N}$ yi invaryant

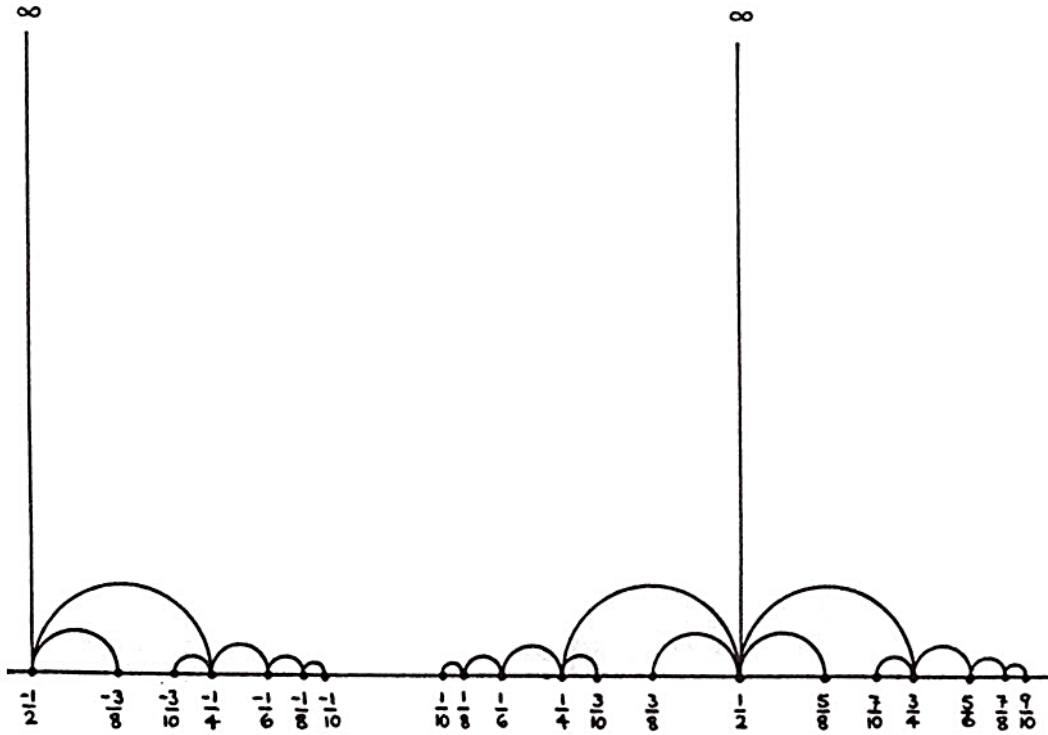
birakan alt grubu $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubudur. Sonuç olarak $\Gamma_0(N) \leq \text{Aut } \mathbf{F}_{u,N}$ dir.

3.8. Teorem (Jones vd, 5.2. Teorem, 1991)
 $\Gamma_0(N)$, $\mathbf{F}_{u,N}$ grafının köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder. \square

3.9. Tanım v_0, v_1, \dots, v_m , $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafının farklı köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer $m \geq 2$ ise $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_0$ yapılandırılmasına bir *yönlendirilmiş devre* (veya *kapalı yol*) denir. Eğer bu yapılandırmadaki en az bir ok (hepsi değil) ters yönlü ise bu yapılandırmaya, bir *yönlendirilmemiş devre* (veya *ters yönlendirilmiş devre*) adı verilir. Eğer $m = 2$ ise devre, yönlendirilmiş olsun veya olmasın, *üçgen* olarak adlandırılır. Eğer $m = 1$ ise $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_0$ yapılandırılmasına *kendisi ile eşleşmiş bir kenar* denir. Γ Modüler grubunun elemanları hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmettiğinden, uygun görsellik açısından, $\mathbf{F}_{u,N}$ grafının kenarları, \mathbb{H} üst yarı düzleminde reel eksene dik Öklid yarı-çemberleri ve yarı-doğruları şeklinde

hiperbolik geodezikler olarak gösterilir. $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ ve $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$ yapılandırılmalarına sırası ile $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında bir *yol* ve bir *sonsuz yol* adı verilir. $\frac{r}{s} \xrightarrow{<} \frac{x}{y} \in \mathbf{F}_{u,N}$ (veya $\frac{x}{y} \xleftarrow{<} \frac{r}{s} \in \mathbf{F}_{u,N}$) ise, 3.7. Teorem için verilen koşullara göre, eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ grafında r/s köşesine bağlanan x/y köşesinden daha büyük (veya küçük) bir köşe yoksa x/y köşesine *en uzak köşe* denir. $\mathbf{F}_{u,N}$ grafındaki $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$ yolunun *minimal uzunluklu* olması için, $i < j - 1, i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m - 2\}, j \in \{2, 3, 4, \dots, m\}$ olmak üzere $v_i \leftrightarrow v_j$ olması ve v_{i+1} köşesi v_i köşesine bağlanan en uzak köşe olması gerekir. Eğer $\mathbf{F}_{u,N}$ hiç bir devre içermiyor ise bir *orman*, $\mathbf{F}_{u,N}$ devre içermeyen bağlantılı boş-olmayan bir graf ise bir *ağaçtır*.

Aşağıdaki Şekil 1' de özel olarak $u = 1$ ve $N = 2$ olmak üzere $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafının köşe ve kenarlarının bir kısmı verilmiştir.



Şekil 1. $\mathbf{F}_{1,2}$ alt yörüngesel grafının bir kısmı

4. Alt Yörüngesel Graflardaki Minimal Uzunluklu Yolların Köşeleri

4.1. Lemma (Deger vd., 3.1. Lemma, 2011)
 $(u, N) = 1$ ise $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ kongrüans denklemini sağlayan bir k tamsayısı vardır. \square

$$\infty = \frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{N} \rightarrow \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}}{N} \rightarrow \dots$$

minimal uzunluklu sonsuz yolundaki köşeleri sırası ile birbirine bağlayan ve bu şekilde her bir köşe için tekrarlı bir sürekli kesir yapısı ile birlikte kenarları oluşturan dönüşümdür

(Deger vd., 2011). Buradan $\varphi\left(\frac{u + \frac{x}{y}}{N}\right) =$

$\left(\frac{u + \frac{y}{ky-x}}{N}\right)$ olduğundan, $\frac{u + \frac{x}{y}}{N}$ bir $\mathbf{F}_{u,N}$ alt

yörüngesel grafindaki minimal uzunluklu yolda bir köşe ise onunla bağlanan en uzak

köşenin değeri $\frac{u + \frac{y}{ky-x}}{N}$ dir. $v_0 = \frac{u}{N}$ başlangıç

köşesi olarak belirlenirse, her $q \in \mathbb{Z}^+$ için $v_q = \varphi^q(v_0)$ eşitliği ile verilir. Ayrıca (14)

yinelenme bağıntıları ele alınırsa her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n := -1, b_n := -k$ ve

$B_n = -A_{n+1}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafindaki minimal uzunluklu yoldaki n .

köşenin değeri $\frac{u + T_n(0)}{N} = \frac{u + \frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{A_{n+1}u - A_n}{A_{n+1}N}$ ile

verilir. Aynı zamanda (18) ve (19) matris bağlantılarından

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \text{ dir (Deger, 2017).}$$

5. Alt Yörüngesel Grafların Köşeleri ve Fibonacci Sayıları

Bu kısımda $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafindaki minimal uzunluklu yollardaki köşeler için, uygun bir k değeri ile birlikte, bu köşelerin değerleri ile Fibonacci sayıları arasındaki bazı bağlantılar verilecektir.

$$F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

olup $(3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n = 2\sqrt{5} \sum_{t=1}^n (3 + \sqrt{5})^{n-t} (3 - \sqrt{5})^{t-1}$ eşitliğinden

$$u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}, k \geq 2, k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere $\varphi = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2 + ku + 1}{N} \\ -N & u + k \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$

elemanı, $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafinda

5.1. Tanım Fibonacci sayı dizisi

$$F_n := \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise} \\ 1, & n = 1 \text{ ise} \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n > 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (21)$$

eşitliği ile temsil edilir. Ayrıca n . Fibonacci sayı dizisi değeri Binet formülü adı verilen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

eşitliği ile bulunur.

5.2. Lemma $A_n, \mathbf{K} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sürekli kesirinin $m = 1$ n . payı olmak üzere $F_{2n}A_{n+1} + F_{2n+2}A_n = 0$ dir.

İspat. Eğer, $k = 3$ ise, $\mathbf{F}_{u,N}$ grafindaki $\frac{u}{N}$ köşesi ile başlayan minimal uzunluklu yoldaki $(n + 1)$. köşenin değeri

$$\frac{F_{2n} + u}{F_{2n+2} + u} \quad (22)$$

ile verilir (Deger, 2.13. Sonuç, 2017). Aynı zamanda $k = 3$ değeri için (Deger, 2.9. Teorem, 2017) den

$$A_n = (-1)^n 2^{1-n} \sum_{t=1}^n (3 + \sqrt{5})^{n-t} (3 - \sqrt{5})^{t-1}$$

ve (21) den

$$A_n = (-1)^n F_{2n} \quad (23)$$

elde edilir. Dolayısı ile aynı köşenin değeri

$$\frac{-A_n + u}{A_{n+1} - N} \quad (24)$$

ile verilir. Buradan ise $\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} = \frac{-A_n}{A_{n+1}}$ olup, $F_{2n}A_{n+1} + F_{2n+2}A_n = 0$ elde edilir.□

5.3. Lemma $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $F_{2n} = (-1)^n A_n$ ve

$$F_{2n+1} = (-1)^{n+1}(A_{n+1} + A_n) \text{ dir.} \quad (25)$$

İspat. $A_n = (-1)^n F_{2n}$ olduğundan $F_{2n} = (-1)^n A_n$ olduğu açıktır. Şimdi $m > 1$ doğal sayıları için $F_{2n+1} = (-1)^{n+1}(A_{n+1} + A_n)$ olduğunu gösterelim. $m > 1$ ise buradan $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ olduğundan $m = 2n + 2$ için $F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$ elde edilir. Böylece $F_{2n+2} = (-1)^{n+1}A_{n+1}$ olduğundan $F_{2n+1} = (-1)^{n+1}A_{n+1} - (-1)^n A_n = (-1)^{n+1}(A_{n+1} + A_n)$ elde edilir.□

5.4. Sonuç $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_{4n+2} = -A_{2n+1} \text{ dir.} \quad \square$$

5.5. Sonuç (14), (21) ve (25) den $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3}(2A_{n+1} - A_{n-1}) \text{ dir.} \quad \square$$

5.6. Lemma $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_{2n} = \frac{1}{3}(F_{2n+2} + F_{2n-2}) \text{ dir.} \quad (26)$$

İspat. (23) eşitliğinden $F_{2n} = (-1)^n A_n$ ve $F_{2n-2} = (-1)^{n-1}A_{n-1}$ eşitlikleri elde edilir. Buradan ise $F_{2n+2} = (-1)^{n+1}A_{n+1}$ ve (14) yinelenme bağıntılarında $a_n := -1$ ve $b_n := -k = -3$ alınır, $A_{n+1} = (-3)A_n + (-1)A_{n-1}$ olacağından

$$\begin{aligned} F_{2n+2} &= (-1)^{n+1}(-3)A_n \\ &\quad + (-1)^{n+1}(-1)A_{n-1} \\ &= 3(-1)^n A_n + (-1)^n A_{n-1} \\ &= 3F_{2n} - F_{2n-2} \end{aligned} \quad (27)$$

elde edilir. (27) eşitliğinden istenen sonuç alınır.□

5.7. Sonuç $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_{2n-2} = \frac{1}{2}(F_{2n+2} - 3F_{2n-1}) \text{ dir.}$$

İspat. (21) den $F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}$ olduğundan ve (26) dan sonuç açıktır.□

5.8. Sonuç $n = 2, 3, 4, \dots$ için

$$F_{2n-1} = \frac{1}{3}(F_{2n+1} + F_{2n-3}) \text{ dir.} \quad \square \quad (28)$$

5.9. Sonuç $n = 2, 3, 4, \dots$ için

$$2F_{2n} - 3F_{2n-1} = F_{2n-2} - F_{2n-3} \text{ dir.}$$

İspat. (26) ve (28) den $F_{2n-1} + F_{2n} = \frac{1}{3}(F_{2n+1} + F_{2n-3} + F_{2n+2} + F_{2n-2})$ dir. (21) ve (27) den sırası ile $F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$ ve $F_{2n+2} = 3F_{2n} - F_{2n-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} F_{2n-1} + F_{2n} &= \frac{1}{3}(3F_{2n} - F_{2n-2} - F_{2n} \\ &\quad + F_{2n-3} + 3F_{2n} - F_{2n-2} \\ &\quad + F_{2n-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $F_{2n-1} + F_{2n} = \frac{1}{3}(5F_{2n} + F_{2n-3} - F_{2n-2})$ olduğundan ve bu son eşitlik kullanılarak $2F_{2n} - 3F_{2n-1} = F_{2n-2} - F_{2n-3}$ elde edilir.□

5.10. Sonuç $\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n \text{ dir.}$

İspat. Sürekli kesirlerin matris bağlantılarından $\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}^n$ olarak verildi. Öte yandan $k = 3$ için (23) eşitliğinden $A_n = (-1)^n F_{2n}$ olduğuna göre $A_{n-1} = (-1)^{n-1}F_{2n-2}$ ve $A_{n+1} = (-1)^{n+1}F_{2n+2}$ elde edilir. Buradan $-A_n = (-1)^{n+1}F_{2n}$ ve $-A_{n+1} = (-1)^n F_{2n+2}$ şeklinde yazılabileceğinden

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^n F_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^n F_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^n \quad (29)$$

elde edilir.□

5.11. Örnek Özel olarak $k = 3$ seçelim. Bu durumda $u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olmak üzere $\mathbf{F}_{u,N}$ alt yörüngesel grafi için $u = 1$ ve $N = 5$ olsun. Böylece (22) eşitliğinden, $\mathbf{F}_{1,5}$ alt yörüngesel grafi için,

$$\infty = \frac{1}{0} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{5}}_{1. \text{ köşe}} \rightarrow \underbrace{\frac{1+\frac{1}{3}}{5}}_{2. \text{ köşe}} \rightarrow \underbrace{\frac{1+\frac{1}{3-\frac{1}{3}}}{5}}_{3. \text{ köşe}} \rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{\frac{1+\frac{1}{3-\dots-\frac{1}{3}}}{5}}_{n. \text{ köşe}} \rightarrow \underbrace{\frac{1+\frac{1}{3-\dots-\frac{1}{3-\frac{1}{3}}}}{5}}_{(n+1). \text{ köşe}} \rightarrow \dots \quad (30)$$

minimal uzunluklu sonsuz yolundaki n . köşenin bağlanabileceği en uzak $(n + 1)$. köşenin değeri $\frac{u+F_{2n}}{N}$ olduğundan, (30)

yolunda örneğin, 19. köşenin bağlanabileceği en uzak köşe olan 20. köşenin değerini bulmak için $n = 19$ olmak üzere 5.10. Sonuç'tan

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^nF_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^nF_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{36} & -F_{38} \\ F_{38} & -F_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} 14930352 & -39088169 \\ 39088169 & -102334155 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisi kullanarak bu 20. köşenin değeri

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \dots - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}}}_{20. \text{ köşe}} = \frac{1 + \frac{F_{38}}{F_{40}}}{5} = \frac{1 + \frac{39088169}{102334155}}{5} = 0.2763932022500210218182$$

olur. Ayrıca yukarıda elde edilen matris kullanılarak ilgili 19. köşenin değeri de benzer şekilde

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \dots - \frac{1}{3}}}}_{19. \text{ köşe}} = \frac{1 + \frac{F_{36}}{F_{38}}}{5} = \frac{1 + \frac{14930352}{39088169}}{5} = 0.2763932022500209718189$$

olarak bulunur. Burada dikkat edilirse 19. köşenin değerini tespit etmek için $n = 18$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} F_{34} & -F_{36} \\ F_{36} & -F_{38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{18} = \begin{pmatrix} -5702887 & 14930352 \\ -14930352 & 39088169 \end{pmatrix}$$

matrisini tespit etmeye gerek kalmadan, $F_{1,5}$ alt yörüngesel grafında hem 19. köşenin değeri ve hem de 3.7. Teorem'deki şartlara uygun olarak onun bağlanabileceği en uzak köşe olan 20. köşenin değeri tek bir matris elde edilerek bulunmuştur.

Ayrıca 5.11. Tanıma göre,

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

$$F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$$

olduğundan, bu eşitlikler ve aynı matris bir kez daha kullanılarak, 37. ve 39. Fibonacci sayı değerleri $F_{37} = F_{38} - F_{36} = 24157817$ ve $F_{39} = F_{40} - F_{38} = 63245986$ olarak elde edilir. Dolayısı ile her $n \in \mathbb{N}$ için (29) matrisi ile birlikte yukarıdaki son eşitlikler kullanılarak, sırası ile 5 adet $F_{2n-2}, F_{2n-1}, F_{2n}, F_{2n+1}, F_{2n+2}$ Fibonacci sayı dizisinin terimi bulunur.

6. $F_{u,N}$ Alt Yörüngesel Grafındaki Minimal Uzunluklu Yolların Yönlenmesi

6.1. Lemma $(u, N) = 1$ ise $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ kongrüans denklemini sağlayan bir l tamsayısı vardır.

İspat. $(u, N) = 1$ olduğundan $ux + Ny = 1$ eşitliğini sağlayan x ve y tamsayıları vardır. Buradan $ux \equiv 1 \pmod{N}$ dir. Böylece $ux(-u^2 - 1) \equiv -u^2 - 1 \pmod{N}$ olur. $l := x(u^2 + 1)$ olarak alınırsa $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ elde edilir. \square

$$\dots \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l - \frac{1}{l}}}{N} \leftarrow \frac{u - \frac{1}{l}}{N} \leftarrow \frac{u}{N} \leftarrow \frac{1}{0} = \infty$$

başlangıç köşesi $v_0 = \frac{u}{N}$ ye göre sola yönlenmiş minimal uzunluklu sonsuz yolundaki köşeleri sırası ile birbirine bağlayan ve 3.7. Teorem’deki şartlara uygun olarak kenarları oluşturan dönüşümdür. Buradan $\frac{u-x}{N}$ bir $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafındaki sola yönlenmiş minimal uzunluklu yolda bir köşe ise onunla bağlanan en uzak köşe $\omega\left(\frac{u-x}{N}\right) = \frac{u-y}{N}$ olur. $v_0 = \frac{u}{N}$ başlangıç köşesi olmak üzere, $p \in \mathbb{Z}^+$ tamsayıları için $v_p = \omega^p(v_0)$ dir. Ayrıca (14) yinelenme bağlantılarından, her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n := -1, b_n := -l$ ve $B_n = -A_{n+1}$ olmak üzere $F_{u,N}$ alt

6.2. Teorem (Deger, 2.2. Teorem, 2017) $1 < k, l \leq N$ eşitsizliklerini sağlayacak şekilde k ve l tamsayıları için sırası ile $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ ve $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olsun. Bu halde $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafi eğer kendisi ile eşleşmiş ise $k = l = N$ ve aksi taktirde, yani, kendisi ile eşleşmiş değil ise $l = N - k$ dir. \square

Böylece $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}, l \geq 2, l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\omega := \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2-lu+1}{N} \\ -N & u-l \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanı, $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafında

yörüngesel grafındaki sola yönlenmiş minimal uzunluklu yoldaki n . köşenin değeri

$$\frac{u-T_n(0)}{N} = \frac{u-\frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{A_{n+1}u+A_n}{A_{n+1}N} \tag{31}$$

ile verilir. Aynı zamanda (18) ve (19) matris bağlantılarından $\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -l \end{pmatrix}^n$ dir.

6.3. Örnek Özel olarak $l = 3$ seçelim. Bu durumda $u^2 - 3u + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olmak üzere $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafi için $u = 4$ ve $N = 5$ olsun. Böylece $F_{4,5}$ alt yörüngesel grafi için,

$$\dots \leftarrow \underbrace{\frac{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}}{5}}_{(n+1). \text{ köşe}} \leftarrow \underbrace{\frac{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}{5}}_{n. \text{ köşe}} \leftarrow \dots \leftarrow \underbrace{\frac{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}{5}}_{3. \text{ köşe}} \leftarrow \underbrace{\frac{4 - \frac{1}{3}}{5}}_{2. \text{ köşe}} \leftarrow \underbrace{\frac{4}{5}}_{1. \text{ köşe}} \leftarrow \frac{1}{0} = \infty \tag{32}$$

sola yönlenmiş minimal uzunluklu sonsuz yolundaki n . köşenin gidebileceği en uzak köşe olan $(n + 1)$. köşenin değeri $A_n = (-1)^n F_{2n}$ ve $B_n = -A_{n+1} = (-1)^n F_{2n+2}$ olmak üzere (31) den $\frac{u-F_{2n}}{N}$ olduğundan,

(32) yolunda örneğin, 19. köşenin bağlanabileceği en uzak köşe olan 20. köşenin değerini bulmak için $n = 19$ olmak üzere 5.10. Sonuç’ tan, 5.11. Örnek’ te olduğu gibi,

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}F_{2n-2} & (-1)^nF_{2n} \\ (-1)^{n+1}F_{2n} & (-1)^nF_{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{36} & -F_{38} \\ F_{38} & -F_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} 14930352 & -39088169 \\ 39088169 & -102334155 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisi kullanarak bu 20. köşenin değeri

$$\underbrace{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \dots - \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}}}}_{20. \text{ köşe}} = \frac{4 - \frac{F_{38}}{F_{40}}}{5} = \frac{4 - \frac{39088169}{102334155}}{5} = 0.7236067977499789781818$$

olur. Ayrıca yukarıda elde edilen matris kullanılarak ilgili 19. köşenin değeri de benzer şekilde

$$\underbrace{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 - \dots - \frac{1}{3}}}}_{19. \text{ köşe}} = \frac{4 - \frac{F_{36}}{F_{38}}}{5} = \frac{4 - \frac{14930352}{39088169}}{5} = 0.7236067977499790281811$$

olarak bulunur.

Öte yandan $u = 4$ ve $N = 5$ olmak üzere $\mathbf{F}_{4,5}$ alt yörüngesel grafi için, $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ kongrüans denkleminde $k = 2$ bulunur. Dolayısı ile (Deger, 2.9. Teorem, 2017) den $A_n = (-1)^n n$ ve $B_n = -A_{n+1} = (-1)^n (n+1)$ olmak üzere $\mathbf{F}_{4,5}$ alt yörüngesel grafiındaki sağa yönlenmiş minimal uzunluklu sonsuz yoldaki $(n+1)$. köşenin değeri

$$\frac{u + T_n(0)}{N} = \frac{u + \frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{4 - \frac{A_n}{A_{n+1}}}{5} = \frac{4A_{n+1} - A_n}{5A_{n+1}} = \frac{5n+4}{5n+5}$$

olarak elde edilir. Dolayısı ile $\mathbf{F}_{4,5}$ alt yörüngesel grafiındaki ilgili 19. köşenin değeri

$n = 18$ için

$$\frac{5.18+4}{5.18+5} = 0.9894736842105263157895 \quad \text{ve}$$

onunla bağlanan 20. köşenin değeri ise

$$n = 19 \text{ için } \frac{5.19+4}{5.19+5} = 0.99 \text{ olarak bulunur.}$$

$k = 2$ için (18) ve (19) matris bağlantılarından $\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^n$ olup aynı 19. köşenin değeri $n = 19$ için, $\begin{pmatrix} A_{18} & A_{19} \\ -A_{19} & -A_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} 18 & -19 \\ 19 & -20 \end{pmatrix}$ matrisi kullanılırsa

$$\underbrace{4 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2}}}}_{19. \text{ köşe}} = \frac{4 - \frac{A_{18}}{A_{19}}}{5} = \frac{4 + \frac{18}{19}}{5} = 0.9894736842105263157895$$

ve onun bağlandığı en uzak köşe olan 20. köşe ise

$$4 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}} = \frac{4 + \frac{A_{19}}{A_{20}}}{5} = \frac{4 + \frac{19}{20}}{5} = 0.99$$

20. köşe

olarak tekrar elde edilir.

Burada dikkat edilirse 3.6. Sonuç' tan $4^2 \not\equiv -1 \pmod{5}$ olduğundan $F_{4,5}$ alt yörüngesel grafi kendisi ile eşleşmiş bir alt yörüngesel graf değildir. Böylece 6.2. Teorem' deki şartlara göre $l = 3$ olduğundan $k = N - l = 2$ dir. Sol yönlendirme için örnekte özel olarak hesaplanan köşe değerleri arasındaki fark $v_{19} - v_{20} = 4.99993 * 10^{-17}$ ve sağ yönlendirme için fark ise $v_{20} - v_{19} = 0.0005263157895$ olarak bulunur. Eğer $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafi kendisi ile eşleşmiş ise bu

farklar eşit ve $k = l = N$ olur. Şekil 1' deki $F_{1,2}$ alt yörüngesel grafi kendisi ile eşleşmiştir ve bu durum kolaylıkla görülebilir.

5.11. Örneğe geri dönülürse $k = 3$ ve $u^2 - lu + 1 \equiv 0 \pmod{N}$ olmak üzere $u = 1$ ve $N = 5$ için $l = N - k = 2$ olarak bulunur. Böylece $F_{1,5}$ alt yörüngesel grafi için,

$$\dots \leftarrow \underbrace{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}}_{(n+1). \text{ köşe}} \leftarrow \underbrace{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}}_{n. \text{ köşe}} \leftarrow \dots \leftarrow \underbrace{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}_{3. \text{ köşe}} \leftarrow \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{2. \text{ köşe}} \leftarrow \underbrace{\frac{1}{5}}_{1. \text{ köşe}} \leftarrow \frac{1}{0} = \infty \tag{33}$$

sola yönlenmiş minimal uzunluklu sonsuz yolundaki n . köşenin bağlanabileceği en uzak köşe olan $(n + 1)$. köşenin değeri ise, $A_n = (-1)^n n$ ve $B_n = -A_{n+1} = (-1)^n (n + 1)$ olmak üzere yazılırsa $\frac{u - T_n(0)}{N} = \frac{u - \frac{A_n}{B_n}}{N} = \frac{1 + \frac{A_n}{A_{n+1}}}{5} = \frac{A_{n+1} + A_n}{5A_{n+1}} = \frac{1}{5n+5}$ olarak elde edilir. Dolayısı ile $F_{1,5}$ alt yörüngesel grafiındaki ilgili 19. köşenin değeri $n = 18$ için $\frac{1}{5.18+5} = 0.01052631578947368421053$ ve

onunla bağlanan 20. köşenin değeri ise $n = 19$ için $\frac{1}{5.19+5} = 0.01$ olarak bulunur.

$l = 2$ için (18) ve (19) matris bağlantılarından $\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ -A_n & -A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^n$ olup aynı ilgili 19. köşe $n = 19$ için,

$$\begin{pmatrix} A_{18} & A_{19} \\ -A_{19} & -A_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} 18 & -19 \\ 19 & -20 \end{pmatrix}$$

matrisi kullanılırsa

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}}_{19. \text{ köşe}} = \frac{1 - \frac{A_{18}}{A_{19}}}{5} = \frac{1 - \frac{18}{19}}{5} = 0.01052631578947368421053$$

ve onun bağlandığı en uzak köşe olan 20. köşe ise

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}} }_{20. \text{ köşe}} = \frac{1 - \frac{A_{19}}{A_{20}}}{5} = \frac{1 - \frac{19}{20}}{5} = 0.01$$

olarak tekrar elde edilir.

7. Kaynaklar

Akbas, M., 2001, On Suborbital Graphs for the Modular Group, Bulletin of the London Mathematic Society, 33, 647-652.

Biggs, N.L. ve White, A.T., 1979, Permutation Groups and Combinatorial Structures, London Mathematical Society Lecture Note Series 33, Cambridge University Press, Cambridge, 140p.

Cuyt, A., Petersen, V.B., Verdonk, B., Waadeland, H. ve Jones, W.B., 2008, Handbook of Continued Fractions for Special Functions, Springer, New York, 431p.

Deger, A.H., Besenk, M. ve Guler, B.O., 2011, On Suborbital Graphs and Related Continued Fractions, Applied Mathematics and Computation, 218, 3, 746-750.

Deger, A.H., 2017, Vertices of Paths of Minimal Lengths on Suborbital Graphs, Filomat, 31, 4, 913-923.

Diamond, H.G., 1982, Elementary Methods in the Study of the Distribution of Prime Numbers, Bulletin of the American Mathematical Society, 7, 3, 553-589.

Ford, L.R., 1951, Automorphic Functions, American Mathematical Society, Chelsea Publishing Series 85, 333p.

Guler, B.O., Besenk, M., Deger, A.H. ve Kader, S., 2011, Elliptic Elements and

Circuits in Suborbital Graphs, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40, 2, 203-210.

Jones G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., 1991, The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Mathematical Society Lecture Note Series, 160, 316-338.

Kader, S., Guler, B.O. ve Deger, A.H., 2010, Suborbital Graphs for a Special Subgroup of the Normalizer of $\Gamma_0(m)$, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 34, 4, 305-312.

Neumann, P.M., 1977, Finite Permutation Groups, Edge Coloured Graphs and Matrices, Topics in Group Theory and Computation, Curran M.P.J. (eds.), Academic Press, London, 118p.

Niven, I., Zuckerman, H.S. ve Montgomery, H.L., 2008, An Introduction to the Theory of Numbers, Wiley India Pvt. Limited, 545p.

Sarma, R., Kushwaha, S. ve Krishnan, R., 2015, Continued Fractions Arising From $\mathcal{F}_{1,2}$, Journal of Number Theory, 154, 179-200.

Sims, C.C., 1967, Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische Zeitschrift, 95, 76-86.

Tsukuzu, T., 1982, Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Press, Cambridge, 328p.