PAÜEFD, 62, 362-404 [2024] https://doi.org/10.9779/pauefd.1359924

Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
ISSN: 2757-8127

# Matematik Öğretmeni Adaylarının Tümdengelimsel Akıl Yürütme Yoluyla İspat Anlayışları *

Emine Gaye ÇONTAY[1]

**Özet**

*Bu çalışmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının tümdengelimsel akıl yürütme yoluyla ispat yapma becerilerini, ispat yöntemlerine ilişkin bilgilerini ve ispat yöntemlerini kullanma becerilerini ispat şemalarıyla ilişkilendirerek "ispat anlayışları" bağlamında ortaya koymaktır. Çalışma bir devlet üniversitesinde son sınıfta öğrenim gören 44 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat anlayışlarını ortaya koyması amacıyla iki farklı ölçme aracı geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının büyük bölümünün ispat becerilerinin zayıf olduğunu, ispat yaparken kullandıkları yöntemlerden habersiz biçimde önermede yer alan değişkene değerler vererek ispatı yapılandırdıklarını, çoğunlukla deneysel ispat şeması göstergeleri ile hareket ettiklerini ortaya koymuştur. Öğretmen adayları ispat yöntemlerine ilişkin bilgileri açısından değerlendirildiklerinde, en çok aksine örnek verme ile ispat yöntemine ilişkin bilgiye sahip oldukları görülmüştür. Öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket ettikleri tek ispat sorusu ise durumlarla ispat yöntemi ile çözülebilecek ispat sorusudur. Analitik ispat şeması göstergeleriyle ispatlarını yapılandıran öğretmen adaylarından hiçbirinin, kullandıkları ispat yöntemini bilmedikleri belirlenmiştir. Dolayısıyla bu çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışları yetersiz bulunmuştur.*

**Makale Bilgileri**
Araştırma Makalesi

Gönderim Tarihi 13/09/2023
Kabul Tarihi 02/04/2024
Yayın Tarihi 23/09/2024

**Anahtar Kelimeler**
Matematik öğretmeni adayı, İspat becerisi, İspat öğretimi, İspat şeması, İspat yöntem bilgisi

---

** Bu çalışma Pamukkale Üniversitesi 2019BSP017 numarali BAP projesindeki verilerin bir kısmı kullanılarak oluşturulmuştur. Bunun yanında bu projeye ait veriler CERME 13 kongresinde poster bildiri olarak sunulmuştur.*
*[1] Pamukkale Üniversitesi, 0000-0002-6446-9217, germec@pau.edu.tr*



**Atıf:**
Çontay, E. G. (2024) Matematik öğretmeni adaylarının tümdengelimsel akıl yürütme yoluyla ispat anlayışları *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [PAÜEFD], 62, 362-404. https://doi.org/10.9779/pauefd.1359924*

## Giriş

Yunanlılar tarafından ortaya atılan ispat kavramı zamanla farklı kültürler içerisinde çeşitli biçimlerde ele alınarak günümüze kadar gelmiştir. Antik çağda; açıkça belirlenmiş postulatlardan çıkarım yapma olarak aksiyomatik sistem içerisinde ele alınırken, 17. yüzyılda tamamen farklı bir şekilde sembolik gösterimlerle ifade edilerek limit, süreklilik gibi Analiz'in önemli kavramlarıyla birlikte ilerlemiştir (Almeida, 2003; Grabiner, 2012; Kleiner, 1991; Reid ve Knipping, 2010). 19. yüzyıla doğru sezgisel geometrik unsurlar eklenerek aksiyomatik sisteme geçilmiş ve ispat böylelikle matematiksel mantıkla beraber ilerlemiştir. Daha sonra, Öklit geometrisinin temelleri ele alınmış ve Öklit dışı geometriler ortaya çıkmıştır. 20. yüzyılda bilgisayarların matematikte rol almasıyla beraber aksiyomatik sistem yeniden matematiğin temel alanlarında yer almaya başlamış; matematik içerisinde ispatın rolü ve anlamı yeniden düşünülmeye başlamıştır. Matematiksel ispat, "sosyal ispat", "yarı deneyselci ispat", "sosyal süreç olarak ispat" gibi yeni kavramlar ile ele alınmaya başlanmıştır. Bu kavramlar ile ispatın mutlak doğru, biçimselci ve formel yapısı varsayımları reddedilmiştir. Örneğin Lakatos bu dönemlerde matematiğin yanılabilir olduğunu ve önermelerin örnekler ve olası reddetmelere bağlı olduğunu ortaya atmıştır. Bu tür gelişimler ise okullardaki "sosyal ispat" kavramının doğmasına sebep olmuş; ispat kavramı sadece formel biçimiyle değil, informel biçimde de ele alınarak ispatlamanın uygun bir standardı olarak kabul edilmeye başlanmıştır. (Almeida, 2003; Grabiner, 2012; Hanna, 1990; Kleiner, 1991; Reid ve Knipping, 2010). Böylelikle kabul edilebilir ispat kavramı gelişmiş (Hanna, 1990); matematiksel ispat bir problem çözme etkinliği olarak fikirlerin kesinleştiği son basamak olarak görülmüştür (Tall, 2002). Mason, Burton ve Stacey'in (2010) bu bağlamdaki sözü meşhurdur: "Kendini ikna et, arkadaşını ikna et, düşmanını ikna et!" (s. 87). Böylelikle; bu yeni ispat biçimi, "Yetkin yargılarla yargılanan ikna edici bir argüman" olarak informel ispat bağlamında yerini almıştır (Hersh, 1993; s. 389). Bundan sonraki süreçlerde ise akıl yürütme ve ispatın matematiğin temel parçalarından olduğu kabul edilmiş ve okul öncesi dönemden en üst düzeye kadar öğrencilere kazandırılması gerekliliği fikri eğitimde benimsenmeye başlamıştır (NCTM, 2000; Common Core, 2010). Böylelikle matematik eğitiminin önemli bir amacı haline gelen ispat ve ispatlama kavramları; öğretim programlarına dâhil edilmek istenmiştir (Mariotti, 2006). NCTM (2000) ispatın tüm konularda sınıf tartışmalarının doğal bir parçası haline gelmesi gerektiğini vurgulamıştır. İspatın eğitimde yer alması gerekliliğini savunan yenilikçi bakış açılarına karşın; öğretmenlerin çoğu matematiksel ispat hakkında sınırlı bilgi ve anlayışa sahiptir ve bu yeni bakış açılarıyla matematiksel ispatları öğretmek için yeterli eğitim almadan öğretmen olmaktadırlar (Knuth, 2002; Yoo, 2008). Fakat, üniversite öğretmen yetiştirme programları matematiksel yenilikleri uygulamada uygun bir yere sahiptir (Varghese, 2007). Bu yüzden, matematik öğretmeni adaylarının, matematiksel ispata ilişkin anlayışlarının ortaya konması önemli görülmüştür.

Matematik öğretmen adaylarının tümdengelimsel akıl yürütme ile ispat süreçlerini ortaya koymak için; belirli ispat yöntemlerinden bahsetmek yararlı görülmektedir.

## İspat Yöntemleri

İspatlanmak istenen önermenin totolojik yapıda olduğu varsayıldığında; "p doğru ise q doğrudur" şeklindeki önerme ya doğru ya da yanlıştır. Bu çalışmada kullanılan ispat yöntemleri, önermenin yanlış olma hali ve doğru olma haline göre sunulmuştur (Uygur Kabael, 2020):

### *Önermenin Yanlış Olma Hali*

**Aksine Örnek Vererek İspat.** p doğru ise q doğrudur (p=>q)' önermesinin yanlış olması durumunda p önermesi doğru iken q önermesinin sağlanmadığı en az bir durum vardır, bu durum örneklendirilerek ve p=>q önermesinin yanlış olduğu ispatlanabilir.

### *Önermenin Doğru Olma Hali*

**Doğrudan İspat.** p doğru ise q doğrudur (p=>q)' önermesinin yanlış olması durumunda p önermesi doğru iken q önermesinin sağlanmadığı en az bir durum

**Tüketerek İspat.** Sonlu sayıda elemanı olan bir E kümesi kabul edilsin. p önermesindeki özelliğin doğru olduğu varsayılır. q önermesindeki özelliğin doğruluğu; E kümesindeki her eleman için gösterilebilecek sayıda elemandan oluştuğunda önerme her eleman için ayrı ayrı gösterilir ve tüketerek ispat yapılmış olur.

**Durumlarla İspat.** Bazı durumlarda önermenin, bir kümenin belirli alt kümelerinde (sınırlı sayıda) olan elemanların farklı özelliklerine göre incelenir. Bu durumda önermenin doğrudan ispatı her bir alt küme için yapılır. Sonsuz kümelerde bu ispat yöntemi kullanılamaz.

**Dolaylı İspat**. Önceki sonuçların "p doğru ise q doğrudur" önermesinin doğrudan ispatı için yeterli olmadığı durumlarda dolaylı ispat yöntemi kullanılır. Önermenin mantıksal denk olduğu diğer önermenin veya değilinin yanlış olduğu gösterilir.

**Olmayana Ergi (Karşıt Ters) ile İspat.** "p doğru ise q doğrudur" yerine bu önermenin mantıksal olarak denk karşılığı olan q' doğru ise p' doğrudur (q'=>p') önermesi doğrudan ispatlanır.

**Çelişki ile İspat.** "p doğru ise q doğrudur" önermesinin değili olan önermenin (p^q') yanlışlığı gösterilir. (p^q') önermesinin doğru olduğu varsayılarak çelişkiye ulaşılır; varsayımın yanlışlığı, yani p=>q önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

## İspat Şemaları

Matematik eğitiminde önemi vurgulanan ve yukarıda da çeşitli yöntem biçimleriyle ele alınmış olan ispat ve ispatlama kavramı, Harel ve Sowder (1998) tarafından da sosyal ispatlar bağlamında ele alınmıştır. İspatlama okullarda kullanılan sosyal, yani informel ispatlar açısından ele alındığında "Bir gözlemin doğruluğu hakkındaki şüpheleri oluşturmak ya da ortadan kaldırmak için birey tarafından ortaya konan süreç" (Harel ve Sowder, 1998, s. 241) olarak tanımlanabilir. Harel ve Sowder (1998), ispatlama sürecini "aslını anlama" ve "ikna etme" olarak iki sürece ayırmıştır. Aslını anlamayı, "Bireyin bir gözlemin doğruluğu hakkında kendi şüphelerini ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu bir süreç" ikna etmeyi "Bir gözlemin doğruluğu hakkında diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu bir süreç" (Harel ve Sowder, 1998, s.241) olarak tanımlamışlardır. Böylelikle ispat şeması kavramı: "Bir bireyin ispat şeması o birey için aslını öğrenme ve ikna etmeyi oluşturan şeyleri içerir" (Harel ve Sowder, 1998, s.244) olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla bireylerin ispat şemalarının ortaya çıkarılmasının, onların ispat süreçlerinde kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettiklerinin belirlenmesi açısından gerekli olduğu söylenebilir. Sowder ve Harel (1998) ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç şekilde gruplandırmışlardır:

### *Dışsal İspat Şeması*

Bireylerin aslını anlama ve ikna etme durumları dışsal kaynaklıdır. Bu dışsal kaynaklar bir öğretmene ya da bir kitaba dayanan bir otorite (otoriter ispat şeması); bir argümanın görünümü, biçimi ve alışılagelen formatı (alışkanlık edinilmiş ispat şeması); veya sembollerin anlamdan uzak ve durum içindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden, anlamsız manipülasyonu (sembolik ispat şeması) olarak ortaya çıkabilmektedir (Sowder ve Harel, 1998).

### *Deneysel İspat Şeması*

Dışsal ispat şeması göstergeleriyle hareket eden bireyler varsayımlarını duyusal deneyimlere veya fiziksel kanıtlara dayandırarak geçerli kılma ya da reddetme davranışları sergilerler. Bireyler bir durumun doğruluğunu ya da yanlışlığını hisleriyle sezinleyip güçlü kanıt bulamadıklarında, çizim ile ikna çabasına girdiklerinde, deneysel algısal ispat şemasına; varsayımları değerlendirirken ikna etme çabalarını bir ya da birden fazla örnekle test ederek oluşturduklarında deneysel temel örnekler ispat şemasına sahiptir.

### *Analitik İspat Şeması*

Bireyler varsayımlarını mantıksal çıkarım yoluyla geçerli kıldıklarında analitik ispat şemasına ilişin göstergelerle hareket ederler. Analitik dönüşümsel ispat şemasına sahip bireyler gerekçelendirmelerini durumların genel yönleriyle ilişkilendirir ve genel bir analitik çatıya yerleştirirler. Analitik aksiyomatik ispat şeması göstergeleri ile hareket eden bireyler ise gerekçelendirmelerin başlangıç noktasının tanımsız terim ve aksiyomlar olduğunu bilerek aksiyomatik sistem içerisinde rahatça çalışabilirler.

Sowder ve Harel'a (1998) göre ispat şemalarının sınıflandırılması kısmi hiyerarşik bir yapıya sahiptir. Örneğin; dönüşümsel ispat şeması aksiyomatik ispat şemasının bir ön koşulu olarak kabul edilebilir veya dışsal ispat şemaları analitik ispat şemalarının gelişiminde önemli sayılmaktadır. Bunun yanında bireyler aynı anda birden fazla ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket edebilirler.

## İlgili Alanyazın ve Çalışmanın Önemi

Bu çalışmada bireylerin ispat anlayışları; onların ispat becerileri, ispata ilişkin yöntemsel bilgileri ve ispat şemaları ile birlikte ele alınarak bir bütün olarak ortaya konmaya çalışılmıştır.

İlgili alanyazın incelendiğinde matematik öğretmeni adaylarının ispat konusundaki becerilerini ve ispat şemalarını ortaya koyan birçok çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmalar matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarını incelenmesine yönelik yapılan araştırmalar (Çontay ve Paksu, 2018; Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğ., 2010; Pala ve Narlı, 2018; Sarı ve diğ., 2007; Sears, 2019; Şengül ve Güner, 2013; Uygan ve diğ., 2014) ve öğretmen adaylarının ispat bilgilerini veya ispat süreçlerini inceleyen araştırmalar (Barak 2018; Doruk ve Kaplan 2013; Erşen ve Ocak, 2017; Güler, 2013; Güler ve Ekmekçi, 2016; Güler ve diğ., 2012; İmamoğlu ve Yontar Toğrol, 2015; Karakuş ve diğ., 2017; Karunakaran ve diğ., 2014; Noto ve diğ., 2019; Öztürk ve Kaplan, 2022; Pekşen Sağır, 2013, Stylianides ve diğ., 2007; Şahin, 2016; Şen ve Güler, 2022; Zaimoğlu, 2012) olarak sınıflandırılabilir.

Araştırmalar, öğretmen adaylarının (Gholamazad ve diğ., 2004; İskenderoğlu ve diğ., 2010; Uygan ve diğ., 2014) deneysel ispat şemasını ağırlıklı olarak kullandıklarını ya da deneysel olarak oluşturulan argümanları ispat olarak gördüklerini göstermektedir. Bazı çalışmalar ise sınıf öğretmeni adaylarının (Oflaz ve diğ., 2016) deneysel ve dışsal ispat şemaları kullandıkları yönünde bulgulara sahiptir. Stylinou ve diğerleri (2006) çalışmalarında benzer şekilde lisans öğrencilerinin birçoğunun deneysel ispat şemasını kullandıklarını ortaya koymuştur. Sears (2019) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının dışsal, deneysel ve tümevarımsal (empirik) ispat şemasını ortaya en sıklıkla ortaya koyduklarını belirlemiştir.

Matematik öğretmeni adaylarının ispat bilgilerini veya ispat süreçlerini inceleyen çalışmalardan bazıları (Güler, 2013) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat süreçlerini incelemeyi amaçlamış; bazıları (Güler ve diğ., 2012; Stylianides ve diğ., 2007) matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat bilgilerini ortaya koymaya çalışmış; bir tanesi (Karakuş ve diğ., 2017) fen edebiyat fakültesinin pedagojik formasyon eğitimine devam eden matematik bölümü öğrencileri ile eğitim fakültesinde öğrenim gören matematik öğretmeni adayları arasındaki ispat yapma düzeylerini karşılaştırmış; diğer bir grup (Doruk ve Kaplan, 2013; Güler ve Ekmekçi, 2016) matematik öğretmeni adaylarının ispatı değerlendirme becerilerini incelemiştir. Bir kısım araştırma ise (Barak, 2018; Doruk ve Kaplan, 2017; Öztürk ve Kaplan, 2022; Pekşen Sağır, 2013; Şahin, 2016) matematik öğretmeni adaylarının belirli konulardaki ispat yapma becerilerini incelemiştir. Bunlar arasında Doruk ve Kaplan (2017) öğretmen adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özelliklerini ortaya koymaya çalışmış; Öztürk ve Kaplan (2022) matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma süreçlerini incelemiş, Şen ve Güler (2022) öğretmen adaylarının Van Hiele modeline dayalı eğitimlerde ispat yazma becerilerindeki gelişimi incelemişlerdir.

Doruk (2019) matematik öğretmeni adaylarının tamsayılarla ilgili ispat yöntemlerini belirleme becerilerini incelediği çalışmasında öğretmen adaylarının tümevarım, doğrudan ispat, karşı örnek yöntemiyle ispatı belirlemede başarılı oldukları, çelişkiyle ispat yöntemini belirlemede başarısız olduklarını belirlemiştir. Öğretmen adaylarının zıt ispat yerine doğrudan ispatı, çelişki ile ispat yerine zıt ispatı, çelişkili ispat yerine doğrudan ispatı kullandıkları raporlanmıştır. Bunun yanında öğretmen adayları herhangi bir ispat yöntemini değerlendirirken çoğunlukla o yöntemi doğrudan ispat olarak değerlendirme eğiliminde olmuşlardır. Demircioğlu (2022) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının yanlış ifadeyi ispatlama becerilerini değerlendirmeyi amaçladığı çalışmada "doğru olduğunu kanıtla ya da göster" ifadelerinde sorgulama yapmadıklarını, alternatif ispat yöntemleri konusunda bilgi sahibi olmadıklarını ve bildikleri ispat yöntemlerini kullanmakta ısrarcı olduklarını belirlemiştir. Doruk ve Kaplan (2013) matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme süreçlerinde başarısız olduklarını, daha çok ezbere yollarla ispatları öğrenip yapılandırdıklarını ortaya koymuşlardır. Benzer şekilde Doruk ve Kaplan (2017) matematik öğretmeni adaylarının önermelerin doğruluklarını belirlemede güçlük yaşamadıklarını fakat ispat yapma becerilerinin zayıf olduğunu ortaya koymuşlardır. Bunun yanında yüksek akademik başarıya sahip öğretmen adaylarının analitik ispat şemasına, ortalama başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının dedüktif, deneysel ve dışsal ispat şemalarına sahip olduklarını belirlemişlerdir. Uğurel ve diğerleri (2016) matematik öğretmeni adaylarının verilen önermenin anlamını anlamada, ispata başlayacakları yeri bilmede, ispat için uygun yöntemi bulmada, kullanmada, ispat oluşturmada ve önermenin mantıksal yapılarını tanımlamada sıkıntılar yaşadıklarını belirmemişlerdir. Köğce (2013) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının önermeleri sayısal değerler vererek doğrulamanın ispat için yeterli olduğu inancına sahip olduğu sonucuna varmıştır. Güler ve Ekmekçi (2016) öğretmen adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin zayıf olduğunu ve zayıf argümanlar ürettiklerini belirlemiştir. Barak (2018) matematik öğretmeni adaylarının temel kavramları ispatlama süreçlerinin istenen düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Pala ve Narlı (2018) matematik öğretmeni adaylarının formel ispatları oluşturmada başarısız olduklarını ortaya koymuşlardır. İmamoğlu ve Yontar Toğrol (2015); matematik öğretmeni adaylarının ispat yöntemlerini nasıl kullandıklarını inceledikleri çalışmada, birçok yöntemle ispatlanabilecek bir önermeyi öğrencilerin daha çok doğrudan ispat ve durumlarla ispat yöntemini tercih ettiklerini ve çoğunun ispatlarını yapılandırmada zorluk yaşadığını belirtmişlerdir. Çalışmada öğretmen adaylarının ve matematik lisans öğrencilerinin deneysel argümanlarla ikna olma çabasına eğilimli oldukları belirlenmiştir. Noto ve diğerleri (2019), öğretmen adaylarının geometrik nesneleri görselleştirerek bunlarla ilgili kural oluşturmada, ispat yaparken kullanılan dil ve sembolleri anlamada, ispatı oluşturmak için tanımları kullanmada sorunlar yaşadıklarını, ispata nasıl başlayacaklarını bilmediklerini belirtmişlerdir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarına yöneltilen her bir önerme farklı yöntemlerle çözülebilecek niteliktedir. Özetlenen çalışmalar incelendiğinde ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat süreçlerine ilişkin yapılan çalışmalar arasında tümdengelimsel akıl yürütme becerilerini bu çalışmada ele alınan konu alanları bağlamında ve yöntem çeşitliliğiyle ele alan çalışmaya rastlanmamıştır. Bunun yanında; bu çalışmadaki öğretmen adayları ispat ile ilgili tüm dersleri almış olarak dördüncü sınıfta öğrenim gören öğrencilerden oluşmuştur. Çalışma; ispat becerilerini konu alan diğer çalışmalardan bu yönüyle de ayrılmaktadır. İlgili alanyazında öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmada ise öğretmen adaylarının ispat şemaları; ispat yapmaya yönelik becerilerinin ve ispat yöntemleri hakkındaki bilgi ve fikirlerinin ortaya çıkarılmasıyla beraber "ispat anlayışları" bağlamında ele alınmıştır. Bu yönüyle bu araştırmanın matematik öğretmeni adaylarının tümdengelimsel ispat becerilerini, ispat şemalarıyla ilişkilendirerek sunması açısından alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmüştür.

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerilerini, ispata ilişkin yöntemsel bilgilerini ve ispat şemalarını beraber ele alarak ispat anlayışlarını ortaya koymaktır.

## Yöntem

Olaylar, olgular ve bağlamların sınırları açık ve net olmadığı durumlarda olguyu gerçek hayat durumları içinde inceleyen araştırmalar durum çalışması niteliğinde olarak değerlendirilmektedir (Yin, 2003). Bu çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması niteliğindedir.

Çalışmanın analiz birimi matematik öğretmen adaylarının ispat anlayışlarıdır. Matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışları onların ispat becerileri, ispat bilgileri ile ele alınarak ispat şemaları ile desteklenmiştir. Yin'e (2003) göre durum çalışması birden fazla analiz birimi içerdiğinde iç içe geçmiş durum çalışması olarak tanımlanmaktadır. Dolayısıyla bu çalışmanın deseni iç içe geçmiş durum çalışması olarak belirlenmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışları onların ispat becerileri, ispat bilgileri ile ele alınarak ispat şemaları ile desteklenmiştir.

Bu çalışma 2019BSP017 numaralı BAP projesinin Pamukkale Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimleri Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'nun 09.09.2020 tarih ve 68282350/2018/G07 sayılı izni ve *93803232-622.02/ sayılı kararı* kapsamında gerçekleştirilmiştir.

## Katıımcılar

Bu çalışma Ege Bölgesi'nde bir devlet üniversitesinde Matematik Eğitimi ABD'da son sınıfta öğrenim gören 46 matematik öğretmeni adayı (sekiz erkek, 38 kadın) ile gerçekleştirilmiştir. Nitel araştırmalarda aktarılabilirliği artırmak için hem tipik olarak karşımıza çıkan olay ve olguları hem de bunların değişkenlik gösteren özelliklerini ortaya koymak amacıyla (Yıldırım ve Şimşek, 2021) amaçlı örnekleme ile çalışma grubu tayin edilmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat ile ilgili tüm dersleri almış olması istenmiştir. Bu yüzden öğretmen adayları, içinde ispat uygulamaları yer alan Elemanter Sayı Kuramı ve bunun yanında ispata ilişkin bilgiler ve teoremler barındıran Analiz I ve II, Soyut Matematik, Cebir, Analitik Geometri derslerini almış olan ve dördüncü sınıfta öğrenim gören matematik öğretmeni adayları arasından gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adayları, kendilerine verilen sıra numarasına göre isimlendirilmiştir (Ö1, Ö2, Ö3, gibi).

## Çalışmada Kullanılan Ölçme (Veri Toplama) Araçları

Çalışmada matematik öğretmeni adaylarının tümdengelimsel ispat anlayışlarının ortaya konması için veri toplama araçları geliştirilirken üç matematik eğitimi profesöründen, bir matematik eğitimi doktoralı öğretim görevlisinden ve bir matematik eğitimi doktoralı matematik öğretmeninden uzman görüşü alınmıştır. Ölçme araçları son halini pilot uygulama sonrasında almıştır. Uzman görüşleri uzmanların yorumlarının haricinde ölçme araçlarının araştırmanın amacı için uygunluğuna, zorluğuna, açıklık netlik ve anlaşılırlığına göre değerlendirmelerini de gerektirmiştir. Bunun için uzmanlardan 1 ile 5 arası puanlama değerlendirmesi vermeleri istenmiştir. Uzman görüşleri ve pilot uygulama sonucunda ölçme araçları son halini almıştır.

### *Tümdengelimsel Akıl Yürütme Ölçme Aracı*

Tümdengelimsel Akıl Yürütme Ölçme Aracı (TAÖA), Sayılar alanında araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarına tümdengelimsel akıl yürütme ile ispat yapmaları gereken orta derecede kolaylıkta beş ispat sorusu yöneltilmiştir. İlk soru doğrudan ispat, ikinci soru durumlarla ispat, üçüncü soru çelişki yoluyla ispat, dördüncü soru olmayana ergi ile ispat, beşinci soru ise karşı örnek ile ispat ile çözülebilecek niteliktedir. Sorular aşağıdaki gibidir:

1) n>m>0 olmak üzere; (m+1)/(n+1)>m/n; 2) n∈Z için n^2+3n+7 tektir.

3) x^2-y^2=1'i sağlayan hiçbir tamsayı yoktur. 4) A, B, C kümeleri için C\D⊂A∩B ve x∈C olsun. Eğer x∉A ise x∈ D.

5) n>1 ve asal bir sayı olsun. 2^n-1 asaldır.

Öğretmen adaylarına her sorunun sonunda "Hangi yöntemi kullandın? Açıklar mısın?" sorusu yöneltilmiş ve yazmaları için alan bırakılmıştır. Alt başlıklar küçük harfle ve yukarıdaki formata uygun yazılmalıdır. Burada olduğu gibi alt bölümlerde bu formata dikkat edilmelidir.

### *İspat Yöntemleri Bilgisi Ölçme Aracı*

İspat Yöntemleri Bilgisi Ölçme Aracı (İYÖA) öğretmen adaylarının ispat yöntemleri hakkındaki bilgilerini ölçmek amacıyla oluşturulmuştur. Öncelikle öğretmen adaylarından bildikleri ispat yöntemlerini açıklamaları ve daha sonra doğrudan ispat, olmayana ergi ile ispat, çelişki yoluyla ispat, aksine örnek ile ispat ve deneme yoluyla ispat yöntemlerini tanımlamaları istenmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarının tümdengelimsel ispat becerileri ölçülmek istenmiş ve bu yöntemler hakkındaki bilgileri saptanmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemaları ise açıklamaları ve ispat davranışları gözlenerek incelenmiştir.

## Veri Toplama Süreci

### *Pilot Uygulama*

Pilot uygulama, aynı üniversitenin son sınıfında öğrenim gören iki kadın iki erkek öğretmen adayı ile 2020-2021 eğitim öğretim yılının güz döneminde gerçekleştirilmiştir. TAÖA ve İYÖA, Covid-19 pandemisi sebebiyle çevrimiçi olarak uygulanmıştır. TAÖA, pilot uygulamada iki kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda 5 adet ispat sorusu, ikinci kısımda ise aynı soruların verili ispatları yer almıştır ve öğretmen adaylarından bu ispatları değerlendirmeleri istenmiştir. Pilot uygulama sonrasında; ilk bölümde öğretmen adaylarından geniş ve derinlemesine bilgi alındığı görülmüş ve ikinci bölümün öğretmen adaylarına yöneltilmesinden vazgeçilmiştir. İYÖA ise pilot uygulama sonrası uygulanabilir bulunmuştur. TAÖA ve İYÖA, Zoom uygulaması yardımıyla powerpoint sunumuyla ekran paylaşımı yapılarak yöneltilmiştir ve kayıt altına alınmıştır. Video kayıtları yanında ispat çözümleri fotoğraflanmıştır. TAÖA ve İYÖA pilot uygulamaları 1 saat ile 1 saat 16 dakika aralığında gerçekleşmiştir. Pilot uygulama sonrasında tüm ispat şeması çeşidi göstergelerine rastlanmıştır. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar ve ifadeleri doğru, yanlış ve yarı doğru sınıflandırmaları altında da toplanmış ve bu sınıflar altından incelenerek ortak tepkileri belirlenmiştir. Ortak ifadeler gruplandırılmış, daha sonra bu ifadeler temalar altında toplanmıştır. Dolayısıyla ölçme araçlarının gerçek uygulama için uygulanabilir olduğu ve pilot uygulamanın veri çeşitliliğini ortaya koymada yeterli olduğu belirlenmiştir.

### *Uygulama*

TAÖA ve İYÖA öğretmen adaylarına 2021-2022 öğretim yılının güz döneminde yazılı olarak üniversite dersliklerinde aynı günde arka arkaya sessiz bir ortamda iki sınıfta uygulanmıştır. Yazılı uygulamaların her biri bir ders saati ile iki ders saati arasında sürmüştür. Uygulama sonucunda, 44 öğretmen adayı tüm yazılı formları cevaplamışlardır. (Bu çalışma ilgili projenin bir parçası olduğundan iki öğretmen adayı (Ö39 ve Ö44) TAÖA'ya ve İYÖA'ya katılmamıştır, proje kapsamındaki diğer ölçme araçlarında yer almıştır. Bu yüzden bu ölçme aracına yanıt veren son öğretmen adayı Ö46'dır).

### Veri Analizi

Her iki ölçme aracı yazılı olarak uygulanmış; araştırmacı ve matematik eğitimi doktoralı öğretim görevlisi tarafından içerik analizine tabi tutulmuştur. Her bir ölçme aracı öncelikle soru bazında excel formatına deşifre edilmiş daha sonra ortak ifadeler belirlenmiştir. Her bir ölçme aracında aynı ifadeler bir araya getirilerek kodlar oluşturulmuştur. Kodlayıcılar zaman zaman bir araya gelerek ortak kodları ve temaları belirlemişlerdir ve analiz sonucunda tamamen fikir birliğine varmışlardır. Çalışmada matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları Sowder ve Harel'ın (1998) ispat şeması çatısı kullanılarak ortaya çıkarılmıştır. Öğretmen adaylarının tümdengelimsel akıl yürütme süreçleri (ispat yöntemleri hakkındaki bilgileri, bu yöntemleri kullanış biçimleri) araştırmacı tarafından oluşturulan ölçme araçlarıyla ortaya konmuştur. Dolayısıyla öğretmen adaylarının tümdengelimsel akıl yürütme ile ispat anlayışları onların ispat yöntem bilgileri, ispat becerileri ve ispat şemalarının beraber analizi sonucunda bir bütün olarak ortaya konmaya çalışılmıştır.

## Bulgular ve Yorum

Bu bölümde matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışlarına ilişkin bulgular ve bu bulgularla ilişkili yorumlar sunulmaktadır. Bunun için matematik öğretmeni adaylarının ispat becerilerine ilişkin bulgular ile ispat yöntemleri bilgilerine ilişkin bulgular sunulmuştur. Bu bulgular öğretmen adaylarının ispat şemalarıyla ilişkilendirilmiştir. Tüm bulgular beraber ele alınarak matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

## Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Becerilerine İlişkin Bulgular

Matematik öğretmeni adaylarının TAÖA'da yer alan beş soruya ilişkin yanıtları incelenmiştir. 44 öğretmen adayı TAÖA'ya yanıt vermiştir. TAÖA'ya ilişkin ilk soru doğrudan ispat, ikinci soru durumlarla ispat, üçüncü soru çelişki yoluyla ispat, dördüncü soru olmayana ergi ile ispat, beşinci soru ise karşı örnek ile ispat ile çözülebilecek niteliktedir. Aşağıda öğretmen adaylarının tüm sorulara ilişkin verdikleri yanıtlar yer almaktadır (Tablo 1).

**Tablo 1**
*TAÖA'ya İlişkin Bulgular*

| | | Soru 1 | Soru 2 | Soru 3 | Soru 4 | Soru 5 | Toplam |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Yanıtların Doğruluğu | Doğru | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| | Yanlış | 43 | 20 | 39 | 39 | 42 | 183 |
| | Boş | 1 | 0 | 2 | 5 | 2 | 9 |
| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi | Tümdengelim | 7 | 2 | 2 | 3 | 1 | 15 |
| | Doğrudan İspat | 13 | 13 | 6 | 7 | 1 | 40 |
| | Deneme Yoluyla İspat | 6 | 10 | 9 | 8 | 13 | 46 |
| | Tümevarım ile İspat | 5 | 6 | 6 | 1 | 7 | 25 |
| | Olmayana Ergi ile İspat | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 11 |
| | Aksine Örnek Verme | 3 | 0 | 4 | 5 | 9 | 21 |
| | Çelişki Yöntemi ile İspat | 1 | 1 | 5 | 1 | 3 | 11 |
| | Yaptığım İspat Değil | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | Bilmiyorum /Boş/Hatırlamıyorum | 5 | 7 | 9 | 8 | 6 | 35 |
| | Mantıksal Akıl Yürütme/Akıl Yürütme | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | Olası Tüm Durumları Deneme | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| | Varsayımsal Akıl Yürütme Yöntemi | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | Değer Verme Yöntemi | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | Şekil Çizme | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Tablo 1 incelendiğinde öğretmen adaylarının durumlarla ispat yöntemi ile kolaylıkla yanıtlanabilecek ikinci ispat sorusu dışındaki hiçbir soruya doğru yanıt vermedikleri görülmektedir. Öğretmen adayları TAÖA'ya ilişkin sorulara verdikleri yanıtlarda en çok kullandıkları yönteme ilişkin olarak ilk sırada deneme yoluyla ispat daha sonra doğrudan ispat yöntemlerini söylemişlerdir. Öğretmen adayları kullandıklarını düşündükleri ispat yöntemi olarak en çok doğrudan ispat ve deneme yoluyla ispat yanıtını vermişlerdir. Fakat ikinci soruya ilişkin yanıtlarında hiçbir öğretmen adayı kullandığı yöntem hakkında doğru yanıt vermemiştir. Öğretmen adaylarının deneme yoluyla ispat yöntemi olarak adlandırdıkları yöntem "tüketerek ispat yöntemi" dir. Buradan matematik öğretmeni adaylarının TAÖA'ya ilişkin verdikleri yanıtlarda büyük çoğunlukla ispatları yapılandıramadıkları, doğru yapılandırdıkları ispatlarda kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgilere sahip oldukları sonucuna varılabilir.

### *Matematik Öğretmeni Adaylarının TAÖA'nın Birinci Sorusuna İlişkin Yanıtları*

Birinci soru; doğrudan ispat yöntemiyle eşitliğin her iki tarafına "mn" ifadesinin eklenmesi ve kolay bir cebirsel manipülasyonla çözülebilecek niteliktedir. Bu ispat sorusundaki önermeyi doğru ispatlayan öğretmen adayı olmamıştır. Tablo 2'de görüldüğü üzere, matematik öğretmeni adaylarının ispat sorularına ilişkin verdikleri yanıtlar onların kullandıklarını söyledikleri ispat yöntemleri ve bu ispat sorularına ilişkin yanıt verme biçimleri açısından sınıflandırılmıştır. Örneğin bir öğretmen adayı doğrudan ispat yaptığını söylemekte fakat bunu söylerken önermeyi belirli değerler ile yoklama tepkisinde bulunabilmektedir. Öğretmen adaylarının söyledikleri ile gerçekleştirdikleri ispat davranışları ispat şemalarıyla ilişkilendirilerek sunulmuştur. Öğretmen adaylarının önermeyi ispatlarken verdikleri yanıtlar; "belirli değerler ile doğrulama", "hükümden hipoteze ilerleme", "yanlış/anlamsız cebirsel manipülasyon" temaları altında sınıflandırılmıştır. Bu temalar ayrıca ispat şemalarıyla ilişkilendirilmiştir.

**Tablo 2**

*TAÖA'nın Birinci Sorusuna İlişkin Bulgular*

| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/İspat Davranışı | Önermeyi Belirli Değerler İle Doğrulama (Deneysel Temel Örnekler İ.Ş.) (%) | Hükümden Hipoteze İlerleme (Dışsal Sembolik İ.Ş.) (%) | Yanlış/Anlamsız Cebirsel Manipülasyon (Dışsal Sembolik İ.Ş.) (%) | Toplam (%) |
|---|---|---|---|---|
| Tümdengelim | 3 | 1 | | 7 |
| Doğrudan İspat | 1 | 11 | 1 | 13 |
| Deneme Yoluyla İspat | 5 | | 1 | 6 |
| Tümevarım İle İspat | 3 | | 2 | 5 |
| Olmayana Ergi İle İspat | | | 2 | 2 |
| Çelişki Yöntemi İle İspat | | 1 | | 1 |
| Mantıksal Akıl Yürütme | 1 | | | 1 |
| Aksine Örnek Verme | 3 | | | 3 |

**Tablo 2**
*TAÖA'nın Birinci Sorusuna İlişkin Bulgular (devam)*

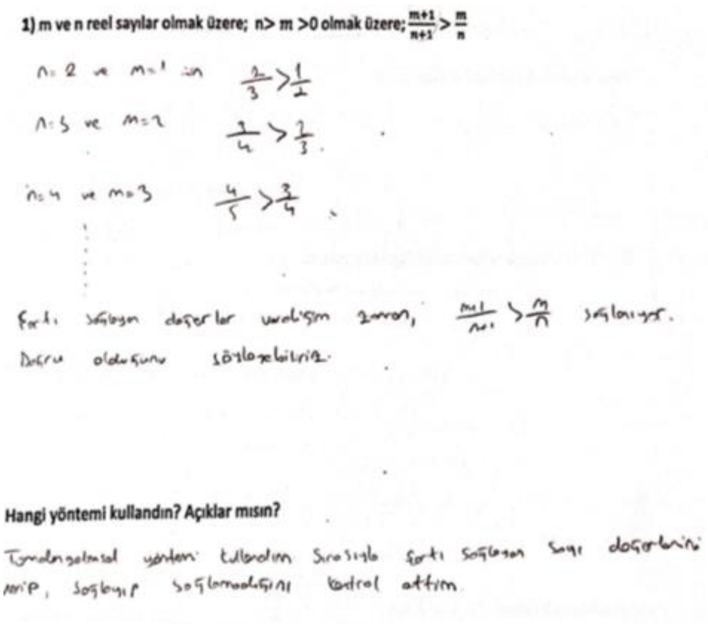
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bilmeyen/Hatırlamayan | 1 | 2 | 2 | 4 |
| Toplam | 18(42%) | 17 (40%) | 6(14%) | 42 (97%) |

Tablo 2'de görüldüğü üzere önermeyi belirli değerler ile doğrulamaya ilişkin göstergelerle ispat yapan öğretmen adayları deneysel temel örnekler ispat şemasına; hükümden hipoteze ilerleme ve yanlış/anlamsız cebirsel manipülasyon göstergeleri ise dışsal sembolik ispat şemasına gruplandırılmıştır. 18 öğretmen adayı birinci soruya ilişkin yanıtlarında önermeyi belirli sayı değerleri ile yoklamışlardır ve tepkileri deneysel temel örnekler ispat şeması göstergeleri ile ilişkilendirilmiştir. Altı öğretmen adayı yanlış/anlamsız cebirsel manipülasyonlar yapmışlar ve 17 öğretmen adayı hipotezden hüküme ilerlemek yerine "sembolleri anlamdan uzak ve durum içerisindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden" hükümden hipoteze ilerleyerek ispatı yapılandırma yoluna giderek dışsal ve deneysel ispat şemalarının göstergeleriyle yanıt vermişlerdir. Öğretmen adayları (13 öğretmen adayı) doğrudan ispat yöntemini kullandıklarını belirterek ispat yöntemi hakkında doğru yargıya varsalar da hiçbiri önermeyi doğru olarak ispatlayamamıştır. Doğrudan ispat yöntemiyle kolaylıkla çözülebilecek olan birinci soruya ilişkin yanıtlarında deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergelere sahip olan öğretmen adaylarının kullandıklarını söyledikleri ispat yöntemleri şunlardır: Tümdengelim, doğrudan ispat, deneme yoluyla ispat, tümevarım ile ispat, mantıksal akıl yürütme, aksine örnek verme. Bir öğretmen adayı ise hatırlamadığını söyleyerek soruya cevap vermemiştir. Bu yüzden bu öğretmen adaylarının tepkileri (3%) tabloya dahil edilmemiştir.

Tümdengelim yöntemini kullandıklarını belirten yedi öğretmen adayının üçü, doğrudan ispat yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adaylarından biri, deneme yoluyla ispat yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adaylarından altısı, tümevarım ile ispat yaptığını söyleyen üç öğretmen adayı, mantıksal akıl yürütme yöntemini kullandığını söyleyen bir öğretmen adayı, aksine örnek verme yöntemini kullandığını belirten üç öğretmen adayı, önermeyi belirli değerler ile doğrulama davranışı göstermişlerdir. Bu göstergeler deneysel temel örnekler ispat şemasıyla ilişkilendirilmiştir. İki öğretmen adayı cebirsel manipülasyonlarla ispat yapmaya çalışmış, başarılı olamayınca belirli sayısal değerlerle doğruluğu göstermeye çalışmıştır; "Mantıksal akıl yürüttüm" diyen bir öğretmen adayı önermenin ispatını sözel bir dille açıklamaya çalışmış, daha sonra ise sayısal denemelerle doğrulama yoluna gitmiştir. Tümevarım yöntemini kullandığını söyleyen iki öğretmen adayı benzer göstergelerle hareket ederken, bir öğretmen adayı m=k ve n= k+1 şeklinde değişkenler alıp varsayım (q) ifadesinde yerine koymuş fakat bunu hipotezden hükme ilerleyerek yapmamıştır. Öğretmen adayının ifadeleri onun k ve k+1 gibi iki farklı değişkene değer vererek ispatı yoklamayı tümevarım olarak algıladığını göstermektedir.  Ö12'nin birinci ispat sorusuna ilişkin yanıtı Şekil 1'deki gibi örneklendirilebilir.

**Şekil 1**

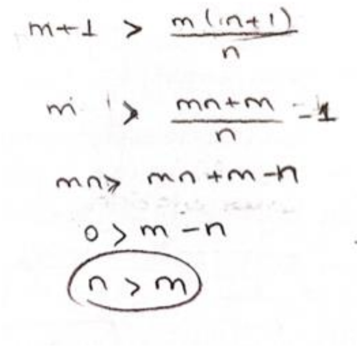
*Ö12'nin TAÖA Birinci Sorusuna Yanıtı*




Ö12 tümdengelim yöntemini kullandığını belirtmiş; ispatı m=1,2,3 gibi sayı değerleri ile yoklayarak yapılandırmaya çalışmıştır. Bu öğretmen adayının ispat şeması deneysel temel örnekler ispat şeması ile ilişkilendirilmiştir. Dışsal sembolik ispat şeması göstergeleriyle yanıtlar veren öğretmen adaylarından bazıları (17 öğretmen adayı, 40%) doğrudan ispat davranışı ile hipotezden (p) hükme (q) ilerlemek yerine hükümden hipoteze doğru ilerlemiş; dolayısıyla "sembolleri anlamdan uzak ve durum içerisindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden" hareket etmişler; bazı öğretmen adayları (altı öğretmen adayı, 14%) ise anlamsız cebirsel manipülasyonlarla ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır. Başka deyişle öğretmen adaylarının %54'ü, yani yarısından fazlası dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle birinci ispat sorusunu yanıtlamışlardır.  Bu öğretmen adayları tümdengelim, doğrudan ispat, tümevarım, olmayana ergi yöntemlerini kullandıklarını belirtmişlerdir. Tümdengelim yöntemini kullandıklarını belirten yedi öğretmen adayının dördü doğrudan ispat yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adaylarından 11'i, çelişki yöntemi ile ispat yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adaylarından biri hükümden hipoteze ilerleme davranışı göstermişlerdir. Şekil 2’de Ö15’in 1. soruya ilişkin yanıtı görülmektedir.

**Şekil 2**

*Ö15'in TAÖA’nın Birinci Sorusuna Yanıtı*

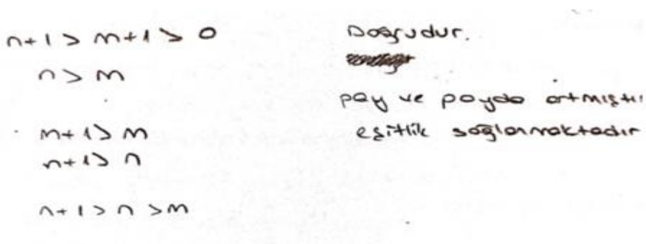



Ö15, n>m hipotezinden hükme ilerlemek yerine verilen hükümden n>m hipotezine ilerleyerek ispatı yapılandırmıştır. Açıklama kısmında ise doğrudan ispat yöntemini kullandığını ifade etmiştir. Dolayısıyla ifadeleri dışsal sembolik ispat şeması ile ilişkilendirilmiştir.

Doğrudan ispat yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adaylarından biri, tümevarım ile ispat yöntemini kullandığını belirten öğretmen adaylarından ikisi, olmayana ergi ile ispat yaptığını söyleyen öğretmen adaylarından ikisi anlamsız cebirsel manipülasyonlar ile ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarının tepkileri de dışsal sembolik ispat şemasına gruplandırılmıştır. Bu öğretmen adayları tümdengelim, doğrudan ispat, tümevarım, olmayana ergi yöntemlerini kullandıklarını belirtmişlerdir. Örneğin tümdengelim yoluyla ispat yaptığını söyleyen dört öğretmen adayı doğrudan ispat mantığı ile hipotezden (p) hükme (q) ilerlemek yerine hükümden hipoteze doğru ilerlemişlerdir. Ö7 q’dan p’ye giderek pozitif ve negatif durumları kullanarak çıkarım yapmaya çalışmış; Ö13 q’dan p’ye giderek pay ve paydanın artacağını söyleyerek sonuca ulaştığını belirtmiş (Şekil 3), Ö25 q’dan p’ye giderek anlamsız cebirsel işlemler kullanmıştır.

**Şekil 3**

*Ö13'ün Birinci İspat Sorusuna Yanıtı*




Tüm bu bulgulardan yola çıkarak; öğretmen adaylarının hiçbirinin doğrudan ispat gerektiren bu önermeyi ispatlayamadığı ve kullandıkları yöntem hakkında doğru bilgiye sahip olmadıkları ve birinci soruya ilişkin ispat çabalarında hiçbir öğretmen adayının analitik ispat şemasına sahip olmadığı söylenebilir. Bunun yanında; hükümden hipoteze ilerleyerek ve anlamsız cebirsel işlemler yaparak dışsal sembolik ispat şeması göstergeleriyle hareket eden öğretmen adayları büyük çoğunluktadır (%54). Bunun yanında öğretmen adaylarının %42'si değişkenlere sayısal değerler vererek ispatı yapılandırdıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları farklı yöntemler kullandıklarını belirtseler de açıklamalarında sayısal değerlerle doğrulama yoluna gitmişlerdir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının hemen hemen hepsinin durumlarla ispat yöntemi kullanılarak kolayca ispatlanabilecek bu önermeye ilişkin yanıtlarında dışsal ve deneysel kaynaklı ikna etme durumları kullandıkları söylenebilir.

### *Matematik Öğretmeni Adaylarının TAÖA'nın İkinci Sorusuna İlişkin Yanıtları*

İkinci soru; durumlarla ispat yöntemi kullanılarak yapılandırılacak bir ispatı içermiştir. Bu soru öğretmen adaylarının doğru yanıt verdikleri tek sorudur. Bu önermeyi 24 öğretmen adayı ispatlayabilirken; 19 öğretmen adayı ispatlayamamıştır. Bir öğretmen adayı ise yanıt vermemiştir. Buradan matematik öğretmeni adaylarının %55'inin durumlarla ispat yöntemi kullanılarak çözülebilecek ispat sorusunu doğru yanıtladıkları, %43'ünün ise yanlış yanıtladığı söylenebilir. Tablo 3 ispatı doğru olarak yapılandıran öğretmen adaylarının verilerini içermektedir.

**Tablo 3**

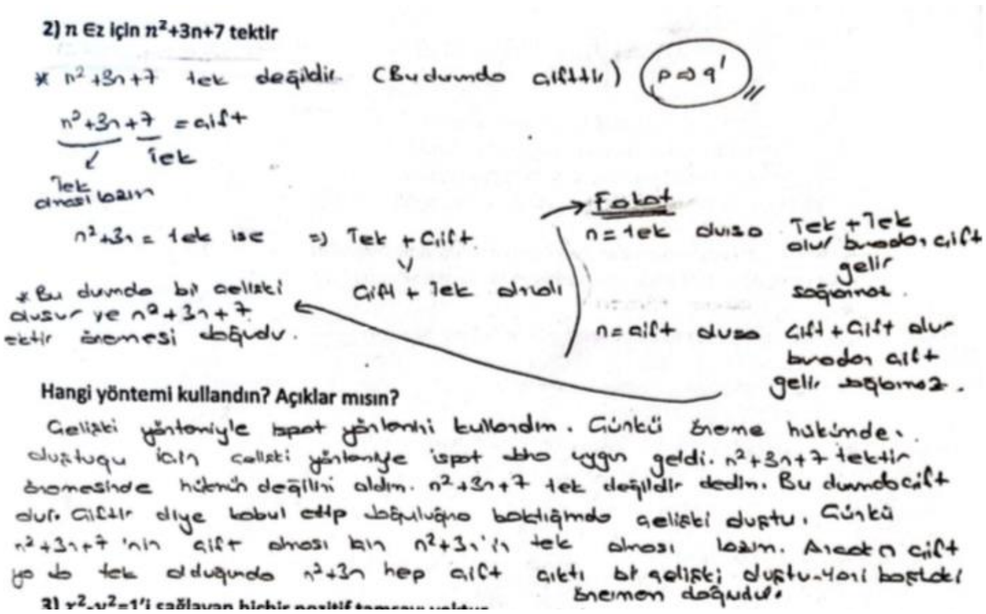
*TAÖA'nın İkinci Sorusuna Verilen Doğru Yanıtlara İlişkin Bulgular*

| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/ İspat Davranışı | Durumlarla ispat yöntemini kullanma |
|---|---|
| Deneme Yoluyla İspat | 4 |
| Olmayana Ergi İle İspat | 1 |
| Varsayımsal Akıl Yürütme | 1 |
| Tümevarımsal İspat Yöntemi | 4 |
| Doğrudan İspat | 6 |
| Tümdengelimsel İspat | 1 |
| Değer Verme Yöntemi | 1 |
| Kullandığı Yöntemi Belirtmeme/ Hatırlamadığını Söyleme | 5 |
| Toplam | 23 |

Bu önermeyi öğretmen adaylarının 24'ü doğru olarak ispatlamışlardır. İspatlarını doğru yapılandıran öğretmen adaylarının biri hariç (Ö5) hepsi durumlarla ispat yöntemini kullanarak ispatlarını tamamlamışlardır. Fakat; hiçbir öğretmen adayı kullandıkları ispat yöntemini doğru olarak ifade etmemiştir. Ö5 çelişki yöntemini kullandığını belirtmiş fakat olmayana ergi yöntemini kullanmıştır. (Tabloya dahil edilmemiştir). Bu öğretmen adayı (Ö5) gösterimlerini yanlış kurmuş fakat doğru mantıkla ispatı yapılandırmıştır (Şekil 4).

**Şekil 4**

*Ö5'in İkinci Soruya İlişkin Yanıtı*


2) $n \in Z$ için $n^2+3n+7$ tektir

* $n^2+3n+7$ tek değildir. (Bu durumda çifttir) ($p \Rightarrow q'$)

$\underbrace{n^2+3n}_{\text{Tek olması lazım}}+\underbrace{7}_{\text{tek}}$ = çift

$n^2+3n$ = tek ise ⇒ Tek + Çift ∨ Çift + Tek olmalı

Fakat
n = tek olursa Tek + Tek olur buradan çift gelir sağlanmaz.
n = çift olursa Çift + Çift olur buradan çift gelir sağlanmaz.

* Bu durumda bir çelişki oluşur ve $n^2+3n+7$ tektir önermesi doğrudur.

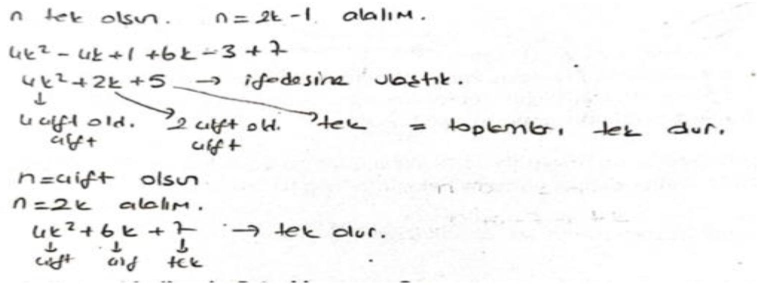
Hangi yöntemi kullandın? Açıklar mısın?

Çelişki yöntemiyle ispat yöntemini kullandım. Çünkü önerme hakkında oluştuğu için çelişki yöntemiyle ispat etmo uygun geldi. $n^2+3n+7$ tektir önermesinde hükmün değilini aldım. $n^2+3n+7$ tek değildir dedim. Bu durumda çift dur. Çifttir diye kabul edip doğruluğuna baktığımda çelişki düştü. Çünkü $n^2+3n+7$'nin çift olması için $n^2+3n$'in tek olması lazım. Ancak n çift ya da tek olduğunda $n^2+3n$ hep çift çıktı bir çelişki düştü. Yani baştaki önermem doğrudur.

İspatı doğru olarak kabul edilen diğer öğretmen adayları ispatlarını durumlarla ispat yöntemiyle yapılandırmışlardır. Dört öğretmen adayı deneme yoluyla ispat yöntemini kullandıklarını belirtirken, bir öğretmen adayı olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmiş, bir diğeri "varsayımsal akıl yürütme yöntemini", dört öğretmen adayı "tümevarımsal ispat" kullandığını belirtmiş, altı öğretmen adayı doğrudan ispat yöntemini, bir öğretmen adayı tümdengelimsel yöntemi, diğeri değer verme yöntemini kullandığını belirtmiştir. Örneğin Ö19 açıklamasında "n tam sayı olduğundan ya tek ya çift olacaktır diyebiliriz. Çift ya da tek olarak ele aldığımda da tek olduğunu gösterdim. Tümevarımsal bir ispat oldu" şeklinde ifadelerde bulunmuştur (Şekil 5).

**Şekil 5**

*Ö19'un İkinci Soruya ilişkin Yanıtı*


n tek olsun. n = 2k − 1 alalım.

$4k^2 - 4k + 1 + 6k - 3 + 7$

$4k^2 + 2k + 5$ → ifadesine ulaştık.

4 çift old. çift; 2 çift old. çift; tek = toplamları tek dur.

n = çift olsun
n = 2k alalım.

$4k^2 + 6k + 7$ → tek olur.
çift, çift, tek

Beş öğretmen adayı hangi yöntemi kullandığını bilmediğini belirtmiştir. Bu bulgulardan hareketle; ispatı doğru yapılandıran hiçbir öğretmen adayının kullandığı yöntemi bilmediği sonucuna ulaşılabilir. Öğretmen adaylarının hepsi aksiyomatik sistem içerisinde mantıksal çıkarım yoluyla dönüştürme işlemlerini yaptıkları için bu soruda öğretmen adaylarının %55'inin analitik dönüşümsel ispat şemasına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Geri kalan 19 öğretmen adayının yanıtları yanlış olarak değerlendirilmiştir (Tablo 4).

**Tablo 4**

*TAÖA'nın İkinci Sorusuna Verilen Yanlış Yanıtlara İlişkin Bulgular*

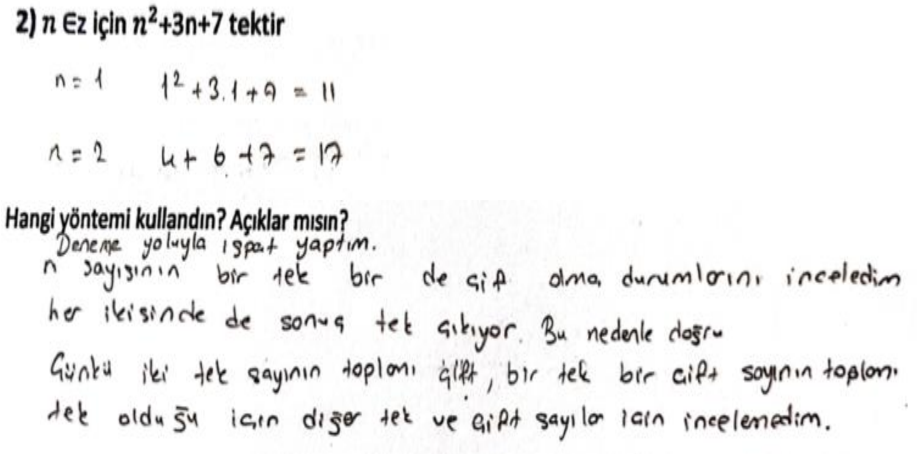
| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/İspat Davranışı ve İlişkilendirilen İspat Şeması | Belirli Değerler ile Doğrulama (Deneysel Temel Örnekler İ.Ş) | Sözel Ya Da Çizimlerle İfade (Deneysel Algısal İ.Ş.) | Yanlış/Anlamsız Cebirsel Manipülasyon (Dışsal Sembolik İ.Ş.) |
|---|---|---|---|
| Tümdengelim | | | 1 |
| Doğrudan İspat | 1 | | 5 |
| Deneme Yoluyla İspat | 4 | 2 | 1 |
| Tümevarım ile İspat | 3 | | |
| Olmayana Ergi ile İspat | | | 1 |
| Yöntem Belirtmeyen | 1 | | |
| Toplam | 9 (47%) | 2 (11%) | 8 (42%) |

Doğrudan ispat yöntemini kullandığını ifade eden öğretmen adayının, deneme yoluyla ispat yaptığını söyleyen dört öğretmen adayının, tümevarım ile ispat yaptığını söyleyen üç öğretmen adayının ve yöntem belirtmeyen bir öğretmen adayının tepkileri deneysel temel örnekler ispat şeması göstergeleri ile ilişkilendirilmiştir. Deneme yoluyla ispat yaptığını söyleyen iki öğretmen adayının tepkileri deneysel algısal ispat şeması ile ilişkilendirilirken, tümdengelim yöntemini kullandığını ifade eden öğretmen adayının, doğrudan ispat yaptığını söyleyen dört öğretmen adayının, deneme yoluyla ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayının, olmayana ergi ile ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayının tepkileri dışsal sembolik ispat şeması göstergeleri ile ilişkilendirilmiştir. Tablo 4'e bakıldığında; 19 öğretmen adayı toplam öğretmenlerin %44'ünü oluşturmuştur. Bu yüzden deneysel temel örnekler ispat şeması göstergeleriyle hareket eden öğretmen adayları yanlış yanıt verenlerin %47'sini, toplam sayının ise %20'sini oluşturmaktadır. Benzer şekilde dışsal sembolik ispat şeması göstergesine sahip olan öğretmen adayları bu soruyu yanlış yanıtlayanların %53'ünü, toplam öğretmen adaylarının ise %23'ünü oluşturmaktadır.

Öğretmen adaylarının dokuzu deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket ederek önermeyi sayısal değerlerle yoklamışlardır. Örneğin Ö4, Ö15, Ö31, Ö45 deneme yoluyla ispat yaptıklarını ve belirli değerler için önermenin doğruluğu sağladığını belirtmişlerdir.

**Şekil 1**

*Ö31'in İkinci Soruya İlişkin Yanıtı*


2) $n \in \mathbb{Z}$ için $n^2+3n+7$ tektir

$n=1 \quad 1^2+3.1+7=11$

$n=2 \quad 4+6+7=17$

Hangi yöntemi kullandın? Açıklar mısın?

Deneme yoluyla ispat yaptım.
n sayısının bir tek bir de çift olma durumlarını inceledim
her ikisinde de sonuç tek çıkıyor. Bu nedenle doğru
Çünkü iki tek sayının toplamı çift, bir tek bir çift sayının toplamı
tek olduğu için diğer tek ve çift sayılar için incelemedim.

Şekil 6'da görüldüğü üzere Ö31 n'ye 1 ve 2 değerleri vererek önermeyi yoklamış; her iki değer sonucu tek çıktığı için önermenin doğru olduğunu belirtmiş; diğer sayılar için önerme üzerinde inceleme gereği duymamıştır. Bu yüzden ispat süreci ve açıklamaları deneysel temel örnekler ispat şeması göstergeleri ile ilişkilendirilmiştir.

Benzer olarak bir öğretmen adayı doğrudan ispat yöntemini kullandığını belirtmiş fakat sayısal değerlerle ispatı yapılandırma yoluna gitmiştir. Tümevarımsal akıl yürütme ile ispat kullandığını söyleyen öğretmen adaylarından ikisi değişkene farklı sayısal değerler vererek ispatı yapılandırdıklarını belirtmişlerdir. Örneğin; Ö22 "Tümevarım yöntemiyle genellemeye ulaştım" ifadesinde bulunmuştur. Tümevarımsal akıl yürütme kullandığını belirten Ö25, önce n=1,2 gibi değerler için önermeyi yokladıktan sonra P(k+1) yazmış fakat k+1 üzerinden değişkenlere değer vererek yoklama yapmıştır. Çıkarım yapmamıştır. Ö42 ise herhangi bir yöntem kullandığını belirtmemiş fakat değişkenlere sayısal değerler verme yoluna gitmiştir.

Bazı öğretmen adayları, durumun doğruluğunu ya da yanlışlığını güçlü kanıt bulamadıklarında, çizim ya da yazı ile ikna çabasına girmişlerdir (deneysel algısal ispat şeması). Bu öğretmen adayları açıklamalarında mantıksal çıkarım yapamamış, düşüncelerini ifade etmişlerdir. Ö17, Ö29 deneme yöntemini kullandığını belirtmiş, ispatı sözel olarak ifade ederek tamamlamaya çalışmış ama yapılandıramamıştır. Buradan Ö17 ve Ö29'un deneysel algısal ispat şemasına sahip oldukları belirlenmiştir. Ö29 "n tek ise n+3 çift olur" gibi açıklamalar yapmıştır (Şekil 7).

***Şekil 2***

*Ö29'un İkinci Soruya İlişkin Yanıtı*

$n(n+3)+7$

$n$ tek ise $n+3$ çift olur.

$$\underbrace{\underbrace{n}_{\text{Tek}}\underbrace{(n+3)}_{\text{çift}}}_{\text{Çift}} + \underbrace{7}_{\text{tek}} \qquad \text{Çift} + \text{tek} = \text{Tek}$$

Bazı öğretmen adayları ise sembollerin anlamdan uzak ve durum içindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden, anlamsız manipülasyonlar (sembolik ispat şeması) ile hareket etmişlerdir. Bir öğretmen adayı deneme yoluyla ispat yöntemini kullandığını belirterek anlamsız cebirsel manipülasyonlar yapmıştır. 5 öğretmen adayı doğrudan ispat yöntemini kullandığını belirtmiş fakat anlamsız cebirsel ifadeler kullanmışlardır. Ö27, akıl yürütme sürecini, sembollerle uyum içerisinde yapılandırarak sonuca ilerlemekte başarılı olamamıştır (Şekil 8).

**Şekil 8**

*Ö27'nin İkinci Soruya İlişkin Yanıtı*

**2) n ∈z için n²+3n+7 tektir**

$n+3 = \sqrt{2k+1}$

$n \in \mathbb{Z}$ için $n^2+3n+7$ tek $\Rightarrow$ $n^2+3n+7 = 2k-1$ $k \in \mathbb{Z}$ (Teklik şyt)

$n^2+3n+7 = 2k-1$

$n^2+3n = 2k-8$

$n^2+3n = 2(\underbrace{k-4}_{m})$

$n^2+3n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ (çiftlik şyt)

$n.(n+3) = 2m$

$n \in \mathbb{Z}$ için $n = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$ ise

$4l^2+6l = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$

$\cancel{2}l(2l+3) = \cancel{2}m$

$2l+3 = \frac{m}{l}$, $l = \frac{n}{2}$

$\cancel{2}.\frac{n}{\cancel{2}} + 3 = \frac{2m}{n}$

$n+3 = \frac{2m}{n}$

$n \in \mathbb{Z}$ için ~~n=2 değerini aldığında~~ n çift değeri aldığında ya da tek değeri aldığında sonuç n2 tektir.

**Hangi yöntemi kullandın? Açıklar mısın?**

Ö12, tümdengelimsel ispat yöntemini kullandığını belirterek sadece 2k+1 için doğrulama yapmıştır. Bir diğer öğretmen adayı olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmiş fakat sadece çift sayı tanımı kullanarak mantık hatası yapmıştır. Bu öğretmen adaylarının tepkileri de dışsal sembolik ispat şemasında kategorize edilmiştir. Özetle, yanlış yanıt veren öğretmen adaylarının çoğunluğu (%47) deneysel temel örnekler ve deneysel algısal (42%) ispat şemalarına ilişkin göstergeler ortaya koymuşlardır.

***Matematik Öğretmeni Adaylarının TAÖA'nın Üçüncü Sorusuna İlişkin Yanıtları***

Üçüncü ispat sorusu; ispatın çelişki yoluyla yapılandırılabileceği bir sorudur. Bu ispatı doğru olarak yapılandıran öğretmen adayına rastlanmamıştır.

**Tablo 5**

*TAÖA'nın Üçüncü Sorusuna Verilen Yanıtlara İlişkin Bulgular*

| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/ İspat Davranışı ve İlişkilendirilen İspat Şeması | Belirli Değerler ile Doğrulama (Deneysel Temel Örnekler İ.Ş) | Yanlış/Anlamsız Cebirsel Manipülasyon (Dışsal Sembolik İ.Ş.) |
|---|---|---|
| Tümdengelimsel Yöntem | 2 | |
| Doğrudan İspat | 4 | 2 |
| Deneme Yoluyla İspat /Deneme Yanılma | 8 | 2 |
| Tümevarım ile İspat | 5 | 1 |
| Olmayana Ergi ile İspat | 1 | 1 |
| Çelişki | 1 | 3 |
| Herhangi Bir Yöntem Yazmayan/Fikrim Yok | 5 | 2 |
| Aksine Örnek Verme | 2 | 2 |
| Tüm Durumları Yoklama | 1 | |
| Toplam | 29 (66%) | 12 (27%) |

Öğretmen adaylarının 29'u önermeyi belirli sayı değerleri ile yoklamışlardır ve bu yüzden deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergeler taşıdıkları düşünülmüştür.

Tablo 5'e göre tümdengelimsel yöntem kullandığını ifade eden öğretmen adaylarından dördü değişkenlere belli sayısal değerler vererek doğruluğu yoklama yoluna gitmişlerdir. Ö26 deneme yanılma yöntemini kullandığını belirtmiş, Ö28 ve Ö35 deneme yoluyla ispat yaptığını söylemiş ve her iki öğretmen adayı x-y=1, x-y=-1 değerleri için x=1, y=0 sonucuna ulaşarak ispatı yaptıklarını ifade etmişlerdir. Ö35 olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmiştir. Aynı çözüm yolunu kullanan iki öğretmen adayı ise kullandığı yöntem hakkında "fikrim yok" demiştir. Aynı çözüm yolunu kullanan farklı öğretmen adayları farklı yöntemleri kullandıklarını ifade etmişlerdir. Örneğin iki öğretmen adayı aksine örnek verme yöntemini, diğer ikisi tümdengelimsel yöntemi, bir öğretmen adayı çelişki yöntemini, iki öğretmen adayı doğrudan ispat yöntemini kullandığını belirtmiş; bir öğretmen adayı değerler tablosu oluşturmuş ve kullandığı yöntem için "tüm durumları yokladım" ifadesinde bulunmuştur. Deneme yanılma yöntemini kullandığını belirten Ö11 sonucu 1 verecek en küçük sayıları seçtiğini söyleyerek "1-1=0 bu durumda hiçbir tamsayı yoktur" açıklaması yapmıştır. Doğrudan ispat yöntemini kullandığını ifade eden Ö18 ise sayısal değerler yoklayarak ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır. Bu yöntemi kullandığını belirten Ö33 (x-y).(x+y) ifadelerinden birine 0 verildiğinde iki durumu da incelediğini ve sağlamadığını belirtmiştir. Tümevarım yöntemini kullandığını belirten altı öğretmen adayı farklı çözümlerle ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır. 5 öğretmen adayı değişkenlere belli sayısal değerler vererek ispatı yapılandırmaya çalışmıştır. Örneğin Ö13, "x ve y pozitif tamsayı olacağı için 1,2,3,4 olabilir sayılar arttıkça karelerin farkı çok olacaktır" açıklamasını yapmıştır. Üç öğretmen adayı ise hangi yöntemi kullandıklarını belirtmeden benzer şekilde değişkene verdikleri belirli sayılarla ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır. Örneğin Ö21 ardışık ve aynı sayılar seçmiştir. Ö46 "y=1 için olmuyor" ifadesini kullanmıştır.

Doğrudan ispat yaptığını söyleyen iki öğretmen adayının, deneme yoluyla ispat yaptığını söyleyen iki öğretmen adayının, tümevarım ile ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayının, olmayana ergi ile ispat yöntemini kullandığını belirten bir öğretmen adayının, çelişki yöntemini kullandığını belirten üç öğretmen adayının, aksine örnek verme yöntemini kullandığını belirten iki öğretmen adayının, herhangi bir yöntem belirtmeyen iki öğretmen adayının tepkileri dışsal sembolik ispat şeması göstergeleri ile ilişkilendirilmiştir. Öğretmen adaylarından ikisi, deneme yoluyla ispat yaptığını ifade etmiş, cebirsel ifadeyi (x-y).(x+y) şeklinde yazdıktan sonra -1 ve +1 değerlerini alabileceğini göz önüne almış fakat ispata devam etmemişlerdir. Doğrudan ispat yöntemini kullandığını ifade eden iki öğretmen adayı anlamsız cebirsel manipülasyonlarla, tümevarım yöntemini kullandığını söyleyen bir öğretmen adayı anlamsız cebirsel işlemler ile ispatı yapılandırmaya çalışmıştır. Çelişki yöntemini kullandığını belirten üç öğretmen adayı mantık hataları yapmışlardır. Örneğin Ö8 ifadeyi doğru kabul ederek ifadenin doğru olmadığını göstermeye çalışmıştır. Olmayana ergi yöntemini kullandığını belirten Ö40, cebirsel işlemlerle x=1/2 sonucuna ulaşarak ispatı tamamladığını belirtmiştir. Aksine örnek yöntemini kullandığını belirten Ö9 belirli işlemler yapmış fakat aksine örnek bulamadığını söylemiştir. Ö16 ise "İfade yanlıştır çünkü x=1 için sağlamıyor" demiştir. Hangi yöntemi kullandığını belirtmeyen iki öğretmen adayı ise anlamsız cebirsel işlemler yapmışlardır. Üç öğretmen adayı bu ispat sorusuna yanıt vermemiştir.

Özetle, hiçbir öğretmen adayının kullandığı yöntem hakkında bilgi sahibi olduğu görülmemiştir. Öğretmen adayları çoğunlukla değişkenlere sayısal değerler vererek ispatı yapılandırma yoluna gitmişlerdir. Dört öğretmen adayı çelişki yoluyla ispat yaptıklarını ifade etseler de belirli değerler ile ya da anlamsız cebirsel manipülasyonlarla önermeyi doğrulama yoluna gitmişlerdir. İspatın çelişki yoluyla yapılandırılabileceği soruya öğretmen adaylarının %66'sı deneysel ispat şemasına, %27'si ise dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle yanıt vermişlerdir.

***Matematik Öğretmeni Adaylarının TAÖA'nın Dördüncü Sorusuna İlişkin Yanıtları***

Dördüncü ispat sorusu, olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilecek bir önerme içermiştir. Bu soruyu beş öğretmen adayı boş bırakmıştır. Kalan tüm öğretmen adayları ispatı yanlış yapılandırmışlardır. Öğretmen adaylarının çoğu Venn şeması gösterimi ile ispatı yapılandırmaya çalışmıştır. Öğretmen adayları ikna çabalarını sadece çizime veya bazı açıklamalara dayandırmışlardır. Bu tepkiler deneysel algısal ispat şemasına ilişkin göstergelerle ilişkilendirilmiştir. Bunun yanında bu öğretmen adayları farklı yöntemleri kullandıklarını belirtmişlerdir.

**Tablo 6**

*TAÖA'nın Dördüncü. Sorusuna Verilen Yanlış Yanıtlara İlişkin Bulgular*

| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/İspat Davranışı | Sözel Ya Da Çizimlerle İfade (Deneysel Algısal İ.Ş.) | Yanlış/Anlamsız Cebirsel Manipülasyon (Dışsal Sembolik İ.Ş.) |
|---|---|---|
| Tümdengelimsel Yöntem | | 3 |
| Deneme Yoluyla İsp. / Deneme Yöntemi | 6 | |
| Tümevarım ile İspat | 1 | |
| Olmayana Ergi ile İspat | 2 | 1 |
| Aksine Örnek Verme ile İspat | 3 | 1 |
| Doğrudan İspat | 1 | 5 |
| Çelişki | 1 | 1 |
| Herhangi Bir Yöntem Yazmayan | 1 | |
| Hiç Açıklama Yapmama Anlamsız Açıklamalar | 6 | |
| | 21 (48%) | 11 (25%) |

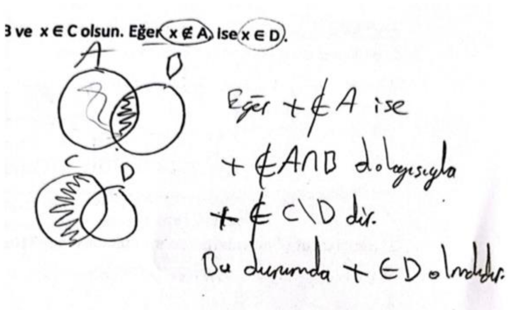
Tablo 6'dan görüldüğü üzere; deneme yoluyla ispat yaptığını ifade eden altı öğretmen adayı, tümevarım ile ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayı, olmayana ergi ile ispat yaptığını söyleyen iki öğretmen adayı, aksine örnek verme ile ispat yaptığını söyleyen üç öğretmen adayı, doğrudan ispat ve çelişki yöntemi ile ispat yaptığını söyleyen birer öğretmen adayı, herhangi bir yöntem yazmayan bir öğretmen adayı ve kullandıkları yöntem hakkında hiç açıklama yapmayan ya da anlamsız açıklama yapan altı öğretmen adayı ispatlarını sembol kullanmadan sözel olarak yazıya dökmüşler ya da çizimlerle anlatmışlardır. Bir öğretmen adayı ise Venn şeması kullanmış ve hangi yöntemi kullandığını bilmediğini belirtmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel dili doğru kullanamadığı durumlarda göstergeleri deneysel algısal ispat şeması ile ilişkilendirilmiştir.

Deneme yoluyla ispat yaptığını ifade eden Ö2 "Şartları sağlayacak değerler verdim" açıklamasında bulunmuştur. İki öğretmen adayı deneme yöntemini kullandığını belirtmiş ve yaptıklarının yanlış olduğunu da eklemiştir. Bir öğretmen adayı ise deneme yoluyla ispat yaptığını ve kümelerin gösteriminden yararlanarak olmadığını gösterdiğini ifade etmiştir. Ö36 çiziminin yanında sözel ifadelerle açıklama yoluna gitmiştir. Venn Şeması çizimi yapan Ö41 “Deneme yöntemi çünkü sağlıyor” açıklamasını yapmıştır.

Venn Şeması kullanarak açıklama yapan Ö1, tümevarım yöntemini kullandığını belirtmiş; “Adım adım verilenden yola çıkarak önermenin doğruluğu yanlışlığına ulaştım” şeklinde açıklama yapmıştır (Şekil 9).

**Şekil 3**

Ö1'in Dördüncü Soruya İlişkin Yanıtı



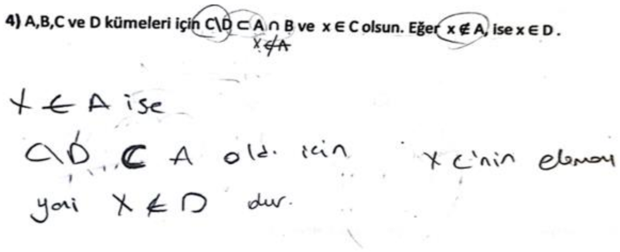

Olmayana ergi yöntemini kullandığını belirten bir öğretmen adayı Venn şeması ile çizim yapmış ve çizimini sözel ifadelerle desteklemeye çalışmıştır. Doğrudan ispat yöntemi ile ispatı yapılandırdığını belirten bir öğretmen adayı ise hipotez ve hüküm ifadelerini yanlış almıştır. Deneme yöntemini kullandığını ifade eden bir öğretmen adayı ise aynı şekilde uzun sözcüklerle anlamsız ifadelerde bulunmuştur.

Tümdengelimsel yöntem kullandığını belirten üç öğretmen adayı, olmayana ergi ile ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayı, aksine örnek verme ile ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayı, doğrudan ispat yaptığını söyleyen beş öğretmen adayı ve çelişki yöntemi ile ispat yaptığını söyleyen bir öğretmen adayı, ispatlarını anlamsız cebirsel manipülasyonlarla destekleyerek yapılandırmışlardır ve dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergeler taşımışlardır.

Olmayana ergi yöntemini kullandığını belirten bir öğretmen adayı ise hipotezin değili ifadesinden yola çıkarak ispatının yanlış yapılandırmıştır. Bir öğretmen adayı (Ö35) aksine örnek verme yöntemini kullandığını belirtmiş, cebirsel işlemler yapmış fakat mantık hatası yapmıştır. Çünkü hipotezin değili ifadesi ile ispatı yapılandırmaya çalışmıştır (Şekil 10).

**Şekil 4**

Ö35'in Dördüncü Soruya İlişkin Yanıtı




İspatı, doğrudan ispat yöntemi ile yapılandırdığını düşünen öğretmen adayları mevcuttur. Beş öğretmen adayı Venn şeması çizerek cebirsel işlemler yapmaya çalışmıştır. Bir öğretmen adayı çelişki yöntemini kullandığını belirtmiş fakat anlaşılamayan açıklamalarda bulunmuştur. Yedi öğretmen adayının ifadeleri konuyla ilişkisiz bulunmuştur.

Öğretmen adaylarının bir kısmı Venn şeması çizmenin yeterli olduğunu düşünmüşler ve ikna edici argümanlar yapılandıramamışlardır fakat tümdengelimsel yöntem kullandıklarını ifade etmişlerdir. Örneğin Ö12 çiziminin yanında "Bilgi bütününü çizimlerle anlattım bütünden parçaya…" ifadesini kullanırken Ö13 "Genel küme tanımlarını özele indirgedim" demiştir. Bir diğeri anlamsız cebirsel manipülasyonlarla çizimini desteklemeye çalışmıştır. Yönteme ilişkin hiçbir açıklama yapmayan ve sadece Venn şeması çizen altı öğretmen adayı mevcuttur. Venn şeması çizerek aksine örnek verme yöntemini kullandığını söyleyen dört öğretmen adayı çizimlerini sözel ifadelerle desteklemeye çalışmışlardır. Özetle, olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilecek bu önermeyi doğru biçimde ispatlayabilen öğretmen adayı yoktur. Öğretmen adaylarının %48'i deneysel algısal ispat şeması, %25'i ise dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir. Sadece üç öğretmen adayı ispat yöntemi hakkında doğru bilgi vermiş, bir öğretmen adayı Venn şeması ile çizim yapmış ve çizimini sözel ifadelerle desteklemeye çalışmış; bir diğeri hipotez ve hüküm ifadelerini yanlış almış, bir diğeri ise hipotezin değili ifadesinden yola çıkarak ispatının yanlış yapılandırmıştır

***Matematik Öğretmeni Adaylarının TAÖA'nın Beşinci Sorusuna İlişkin Yanıtları***

Beşinci soru, öğretmen adaylarının daha önce de karşılaştıkları Mersenne sayılarının bir ispat formu olan önerme içermektedir. Karşı örnek ile (aksine örnek verme ile) (n=11 ile) önermenin yanlışlığı ispatlanabilmektedir.

**Tablo 7**

*TAÖA'nın 5. Sorusuna Verilen Yanlış Yanıtlara İlişkin Bulgular*

| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/İspat Davranışı | Belirli Değerler ile Doğrulama (Deneysel T.Ö. İş) | Yanlış/Anlamsız Cebirsel Man. (Dışsal S.İş) |
|---|---|---|
| Tümdengelimsel Yöntem | 1 | |
| Deneme Yoluyla İspat /Deneme | 13 | |
| Tümevarım ile İspat | 7 | |
| Olmayana Ergi ile İspat | | 2 |
| Aksine Örnek Verme ile İspat | 9 | |
| Doğrudan İspat | 1 | |
| Çelişki | 2 | 1 |
| Deneme Yöntemi | | |
| Çelişki Ya Da Olmayana Ergi | | 1 |
| Açıklama Yapmama/ Anlamsız | 4 | 1 |
| | 37(84%) | 5 (11%) |

Bu soruyu iki öğretmen adayı boş bırakmıştır. Tablo 7'de de görüldüğü üzere, beş öğretmen adayı anlamsız cebirsel manipülasyonlarla ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır (dışsal sembolik ispat şeması). Bunun dışındaki öğretmen adayları (37 öğretmen adayı) değişkene (n'ye) sayısal değerler vererek ispatlarını yapılandırmış fakat farklı yöntemleri kullandıklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının tepkileri deneysel temel örnekler ispat şemasıyla ilişkilendirilmiştir. Değer vererek doğrulama yapan 13 öğretmen adayı deneme yoluyla ispat yöntemini kullandıklarını belirtmiş; yedi öğretmen adayı ise tümevarım yöntemiyle ispat yaptıklarını söylemişlerdir. Sayısal değerlerle ispatlama yoluna giden dört öğretmen adayı yönteme ilişkin açıklama yapmamıştır; Ö10 "Fermat teoremi diye hatırlıyorum" ifadesini kullanmıştır. Ö21 "İşin içinden çıkamadım" demiştir. Yine sayı değerleri ile doğrulama yapan dokuz öğretmen adayı aksine örnek vererek ispat yaptıklarını söylemişler; fakat diğer öğretmen adayları gibi 2,3,5, ve 7 gibi değerleri önermede değişkenin yerine koyarak doğruluğu yoklama yoluna gitmişlerdir. Örneğin Ö9 "Aksine bir örnek bulamadığım için doğrudur" açıklamasını yapmıştır. Ö18 n=6 için, Ö19, Ö29, Ö37 n=4 için; Ö25 n=7 ve n=8 için; Ö27 n=2 için, Ö29 n=2,3 ve 4için önermeyi ispat ettiğini ifade etmiştir. Sayısal değerlerle ispat yaptığını düşünen bir öğretmen adayı doğrudan ispat yaptığını belirtmiş; 2,3,5 ve 7 sayıları için denemeler yapmıştır. Yine aynı düşünceyle bir öğretmen adayı 2,3,5 ve7 için denemeler yapmış; tümdengelimsel yöntemle ispat yaptığını belirtmiştir. İki öğretmen adayı ise benzer düşünceyle n=4 için deneyerek çelişki yöntemi kullandığını belirtmiştir. Diğer gruptaki beş öğretmen adayı ise anlamsız cebirsel manipülasyonlarda bulunmuşlardır. Bu öğretmen adaylarının dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle ispatlarını yapılandırmaya çalıştıkları düşünülmüştür. Bir öğretmen adayı kullandığı yöntem kısmına sözel ifadelerle ne yaptığını anlatmış; diğeri çelişki ya da olmayana ergi yanıtını vermiş, bir öğretmen adayı çelişki yöntemini kullandığını belirtirmiş, iki öğretmen adayı olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmiştir. İki öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir. Bir öğretmen adayı ise açıklama kısmını boş bırakmıştır.

Beşinci ispat sorusuna ilişkin yanıtlar incelendiğinde; öğretmen adaylarının büyük kısmı (37 öğretmen adayı) önermeyi sayısal değerlerle ispatlama yoluna gitmiş; bunun yanında farklı ispat yöntemleri kullandıklarını belirtmişlerdir. Yanıt veren diğer öğretmen adaylarının hepsi dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir. Buradan beşinci soruya ilişkin açıklamalarında öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun (%84'ü) deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergeler taşıdıkları, %11'inin ise dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle ispat yaptığı söylenebilir.

## Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıklarını Söyledikleri Yöntemlere İlişkin Yanıtları

TAÖA genel olarak ele alındığında; matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları yöntemler hakkında ispat sorularına verdikleri yanıtlar Tablo 8'de sunulmuştur.

**Tablo 8**

*Öğretmen Adaylarının TAÖA'daki Sorularda Kullandıklarını Söyledikleri Yöntemler*

| | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Doğrudan İspat | 12 | 12 | 6 | 6 | 1 |
| Durumlarla İspat | - | - | 1 | - | - |
| Çelişki Yoluyla İspat | 1 | - | 4 | 2 | 3 |
| Olmayana Ergi Yöntemi ile İspat | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| Aksine Örnek Verme ile İspat | 3 | - | 4 | 4 | 9 |

Tablo 8'e göre doğrudan ispat yöntemiyle ispat yapmaya uygun olan birinci soruya 12 öğretmen adayı; çelişki yoluyla ispat yapmaya elverişli olan üçüncü soruya dört öğretmen adayı, olmayana ergi yöntemi ile ispat yapmaya uygun olan dört soruya üç öğretmen adayı, karşı örnek/aksine örnek verme ile ispat yöntemiyle ispat yapmaya elverişli olan beşinci soruya dokuz öğretmen adayı uygun yanıtlar vermişlerdir. Durumlarla ispat yapmaya elverişli olan ikinci soruya hiçbir öğretmen adayı doğru yanıt vermemiştir. Fakat dört öğretmen adayı deneme yoluyla ispat yaptığını belirtmiş ve 23 öğretmen adayı bu önermeyi durumlarla ispat yöntemi yoluyla ve bir öğretmen adayı çelişki yöntemi yoluyla ispatlayarak doğru olarak yanıtlamıştır. Bunun yanında yanlış ispat yapan 19 öğretmen adayından yedisi ise deneme yoluyla ispat yöntemi kullandığını belirtmiştir. Özellikle ikinci soruya ilişkin ispatlarında öğretmen adaylarının 24'ünün doğru ispat yapması fakat bunun yanında kullandıkları yöntem hakkında bilgi sahibi olmaması dikkat çekicidir. Diğer sorularda da öğretmen adaylarının hiçbiri önermeleri doğru ispatlayamamış; çok azı uygun yöntem hakkında doğru yanıt vermiştir. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının ispat becerileri ve kullandıkları ispat yöntemleri hakkındaki fikirlerinin eksik olduğu sonucuna ulaşılabilir.

## Matematik Öğretmeni Adaylarının TAÖA'ya İlişkin İspat Şemaları

TAÖA genel olarak ele alındığında; matematik öğretmeni adaylarının sorulara ilişkin ispat şeması göstergeleri Tablo 9'da verilmiştir.

**Tablo 9**

*Matematik Öğretmeni Adaylarının Sorulara İlişkin İspat Şeması Göstergeleri*

| | 1. S. (%) | 2. S.(%) | 3. S. (%) | 4. S.(%) | 5. S.(%) |
|---|---|---|---|---|---|
| Dışsal Sembolik İ.Ş. | 23% | 42% | 27% | 25% | 11% |
| Deneysel Algısal İ.Ş. | - | 11% | | 48% | |
| Deneysel Temel Örnekler İ.Ş. | 20% | 47% | 66% | | 84% |
| Analitik Dönüşümsel İ.Ş. | 55% | | | | |

Tablo 9 ele alındığında, birinci ispat sorusu haricindeki diğer sorularda öğretmen adaylarının büyük çoğunlukla deneysel ispat şemasına ilişkin göstergelerle ispatlarını yapılandırdıkları görülmektedir. Öğretmen adayları daha sonra dışsal ispat şeması göstergeleriyle hareket etmişlerdir. Sadece ilk soruda öğretmen adaylarının %55'i ispatı analitik dönüşümsel ispat şeması göstergeleriyle doğru yanıt vermiş, kalan %45'i ise deneysel ve dışsal ispat şeması göstergesine sahip olarak ispatlarını yapılandırmışlardır. TAÖA'ya ilişkin yanıtlarında öğretmen adaylarının en çok deneysel daha sonra dışsal ispat şeması göstergeleriyle hareket ettikleri söylenebilir. Bunun yanında öğretmen adaylarının kullandıkları yöntemler hakkında yanlış bilgilere sahip oldukları yorumu yapılabilir.

## Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıklarını Söyledikleri Yöntemlere ve İspat Şemalarına ilişkin Bulguların Beraber Değerlendirilmesi

TAÖA'ya ilişkin olarak öğretmen adaylarının tepkileri hem kullandıklarını söyledikleri ispat yöntemleri açısından hem de ispat şemaları göstergeleri açısından beraber ele alınmaktadır.

Doğrudan ispat yöntemiyle çözülmeye elverişli olan birinci soruya ilişkin yanıtlarında en sıklıkla kullanıldığı söylenen yöntem doğrudan ispat yöntemidir. Başka deyişle, öğretmen adayları diğer ispat yöntemlerinin yanında en çok doğru olan yönteme vurgu yapmışlardır. Fakat, doğrudan ispat yöntemini kullandığını söyleyen 13 öğretmen adayından 11'i dışsal sembolik ispat şeması göstergeleriyle ispatı yapılandırmaya çalışmıştır ve bu ispat sorusunu doğru yanıtlayan, ispatı doğrudan ispat yöntemiyle yapan öğretmen adayı bulunmamıştır. Öğretmen adayları çoğunlukla doğrudan ispat yönteminde olması gerektiği üzere hipotezden hükme ilerleyecekleri yerde, hükümden hipoteze ilerlemişlerdir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının doğrudan ispat yöntemi uygulamalarını dışsal ikna süreçleri ile yürüttükleri ve dışsal sembolik ispat şeması göstergeleri ile hareket ettikleri söylenebilir.

Durumlarla ispat yöntemi ile çözülmeye elverişli olan ikinci soru; öğretmen adaylarının en çok başarı gösterdikleri sorudur. Öğretmen adaylarının %55'i durumlarla ispat yöntemi kullanılarak yapılandırılacak ispatta analitik dönüşümsel ispat şeması göstergeleriyle hareket ederek ve durumlarla ispat yöntemi kullanarak ispatı doğru yapılandırmışlardır. Fakat bu soruya ilişkin açıklamalarında doğru yanıt veren hiçbir öğretmen adayı durumlarla ispat yöntemini kullandığını belirtmemiş, farklı ispat yöntemlerini kullandıklarını ifade etmişlerdir. Buradan analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle ispatı yapılandıran öğretmen adaylarının hiçbirisinin kullandıkları yöntemi bilmedikleri sonucuna ulaşılabilir. Öğretmen adaylarının %44'ü bu soruya yanlış yanıt vermiştir. Öğretmen adaylarının hiçbiri durumlarla ispat yöntemini kullandığını belirtmemiş, en çok deneme yoluyla ispat ve doğrudan ispat kullandıklarını belirtmişlerdir. Bu öğretmen adayları deneysel algısal, deneysel temel örnekler ve dışsal sembolik ispat şemalarına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir. Dolayısıyla durumlarla ispat yöntemi ile yapılandırılmaya elverişli olan ispat sorusuna öğretmen adayları dışsal ve deneysel ikna durumları ile tepki vermişlerdir.

Çelişki yöntemi ile yapılandırılmaya elverişli olan üçüncü ispat sorusuna ilişkin açıklamalarında öğretmen adaylarından dördü çelişki yöntemi kullandığını belirtmiştir. Bu öğretmen adayları çelişki yöntemini kullanmamış, önermeyi belirli değerlerle yoklama yoluna gitmiş ya da anlamsız cebirsel manipülasyonlarda bulunmuşlardır. Yani, çelişki yöntemini kullandığını düşünen öğretmen adayları dışsal sembolik ve deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir.

Olmayana ergi yöntemiyle önermenin ispatlanması elverişli olan dördüncü soruya ilişkin yanıtlarında sadece üç öğretmen adayı olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmiş, fakat sözel ya da çizimlerle ikna yoluna gitmişler veya anlamsız cebirsel manipülasyonlarla ispatı yanlış yapılandırmışlardır. Dolayısıyla olmayana ergi yöntemini kullandığını ifade eden öğretmen adaylarının ikna etme durumları dışsal ve deneysel kaynaklı olmuştur.

Aksine örnek verme yöntemi ile ispatın yapılandırılabileceği beşinci ispat sorusuna ilişkin açıklamalarında dokuz öğretmen adayı aksine örnek verme ile ispat yaptığını belirtmiştir. Fakat bu öğretmen adayları sayısal değerler vererek ispatı yapılandırma yoluna gitmişlerdir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının aksine örnek verme ile ispatı deneysel ispat şeması göstergeleri ile yapılandırdıkları söylenebilir.

TAÖA'ya ilişkin bulgular ispat yöntemleri ve ispat şemaları açısından incelendiğinde; öğretmen adaylarının ispat yöntemi uygulamalarını ve ispata ilişkin açıklamalarını deneysel ve dışsal ispat şemalarına ilişkin göstergelerle ortaya koydukları sonucuna ulaşılabilir.

## Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yöntemleri Bilgilerine İlişkin Bulgular

Matematik öğretmeni adaylarının ispat yöntemleri hakkındaki bilgilerini ölçmek amacıyla İYÖA'ya verdikleri yanıtlara ilişkin bulgular aşağıdaki gibidir. Öğretmen adaylarına İYÖA'nın ilk sorusunda bildikleri ispat yöntemlerini yazarak açıklamaları istenmiştir. Buna ilişkin bilgiler Tablo 10 ve Tablo 11'de sunulmuştur.

**Tablo 10**
*İYÖA'ya İlişkin Bulgular*

| | | |
|---|---|---|
| *Tümevarım* | *Ö1,Ö3,Ö4,Ö5,Ö6,Ö7,Ö8,Ö9.Ö11,Ö12,Ö13,Ö14,Ö16,Ö17 ,Ö18,Ö19,Ö20,Ö21,Ö22,Ö24,Ö25,Ö28,Ö29,Ö31,Ö33, Ö34,Ö35,Ö38,Ö41* | *29(15 %)* |
| *Tümdengelim* | *Ö1,Ö3,Ö4,Ö5,Ö7,Ö8,Ö9,Ö17,Ö19,Ö20,Ö21,Ö22,Ö24, Ö25,Ö31,Ö33,Ö34,Ö35,Ö38,Ö41* | *20(10%)* |
| *Doğrudan İspat* | *Ö3,Ö5,Ö7,Ö8,Ö10,Ö13,Ö15,Ö17,Ö18,Ö19,Ö20,Ö21,Ö23,Ö24,,Ö25,Ö27,Ö28,Ö30,Ö31,Ö32,Ö33,Ö36,Ö37,Ö38,Ö41,Ö42,Ö43,Ö45,Ö46* | *29 (15%)* |
| *Dolaylı İspat* | *Ö6,Ö8,Ö10,Ö21,Ö33,Ö42* | *6(2%)* |
| *Aksine Örnek* | *Ö2,Ö3,Ö6,Ö7,Ö9,Ö10,Ö11,Ö12,Ö14,Ö15,Ö17,Ö18,Ö19, Ö20,Ö21,Ö22,Ö23,Ö24,Ö25,Ö27,Ö28,Ö31,Ö35,Ö37, Ö42,Ö43,Ö45,Ö46* | *28(14%)* |
| *Çelişki Yöntemi* | *Ö3,Ö4,Ö5,Ö6,Ö7,Ö10,Ö12,Ö13,Ö14,Ö16,Ö17,Ö19,Ö20 ,Ö21,Ö22,Ö23,Ö24,Ö27,Ö29,Ö30,Ö31,Ö32,Ö33,Ö35, Ö36,Ö38,Ö41,Ö42,Ö43,Ö45,Ö46* | *31(16%)* |
| *Olmayana Ergi* | *Ö1,Ö3,Ö4,Ö5,Ö6,Ö7,Ö10,Ö11,Ö12,Ö13,Ö17,Ö19,Ö20,Ö24,Ö25,Ö26,Ö27,Ö28,Ö30,Ö31,Ö32,Ö33,Ö35,Ö36,Ö37,Ö38,Ö40,Ö41,Ö42,Ö43,Ö45* | *31(16%)* |
| *Deneme/Yanılma/* | *Ö9, Ö21,Ö26,Ö35,Ö36,Ö41,Ö43* | *7(3%)* |
| *Deneme Yoluyla İspat* | *Ö2,Ö3,Ö5,Ö7,Ö10,Ö14,Ö17,Ö19,Ö20,Ö23,Ö24,Ö25,Ö31,Ö37,Ö42,Ö45,Ö46* | *17(9%)* |
| *Toplam* | | *198 (100%)* |

Tablo 10 incelendiğinde; öğretmen adaylarının en çok çelişki (%16) ve olmayana ergi (%16) yöntemine ilişkin yanıt verdikleri; daha sonra tümevarım (%15) ve doğrudan ispata (%15) yönelik yanıt verdikleri görünmektedir. Bunun yanında öğretmen adayları “deneme yanılma” (7) “deneme yoluyla ispat” (17) yöntemlerine ilişkin yanıtlar vermişlerdir. Bir öğretmen adayı “mantıksal muhakeme” cevabını diğeri “hipotedüktif düşünme” cevabı vermiştir. Tepkiler sadece birer öğrenciden geldiği için tabloya alınmamıştır. Doğrudan ispata ilişkin 30 yanıtın içerisinde dokuz tanesinde açıklama bulunmuş; bu açıklamalardan ise üç tanesi doğru olarak nitelendirilmiştir. Aksine örnek verme yöntemine ilişkin 12 açıklama mevcutken bu açıklamalardan sekiz tanesi doğrudur, çelişki yöntemine ilişkin 10 açıklama mevcut olup bunlardan üç tanesi doğru kabul edilmiştir. Ayrıca deneme yoluyla ispat yanıtları arasından yedi tanesine ilişkin açıklama yazılmış, bu açıklamaların iki tanesi doğru bulunmuştur. Olmayana ergi yöntemine ilişkin 10 açıklama mevcutken bu açıklamalardan altı tanesi doğru bulunmuştur. Bu ifadelerin mantıksal çıkarım yoluyla elde edildiği düşünülmüş ve analitik dönüşümsel ispat şeması göstergeleriyle ilişkilendirilmiştir. Tablo 11’e bakıldığında; öğretmen adaylarının açıkladıkları ispat yöntemleri içerisinde en fazla doğru yanıt yüzdesinin aksine örnek verme ile ispat (67%) yöntemine ait olduğu görülmektedir. Öğretmen adayları aksine örnek verme yönteminden sonra en fazla olmayana ergi ile ispat yöntemine (60%) ilişkin doğru açıklamalarda bulunmuşlardır. Başka deyişle kullandıklarını söyledikleri ispat yöntemine ilişkin açıklama yapan öğretmen adayları en sık aksine örnek verme ile ispat ve olmayana ergi ile ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle ifadeler vermişlerdir. Bunun yanında öğretmen adaylarının açıklamalarında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerin yanında en çok dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarıyla ispat yöntemlerine ilişkin açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Dışsal alışkanlık edinişmiş ispat şemasının ilişkili olduğu yöntemler ise olmayana ergi, çelişki yöntemi ve doğrudan ispat yöntemidir. Buradan öğretmen adaylarının ispat yöntem bilgisi ile ilgili dışsal ispat şemasına ilişkin açıklamalarının en sıklıkla bu üç yöntemle ilişkili olduğu söylenebilir.

**Tablo 11**

*Öğretmen Adaylarının Kullandıklarını Söyledikleri İspat Yöntemlerine İlişkin Açıklamaları*

| Kullandığını Söylediği İspat Yöntemi/ İ.Ş. | Deneysel T.Ö. İ.Ş (%) | Dışsal A.E. İ.Ş. (%) | Analitik Dön.İ.Ş. (%) | İlişkisiz İfadeler (%) | Toplam |
|---|---|---|---|---|---|
| Tümdengelim | | 2 | 1 (25%) | 1 | 4 |
| Doğrudan İspat | | 4 | 3(33%) | 2 | 9 |

**Tablo 11**

*Öğretmen Adaylarının Kullandıklarını Söyledikleri İspat Yöntemlerine İlişkin Açıklamaları (devam)*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Deneme Yoluyla İspat | 3 | 2 | 2(29%) | | 7 |
| Olmayana Ergi ile İspat | | 4 | 6(60%) | | 10 |
| Çelişki Yöntemi ile İspat | | 6 | 3 (30%) | 1 | 10 |
| Aksine Örnek Verme ile İspat | 1 | 2 | 8(67%) | 1 | 12 |
| Toplam | 4 | 20 | 23(44%) | 5 | 52 |

Öğretmen adaylarından bildikleri ispat yöntemlerini yazmaları istendiğinde en çok çelişki (%16) ve olmayana ergi (%16) yöntemine ilişkin yanıt verdikleri; daha sonra tümevarım (%15) ve doğrudan ispata (%15) yönelik yanıt verdikleri görülmüştür. Bu yöntemlere ilişkin açıklamalarında ise doğru yanıt oranı en fazla olan yöntem aksine örnek verme ile ispat (67%) ve olmayana ergi ile ispat yöntemi (60%) olmuştur. Fakat öğretmen adayları olmayana ergi yöntemi ile ilgili açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergeler de taşımışlardır. Buradan öğretmen adaylarının aksine örnek verme ile ispat yöntemi ile ilgili olarak en sıklıkla hem ismini bilip hem de aynı anda açıklama yapabildikleri ve analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle açıklama yaptıkları ispat yöntemi olduğu söylenebilir.

***Matematik Öğretmeni Adaylarının Belirli İspat Yöntemleri Hakkındaki Bilgileri***

İYÖA'nın ikinci bölümünde öğretmen adaylarına sırasıyla doğrudan ispat, olmayana ergi ile ispat, çelişki yoluyla ispat, aksine örnek ile ispat ve deneme yoluyla ispat yöntemlerini açıklamaları istenmiştir. Bulgular aşağıdaki gibidir.

**Tablo 12**

*Öğretmen Adaylarının İspat Yöntemlerine İlişkin Bilgileri*

| | Analitik Dön. İ.Ş. | Deneysel T.Ö. İ.Ş. | Dışsal Alış. Ed. İ.Ş. | Gruplandırılamayan | Toplam | Boş |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Doğrudan İspat | 4 (6%) | 4 (10%) | 9 (24%) | 24 (41%) | 41 | 3 |
| Olmayana Ergi ile İspat | 11 (17%) | 2 (4%) | 15 (39%) | 11 (18%) | 39 | 6 |
| Çelişki ile İspat | 10 (15%) | 4 (10%) | 10 (26%) | 17 (29%) | 41 | 3 |
| Aksine Örnek Vererek İspat | 32 (48%) | 1 (2%) | 3 (8%) | 6 (10%) | 42 | 2 |
| Deneme Yoluyla İspat | 9 (14%) | 31 (74%) | 1 (3%) | 1 (2%) | 42 | 2 |
| | 66 (100%) | 42(100%) | 38(100%) | 59 (100%) | 205 | |

Öğretmen adaylarının doğru olan açıklamalarında en sıklıkla aksine örnek verme ile ispat yöntemine ilişkin yanıt verdikleri tespit edilmiştir. Örneğin Ö5, aksine örnek verme yöntemi ile ilişkin şu açıklamayı yapmıştır: “Genellikle savları çürütmek için kullanılır. Verilen önermeyi yanlışlayan tek bir durum bulduğumuzda onu çürütmüş oluruz”. Bu gibi ifadeler analitik dönüşümsel ispat şeması kategorisinde sınıflandırılmıştır.

Öğretmen adaylarının en çok (%74) deneme yoluyla ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında deneysel temel örnekler ispat şeması göstergeleri ile açıklama yaptıkları tespit edilmiştir. Bu ifadelerde öğretmen adayları sınırlı bir kümenin varlığından bahsetmemişlerdir. Örneğin Ö2: “İspat edilmeye çalışılan ifadede farklı değerler denenerek genellemeye gidilir” derken, Ö4: “Birkaç değeri yerine koyarak deneyerek doğruluğu göstermek” olarak açıklama yapmıştır. Bu tür ifadelerde kümenin sınırlı olması yadsınmış olduğundan öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun deneme yoluyla ispat yönteminin ne olduğuna ilişkin fikirlerinin doğru olmadığı, önermeyi belirli değerlerle doğrulama yolunu ispat olarak gördükleri söylenebilir.

Öğretmen adaylarının en sıklıkla (%39) olmayana ergi ile ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergelerle açıklama yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin, Ö21: “Verilen ifadenin yanlış olduğunu düşünerek başlarız. Bu yoldan giderken sonuç yanlış çıkıyorsa aslında verilen ifade doğrudur” açıklamasında bulunmuştur. Ö28: “Önermenin yanlış olduğunu varsayıp bu varsayımın yanlışlığı ispatlanır” demiştir. Her iki öğretmen adayı ispata hipotezin değilinin alınmasıyla başlandığını düşünmüşlerdir ve bu şekilde çelişki bulunacağını ifade etmişlerdir. Bunun kaynağı, öğretmen adaylarının daha çok olmayana ergi yöntemi ile çelişki yöntemini birbirleri ile karıştırmaları ve dolayısıyla alışkanlık edinilmiş tanımlama yoluna gitmeleri olabilir. Bunun yanında, öğretmen adaylarının en çok (32 öğretmen adayı, analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkilerin %48’i) aksine örnek verme ile ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle açıklama yaptıkları belirlenmiştir. Bunun yanında öğretmen adayları en çok (15, %39) olmayana ergi ile ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması göstergeleriyle açıklama yapmışlardır.

## Tartışma

Bu bölümde matematik öğretmeni a Öğretmen adaylarının TAÖA’ya ilişkin verdikleri yanıtlarda ikinci soru haricinde doğru bir ispat yapılandıramadıkları, doğru biçimde yapılandırdıkları önermeye ilişkin yöntem bilgilerinin ise yanlış olduğu sonucuna ulaşılmıştır. TAÖA’nın ikinci sorusuna ilişkin doğru yapılandırdıkları ispatlarda ise kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgilere sahip oldukları belirlenmiştir. Başka deyişle öğretmen adaylarının önermeleri ispatlamada başarısız oldukları, yöntemler ve yöntemleri kullanma bilgilerinde eksikleri olduğu, önermeyi ispatladıkları durumlarda ise kullandıkları yöntemi bilmedikleri belirlenmiştir. Bu bulgu; matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmakta sınıktılar yaşadıkları ve ispat yöntemlerinin mantığını kavrayamadıklarını ifade eden çalışmalarla (Güler ve diğ., 2012; Özer ve Arıkan, 2002; Stylianides ve diğ., 2007; Zaimoğlu, 2012) tutarlık göstermektedir.

Doğrudan ispat yöntemiyle çözülmeye elverişli olan birinci soruya ilişkin yanıtlarında öğretmen adayları en çok doğrudan ispat yöntemini kullandıklarını belirtmişlerdir. Doğru yargıyla ifade ettikleri açıklamaları ise bu soruya ilişkin önerme ispatlarına yardımcı olmamıştır. Çünkü, öğretmen adayları doğrudan ispat yöntemini kullandıklarını söyledikleri durumlarda dışsal sembolik ispat şeması göstergeleri ile hareket etmişlerdir. Buradan, öğretmen adaylarının doğru olarak yapılandırdıkları ispatlarda dışsal kaynaklı ikna yollarını kullandıkları söylenebilir. İmamoğlu ve Yontar Toğrol (2015) öğretmen adaylarının doğrudan ispat ve durumlarla ispat yöntemlerini diğer yöntemlere göre daha sık kullanmayı tercih ettiklerini ortaya koymuşlardır. Öğretmen adalarının tutumları bu açıdan benzerlik göstermektedir. Bunun yanında; öğretmen adaylarının doğru olarak yapılandırdıkları ispatlarda bile dışsal ispat şeması göstergeleri taşımalarının sebebi, ispatı anlamlı bulmamalarından kaynaklanıyor olabilir. Nitekim; ispat ve uygulamaları öğrencilerin okul matematiğinde nadiren karşılarına çıkmaktadır. Bu yüzden; matematiği kendi normlarının ve uygulamalarının bir ürünü olmaktan ziyade, öğretmenleri, ders kitapları ve diğer oluşumlar tarafından sağlanan gerçeklerin bir derlemesi olarak algılamış (Sears, 2019) olabilirler.

Durumlarla ispat yöntemi ile çözülmeye elverişli olan ikinci soruya ilişkin tepkilerinde öğretmen adaylarının yarıdan fazlası (%55'i) ispatı doğru yapılandırarak yanıt vermişlerdir. Bu yüzden durumlarla ispat gerektiren soruya öğretmen adaylarının büyük kısmı analitik dönüşümsel ispat şeması göstergeleriyle yanıt vermişlerdir. Fakat, öğretmen adaylarının hiçbiri durumlarla ispat yöntemini kullandıklarını belirtmemiştir. Buradan, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının, analitik dönüşümsel ispat şemasına sahip olduğu durumlarda bile kullandıkları ispat yönteminden habersiz olduğu sonucuna ulaşılabilir. Durumlarla ispat yöntemiyle yapılandırılmaya elverişli olan ikinci soruya öğretmen adaylarının %44'ü yanlış yanıt vermiştir. Öğretmen adayları en çok deneme yoluyla ispat ve doğrudan ispat kullandıklarını belirtmiş bunun yanında ispatlarını dışsal ve deneysel ispat şemasına ilişkin göstergelerle yapılandırmışlardır.

Çelişki yöntemi ile yapılandırılmaya elverişli olan üçüncü ispat sorusuna ilişkin açıklamalarında öğretmen adaylarından sadece dördü çelişki yöntemini kullandığını belirtmiş, fakat önermeyi belirli değerlerle yoklama yoluna gitmiş ya da anlamsız cebirsel manipülasyonlarda bulunmuşlardır. Dolayısıyla çelişki yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adayları ispatlarını dışsal ve deneysel ispat şemasına ilişkin göstergelerle yapılandırmışlardır. Bu bulgu Sears'ın (2019) öğretmen adaylarının en çok dışsal ve deneysel ispat şemasına ilişkin tepkiler verdikleri ve genelde önermeleri belirli değerlerle yoklama eğiliminde oldukları bulgusuyla tutarlıdır.

Olmayana ergi yöntemiyle önermenin ispatlanması elverişli olan dördüncü soruya ilişkin yanıtlarında sadece üç öğretmen adayı dışsal ve deneysel ispat şeması göstergeleriyle olmayana ergi yöntemini kullandığını belirtmişlerdir. Aksine örnek verme yöntemi ile ispatın yapılandırılabileceği beşinci ispat sorusuna ilişkin açıklamalarında dokuz öğretmen adayı aksine örnek verme ile ispat yaptığını belirtmiş fakat ispatı aksine örnek verme ile ispatı deneysel ispat şeması göstergeleri ile yapılandırmışlardır.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sadece durumlarla ispat yöntemiyle ispat yapabildiği, diğer durumlarda dışsal ve deneysel ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket ederek ispat yapılandırmalarında başarısız oldukları söylenebilir. Bunun yanında doğrudan ispat yaptığını söyleyen öğretmen adayları dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir. Durumlarla ispat yaptığını söyleyen öğretmen adayları doğru yanıtlarında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkiler vermiş fakat kullandıkları yöntemi bilmemişlerdir. Bu öğretmen adayları yanlış yanıtlarında deneysel algısal, deneysel temel örnekler ve dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir. Çelişki ve olmayana ergi yöntemini kullandığını söyleyen öğretmen adayları yanıtlarında dışsal sembolik ve deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergeler taşırken, aksine örnek verme yöntemini kullandığını belirten öğretmen adayları ise deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergelerle ispatlarını yapılandırmaya çalışmışlardır.

İspat yöntem bilgileri hakkındaki sorularda öğretmen adayları en çok (%74) deneme yoluyla ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında deneysel temel örnekler ispat şeması göstergeleri ile açıklama yapmışlardır. Bu bulgu öğretmen adaylarının (Doruk ve Kaplan, 2017; Gholamazad ve diğ., 2004; İskenderoğlu ve diğ., 2010; Stylinou ve diğ., 2016; Uygan ve diğ., 2014) ve ortaokul öğrencilerinin (Heinze ve Reiss, 2003) deneysel ve dışsal ispat şemalarını ağırlıklı olarak kullandıkları ya da deneysel olarak oluşturulan argümanları ispat olarak gördükleri bulgularıyla tutarlık göstermektedir. TAÖA'ya ilişkin yanıtlarında özellikle birinci, üçüncü ve beşinci sorularda öğretmen adayları çoğunlukla önermede bilinmeyene sayısal değerler vererek ispatı yapılandırma yoluna gitmiştir. Bu sebeple öğretmen adayları bu sorulara ilişkin ispat yapılandırmalarında çoğunlukla deneysel temel örnekler ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket etmişlerdir. Benzer şekilde Köğce (2013) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının önermeleri sayısal değerler vererek doğrulamanın ispat için yeterli olduğu inancına sahip olduklarını raporlamıştır.

Bu çalışmanın önemli bulgularından biri, öğretmen adaylarının 24'ünün ikinci soruya ilişkin yanıtlarında ispatlarını doğru yapılandırmaları fakat kullandıkları yöntem hakkında bilgi sahibi olmamalarıdır. Bunun yanında; diğer sorularda da öğretmen adaylarının hiçbiri önermeleri doğru ispatlayamamış; bunun yanında çok azı uygun yöntem hakkında doğru yanıt vermişlerdir. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının ispat becerileri ve kullandıkları ispat yöntemleri hakkındaki fikirlerinin eksik olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu bulgu, Demircioğlu'nun (2022) öğretmen adaylarının alternatif ispat yöntemleri konusunda bilgi sahibi olmadıkları, Doruk ve Kaplan'ın (2013) matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme süreçlerinde başarısız oldukları, Doruk ve Kaplan'ın (2017) matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerilerinin zayıf olduğu ve temel kavramları ispatlama süreçlerinin istenen düzeyde olmadığı (Barak, 2018) bulgularıyla uyumludur.

İYÖA'ya ilişkin bulgulara bakıldığında, öğretmen adaylarından kullandıkları ispat yöntemlerini yazıp açıklamaları istendiğinde, en fazla doğru yanıt yüzdesinin aksine örnek verme ile ispat (67%) olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları aksine örnek verme ile ispat yönteminden sonra en çok olmayana ergi ile ispat yöntemine (60%) ilişkin doğru açıklamalarda bulunmuşlardır. Başka deyişle kullandıklarını söyledikleri ispat yöntemine ilişkin açıklama yapan öğretmen adayları en sık aksine örnek verme ile ispat ve olmayana ergi ile ispat yöntemine ilişkin açıklamalarında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle ifadeler vermişlerdir. Bunun yanında öğretmen adaylarının açıklamalarında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerin yanında en çok dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarıyla ispat yöntemlerine ilişkin açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının ilişkili olduğu yöntemler ise olmayana ergi, çelişki yöntemi ve doğrudan ispat yöntemi olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat yöntem bilgisi ile ilgili dışsal ispat şemasıyla ilişkilendirilen açıklamaları en sıklıkla bu üç yöntemle ilişkilendirdikleri söylenebilir. Fakat öğretmen adayları olmayana ergi yöntemi ile ilgili açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergeler de taşımışlardır. Buradan öğretmen adaylarının hem ismini bilip hem de aynı anda açıklama yapabildikleri, analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle açıklama yaptıkları en yüksek oranın aksine örnek verme ile ispat yöntemi olduğu söylenebilir. Bu bulgu Doruk'un (2019) matematik öğretmeni adaylarının tümevarım, doğrudan ispat, karşı örnek yöntemiyle ispatı belirlemede başarılı oldukları bulgusuyla tutarlıdır.

Öğretmen adayları en önemli gördükleri ya da en sık kullandıkları ispat yöntemine ilişkili açıklamalarında gerekli olduğu yerde ispat yönteminin kullanımına vurgu yapmak yerine en çok bildikleri (deneme yoluyla ispat) yönteme vurgu yaparak açıklamalarda bulunmuşlardır. Buradan, öğretmen adaylarının alternatif ispat yöntemlerine ve bu yöntemleri kullanma durumlarına ilişkin bilgi sahibi olmadıkları, tüm ispat sorularını uygun yöntem aramak yerine kendi bildikleri ya da önemli gördükleri yöntemlerle ispatı yapılandırma eğiliminde oldukları söylenebilir. Bu bulgu, Demircioğlu'nun (2022) öğretmen adaylarının alternatif ispat yöntemleri konusunda bilgi sahibi olmadıklarını ve bildikleri ispat yöntemlerini kullanmakta ısrarcı oldukları bulgusuyla tutarlıdır. Öğretmen adayları ispat yapma süreçlerinde çoğunlukla hipotezden hükme ilerlemek yerine hükümden hipoteze ilerleme davranışında bulunmuş, akıl yürütemedikleri durumlarda uygun yöntem belirleme çabası içine girmeden anlamsız cebirsel manipülasyonlarla ispatı yapılandırmaya çalışmışlardır. Bu bulgu, öğretmen adaylarının daha çok ezbere yollarla ispatları öğrenip yapılandırdıkları (Doruk ve Kaplan, 2013), verilen önermelere ilişkin olarak önermenin anlamını anlamada, ispata başlayacakları yeri bilmede, ispat için uygun yöntemi bulmada ve kullanmada ispat oluşturmada önermenin mantıksal yapılarını tanımlamada sıkıntılar yaşadıkları (Uğurel ve diğerleri, 2016) ve zayıf argümanlar ürettikleri (Güler ve Ekmekçi, 2016) bulgularıyla uyumludur.

## Sonuç

Bulgular bir bütün olarak ele alındığında; öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun, değişkene değerler vererek ispat yapma eğiliminde oldukları ve bunun ispat olmadığının farkında olmadıkları söylenebilir. Buradan öğretmen adaylarının çoğunlukla deneysel ispat şemasına ilişkin göstergelerle hareket ettikleri söylenebilir. Bunun yanında öğretmen adayları yine büyük çoğunlukla ispat yöntemlerini doğru bilmemektedirler. Buradan ispat yöntemlerine ilişkin bilgi eksiklikleri olduğu sonucuna ulaşılabilir. Öğretmen adayları lisans eğitimleri boyunca ispat bilgisi ve yöntemlerine ilişkin dersler almaktadır. İlgili alanyazında da görüldüğü üzere matematik öğretmeni adaylarının bu konuda eksiklikleri mevcuttur. Değişen paradigmalar ve öğretim programları öğretmen adaylarının ispatı öğrenmelerini gerektirmektedir ve öğretmen adaylarının çok azının arzu edilen düzeydeki ispat şemalarına sahip oldukları düşünüldüğünde, ikna edici ispat oluşturma konusunda zorlandıkları için sınırlı anlayışla ispat öğretiminde de zorlanacakları öngörülmektedir (Sears, 2019). Bu yüzden öğretmen adaylarının lisans öğrenimlerinde daha fazla ve çeşitte ispatlarla uğraşmaları önerilmektedir. Öğretmen adaylarının farklı türdeki ispatlarla uğraşma deneyimleri kazandıklarında, ispat ve muhakeme becerilerini geliştirdiği ortaya konulmuştur (Karunarakan ve diğerleri, 2014). Bunun yanında, lisans derslerinde ispat uygulaması olan derslerde sadece ispat ve çözümlerine odaklanılması yerine ortaokul ve lise düzeyindeki ispat öğretimine ilişkin ispat uygulamaların öğretmen adaylarına kazandırılması önerilmektedir. Sears ve diğerleri (2013), çoğu öğretmen adayının geometri dışında ispat yapma konusunda pek fazla fırsata sahip olmadığını ve ispatı etkili bir şekilde öğretme konusunda zorlanacaklarını algıladıklarını belirtmişlerdir. Dolayısıyla, öğretmen adayları üniversite deneyimleri boyunca ispat ve ispat öğretimi pratiği fırsatına sahip olmalıdırlar. Bunun yanında ispatın rolü ve doğası hakkında da sınırlı anlayışa sahiptirler. Bu yüzden, öğretmen eğitimi müfredatında ispatın rolü ve doğası üzerine tartışmaların dahil edilmesi gerekmektedir (Sears ve diğ., 2013). Bu yolla, öğretmen adayları pedagojik eğitimle beraber ispat öğretimi hakkında daha derin bir kavrayış elde edebilir ve ilerideki öğretimlerinde ispat öğretimini ortaokul ve lise müfredatına entegre edebilirler. Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının, hem ispat hakkında iyi gelişmiş anlama ve düşünme yollarıyla hem de bu eğitim düzeyine uygun ispatlamaya ilişkin derin bilgiyle öğretmen yetiştirme programlarından mezun olmaları gerekmektedir (Brown ve Stillman, 2009).

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının ispat becerileri, ispat yöntem bilgileri ve ispat şemaları incelenmiştir. Araştırmacılara ispat uygulamaları entegreli ortaokul ve lise öğrencilerine yönelik derslerde deneysel çalışmalar yapmaları önerilmektedir. Böylelikle ispat uygulamalı öğretimin eğitime entegresi sonucundaki çıktılar ele alınabilir ve çözüm yolları geliştirilebilir.

## Etik Kurul İzin Bilgisi:

## Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi:

## Yazar Katkısı:

## Kaynakça

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anyting. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488. https://doi.org/10.1080/0020739031000108574.

Barak, B. (2018). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat yapa süreçlerinin incelenmesi* [Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

Brown, J., & Stillman, G. (2009). Preservice secondary teachers' competencies in proof. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education Mathematics Education*, 1, 1-94.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM*). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/Math/

Çontay, E. G. ve Duatepe Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 59-100. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.397109.

Demircioğlu, H. (2022). Matematik öğretmen adaylarının, matematik öğretmenlerinin ve akademisyenin ispat becerilerinin incelenmesi, *The Journal of Academic Social Science Studies*, *73,* 493-508. http://dx.doi.org/10.9761/JASSS7906

Doruk, M. (2019). Preservice mathematics teachers' determination skills of the proof techniques: The case of ıntegers. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *7*(4), 335-348.

Doruk, M., ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (44), 467-498. https://doi.org/10.21764/maeuefd.305605.

Doruk, M., ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *2*(1), 241-252.

Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2004, October 21-24). *What counts as proof? Investigation of preservice elementary teachers' evaluation of presented 'Proofs'*, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Toronto, Canada. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2026%202004%20Proceedings%20Vol%201.pdf.

Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A historian's perspective. G. Hanna, & M. De Villers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*, [Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

Güler, G., ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 59-83.

Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20*(1), 219-236.

Güner, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. [Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7,* 234-283.

Hersch, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24,* 389-399. https://doi.org/10.1007/BF01273372.

Imamoglu, Y., v& Yontar Togrol, A. (2015). Proof construction and evaluation practices of prospective mathematics educators. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(2), 130-144.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* [Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

İskenderoğlu, T., Baki, A., & İskenderoğlu, M.(2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *9,* 531-536. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.192.

Karakuş, F., Erşen, Z.B., ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal bilimler Dergisi UUSBD Özel Sayısı*), 245-266. https://doi.org/10.12780/usaksosbil.373865

Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N., & Arbaugh, F. (2014). Improving preservice secondary mathematics teachers' capability with generic example proofs. *Mathematics Teacher Educator*, *2*(2), 158-170. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.2.0158.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*. *64*(5), 291-314. https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977625.

Knuth, E.J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959.

Köğce, D. (2013). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspatın Matematik Öğrenmeye Katkısı ile İlgili Görüşleri ve İspat Düzeyleri. *Electronic Turkish Studies*, *8*(12).

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. A. Gutierrez, & P. Boero (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future (pp.* 173-204). Sense Publishers.

Mason, J, Burton, L., ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2. Ed.). Pearson.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston.VA: NCTM.

Noto, M.S., Priatna, N., & Dahlan, J.A. (2019). Mathematical proof: Learning obstacles pre-service teachers on transformation geometry. *Journal on Mathematics Education*, *10*(1), 117-126.

Oflaz, G., Bulut, N., & Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, *63,* 133-152.

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2022). Secondary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Proof Process: A Case Study. *Eurasian Journal of Teacher Educaiton*. *3*(1), 39-54.

Pala, O., & Narlı, S. (2018). Examining Proof Schemes of Prospective Mathematics Teachers Towards Countability Concept. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, *12*(2).

Pekşen Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. [Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

Reid, D.A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: case study, *Journal of Faculty of Educational Sciences*, *40*(2), 295-319.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675. https://doi.org/10.5951/MT.91.8.0670.

Sears, R., Mueller, E., ve Karadeniz, I. (2013, November 6-8). Preservice teachers perception of their preparation program to cultivate their ability to teach proof. I Congreso de Education Matematica de America Central y El Caribe. http://funes.uniandes.edu.co/4271/1/SearsPreserviceCemacyc2013.pdf.

Sears, R. (2019). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(4), 258-274. https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1467106.

Stylinou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006, Kasım 9-12). *Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions,* Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2028%202006%20Proceedings.pdf.

Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(2), 365-378.

Şengül, S., ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi, *International Journal of Social Science,* 6(2), 869-878. http://dx.doi.org/10.9761/JASSS_401

Şen, C.., ve Güler, G. (2022). Matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispatlarda ispat yazma becerilerinin incelenmesi: Van Hiele modeli. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23 (Özel Sayı),* 128-176. https://doi.org/10.29299/kefad.997311.

Stylianides,G.J., Stylianides,A.J.,ve Philippou, G.N.(2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10,* 145-166. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z.

Tall, D. (2002). Differing modes of proof and belief in mathematics. *International Conference On Mathematics*. 91-107.

Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 137-157. https://doi.org/10.16949/turcomat.33155

Uğurel, I., Morali, H., Yiğit Koyunkaya, M., & Karahan, O. (2016). Pre-Service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *Eurasıa Journal Of Mathematıcs Scıence And Technology Education*, *12*(2), 203-231. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1523a

Uygur Kabael, T. (2020). İspat yapma yöntemleri. I. Uğurel (Ed.) *Matematiksel ispat ve öğretimi* (227-242). Anı Yayıncılık.

Varghese, T. (2007). Student teachers' conceptions of mathematical proof, Faculty of Graduate Studies and Research. [Yüksek Lisans Tezi, University of Alberta]. Admonton. https://era.library.ualberta.ca/items/e2c86876-2f0a-4982-9812-ff314d023fcd.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2021). *Nitel Araştırma Yöntemleri*. (7. Baskı). Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers* [Doctoral Diisertation, The University of Texas, Austin, USA]. https://www.proquest.com/docview/304473805?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true&sourcetype=Dissertations%20&%20Theses.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. [Yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

PAÜEFD, 62, 362-404 [2024] https://doi.org/10.9779/pauefd.1359924

Pamukkale University Journal of Education
ISSN: 2757-8127

# Preservice Mathematics Teachers' Understanding of Proof Through Deductive Reasoning

Emine Gaye ÇONTAY[1]

## Abstract

*The aim of the study is to investigate preservice mathematics teachers' skills in proving through deductive reasoning, their knowledge of proof methods, and their ability to use proof methods in the context of their "understanding of proof" by associating them with proof schemes. The study was conducted with 44 preservice teachers studying in their final year at a state university. Two different assessment instruments were developed and applied. The findings of the study revealed that the majority of preservice teachers had weak proof skills that they structured the proof by giving values to the and that they frequently acted with experimental proof scheme indicators. When preservice teachers were evaluated in terms of their knowledge of proof methods, they had the knowledge about the method of counterexample. The only proof question in which preservice teachers acted with indicators related to the analytical transformational proof scheme was that could be solved by using the method of "proof cases." It was identified that none of the preservice teachers who structured their proofs with analytical proof scheme indicators knew the proof method they used. Consequently, the proof understanding of the preservice mathematics teachers who participated in this study was found insufficient.*

**Article Details**
Research Article

Received
13/09/2023
Accepted
02/04/2024
Published
23/09/2024

**Key words**
Preservice mathematics teachers,
Proof ability,
Proof education,
Proof scheme,
Knowledge of the proof method

** This study was conducted using some of the data from the Pamukkale University BAP project, numbered 2019BSPP017. In addition, some of the data for this project was presented as a poster presentation at the CERME 13.*
*1 Assoc. Prof. Dr., Pamukkale University, https://orcid.org/0000-0002-6446-9217, germec@pau.edu.tr*



**Suggested Citation:**
Çontay, E. G. (2024). Preservice mathematics teachers' understandings of proof through deductive reasoning. *Pamukkale University Journal of Education [PUJE], 62, 362-404. https://doi.org/10.9779/pauefd.1359924*

## Introduction

The concept of proof, introduced by the Ancient Greeks, has been handled in various ways in different cultures over time and has survived to the present day. In ancient times, while it was discussed within the axiomatic system as making inferences from clearly determined postulates, it was expressed in a completely different way with symbolic representations in the 17th century and progressed together with important concepts of analysis such as limit and continuity (Almeida, 2003; Grabiner, 2012; Kleiner, 1991; Reid & Knipping, 2010). Towards the 19th century, the axiomatic system was transitioned by adding intuitive geometric elements, and thus, the proof progressed together with mathematical logic. Later, the foundations of Euclidean geometry were discussed, and non-Euclidean geometries emerged. With the involvement of computers in mathematics in the 20th century, the axiomatic system began to take its place in the basic areas of mathematics again; the role and meaning of proof in mathematics have begun to be reconsidered. Mathematical proof has begun to be discussed with new concepts such as "social proof," "semi-empirical proof" and "proof as a social process." With these concepts, the assumptions of absolute truth, formalism and formal structure of proof were rejected. For example, Lakatos argued that mathematics was fallible and that propositions were subject to examples and possible rejections. Such developments gave rise to the concept of "social proof" in schools; the concept of proof has begun to be accepted as an appropriate standard of proof, not only in its formal form but also in its informal form (Almeida, 2003; Grabiner, 2012; Hanna, 1990; Kleiner, 1991; Reid & Knipping, 2010). Thus, the concept of acceptable proof has developed (Hanna, 1990); mathematical proof as a problem-solving activity has been seen as the last step in which ideas are finalized (Tall, 2002). Mason et al. (2010) famous saying in this context is: “*Convince yourself, convince your friend, convince your enemy*!” (p. 87). Hence, this new form of proof has taken its place in the context of informal proof as "*a convincing argument judged by competent judgements*" (Hersh, 1993; p. 389). In the following processes, it has been accepted that reasoning and proof are the basic parts of mathematics, and the idea that it should be taught to students from pre-school to the highest level began to be adopted in education (NCTM, 2000; Common Core, 2010). Thus, the concepts of proof and proving have become an important goal of mathematics education; It has been intended to be included in the curriculum (Mariotti, 2006). NCTM (2000) has emphasized that proof should become a natural part of classroom discussions on all topics. Despite innovative perspectives advocating the need for proof to be included in education; most teachers have limited knowledge and understanding about mathematical proof, and with these new perspectives, they have become teachers without sufficient training to teach mathematical proofs (Knuth, 2002; Yoo, 2008). However, university teacher training programs have a suitable place in implementing mathematical innovations (Varghese, 2007). Therefore, it was deemed important to reveal preservice mathematics teachers' understanding of mathematical proof.

To reveal preservice mathematics teachers' proof processes with deductive reasoning; It seems useful to mention certain methods of proof.

## Proof Methods

Assuming that the proposition to be proven is tautological in nature. The proposition “If p is true, q is true” is either true or false. The proof methods used in this study are presented in terms of whether the proposition is either false or true (Uygur Kabael, 2020):

### *False State of the Proposition*

**Proof By Counterexample.** If the proposition p is true, q is true is false (p=>q)', there is at least one situation in which the proposition q is not true while the proposition p is true. This situation can be exemplified and proven that the proposition p =>q is false.

### *The True State of the Proposition*

**Direct Proof.** If the proposition "If p is true, q is true" is true, the truth of proposition p is sufficient to show the truth of proposition q, then a direct proof is made.

**Proof by Consuming.** Let a set E with a finite number of elements be accepted. The property in proposition p is assumed to be true. The truth of the property in proposition q when E consists of as many elements as can be shown for each element in the set, the proposition is shown separately for each element.

**Proof by Cases.** In some cases, the proposition is examined in terms of the different properties of the elements in certain subsets (a limited number) of a set. In this case, the direct proof of the proposition is made for each subset. This proof method cannot be used in infinite sets.

**Indirect Proof.** In cases where previous results are not sufficient for direct proof of the proposition "If p is true, q is true", the indirect proof method is used. It is shown that the other proposition to which the proposition is logically equivalent or not is false.

**Reductio Ad Absurdum (Contrapositive).** Instead of "If p is true, q is true", the logically equivalent proposition of this proposition, "If q' is true, then p' is true (q'=>p'), is directly proven.

**Proof by Contradiction.** The falsehood of the proposition (p^q'), which is the opposite of the proposition "If p is true, q is true", is shown. The contradiction is reached by assuming that the proposition (p^q') is true; the incorrectness of the assumption, that is, the truth of the proposition p=>q, is shown.

## Proof Schemes

The concept of proof and proving, the importance of which is emphasized in mathematics education and which has been discussed with various methods above, was also discussed by Harel & Sowder (1998) in the context of social proofs. When considered in terms of social, that is, informal proofs used in schools, proof can be defined as "the process put forward by the individual to create or eliminate doubts about the accuracy of an observation" (Harel & Sowder, 1998, p. 241).

Harel & Sowder (1998) divided the proving process into two processes: "ascertaining" and "persuading". They define ascertaining as "a process that an individual puts forward to eliminate his own doubts about the accuracy of an observation" and persuading as "a process that he puts forward to eliminate the doubts of others about the accuracy of an observation" (Harel & Sowder, 1998, p.241)., the concept of proof scheme has been defined as: "An individual's proof scheme includes the things that constitute truth learning and persuasion for that individual" (Harel & Sowder, 1998, p.244). Therefore, it can be pointed out that revealing the proof schemes of individuals is necessary to determine how they convince themselves and others in their proof processes. Sowder & Harel (1998) grouped proof schemes into three types: external, experimental and analytical:

### *External Proof Scheme*

Individuals' ability to ascertain and persuade the truth is external. These external sources include an authority based on a teacher or a book (authoritative proof scheme); the appearance, form, and conventional format of an argument (ritual proof scheme); or it can occur as a meaningless manipulation of symbols (symbolic proof scheme) that is far from meaning and without associating them with the quantities in the situation (Sowder & Harel, 1998).

### *Experimental Proof Scheme*

Individuals acting with external proof scheme indicators exhibit behaviors of validating or rejecting their assumptions by basing them on sensory experiences or physical evidence. When individuals sense the truth or falsehood of a situation with their feelings and cannot find strong evidence, and try to persuade with drawings, they turn to the experimental perceptual proof scheme; when individuals evaluate hypotheses by testing their persuasive efforts with one or more examples, they have an empirical examples-based proof scheme.

### *Analytical Proof Scheme*

When individuals validate their assumptions through logical deduction, they act with indications of the analytical proof scheme. Individuals with an analytical transformational proof scheme relate their justifications to general aspects of situations and place them within a general analytical framework. Individuals who act with analytical axiomatic proof scheme indicators can work comfortably within the axiomatic system, knowing that the starting point of justifications is undefined terms and axioms.

According to Sowder & Harel (1998), the classification of proof schemes has a partial hierarchical structure. For example, Transformational proof schemes can be considered a prerequisite for axiomatic proof schemes or external proof schemes are considered important in the development of analytic proof schemes. In addition, individuals can act with indicators related to more than one proof scheme at the same time.

## Literature Review and Importance of The Study

In this study, individuals' understanding of proof was discussed with their proof skills, their methodological knowledge of proof and their proof schemes together and presented as a whole.

When the related literature was examined, many studies revealed the proof skills and proof schemes of preservice mathematics teachers. These studies were conducted to examine the proof schemes of preservice mathematics teachers (Çontay & Paksu, 2018; Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu et al., 2010; Pala & Narlı, 2018; Sarı et al., 2007; Sears, 2019; Şengül & Güner, 2013; Uygan et al., 2014) and these studies examined preservice teachers' proof knowledge or proof processes (Barak 2018; Doruk & Kaplan 2013; Erşen & Ocak, 2017; Güler, 2013; Güler & Ekmekçi, 2016; Güler et al., 2012; İmamoğlu & Yontar Toğrol, 2015; Karakuş et al., 2017; Karunakaran et al., 2014; Noto et al., 2019; Öztürk & Kaplan, 2022; Pekşen Sağır, 2013, Stylianides et al., 2007; Şahin, 2016; Şen & Güler, 2022; Zaimoğlu, 2012;).

Research shows that preservice teachers (Gholamazad et al., 2004; İskenderoğlu et al. 2010; Uygan et al., 2014) predominantly use the experimental proof scheme or see experimentally created arguments as proof. Some studies have found that preservice primary teachers (Oflaz et al., 2016) use experimental and external proof schemes.

Stylinou et al. (2006) similarly revealed in their study that most undergraduate students used the experimental proof scheme. In his study, Sears (2019) determined that preservice mathematics teachers most frequently put forward the external, experimental and inductive (empirical) proof scheme.

Some of the studies examining the proof knowledge or proof processes of preservice mathematics teachers (Güler, 2013) aimed to examine the mathematical proof processes of preservice secondary school mathematics teachers; some of them (Güler et al., 2012; Stylianides et al., 2007) tried to reveal the proof knowledge of preservice mathematics teachers through mathematical induction; One of them (Karakuş et al., 2017) compared the proof-making levels between undergraduate mathematics students attending pedagogical formation training and preservice mathematics teachers studying at the faculty of education; another group (Doruk & Kaplan, 2013; Güler & Ekmekçi, 2016) examined the proof evaluation skills of preservice mathematics teachers. Some studies (Barak 2018; Doruk & Kaplan, 2017; Öztürk & Kalan, 2022; Şahin, 2016; Pekşen Sağır, 2013) examined the proof skills of preservice mathematics teachers on certain subjects. Among these, Doruk and Kaplan (2017) tried to reveal the characteristics of the proofs made by preservice teachers in the field of analysis; Öztürk and Kalan (2022) examined the geometric proof-making processes of preservice mathematics teachers, and Şen and Güler (2022) examined the development of preservice teachers' proof- writing skills in education based on the Van Hiele model.

Doruk (2019), in his study, examining the skills of preservice mathematics teachers in determining proof methods related to integers, determined that the preservice teachers were successful in determining the proof by induction, direct proof, and counterexample methods, but were unsuccessful in determining the proof by contradiction method. It was reported that preservice teachers used direct proof instead of proof by contrapositive, proof by contrapositive instead of proof by contradiction, and direct proof instead of proof by contradiction. In addition, when evaluating any proof method, preservice teachers tended to evaluate that method as direct proof. Demircioğlu (2022) aimed to evaluate the skills of preservice mathematics teachers to prove false statements in his study, and determined that they did not question the statements "prove or show that it is true", that they were not knowledgeable about alternative proof methods, and that they insisted on using the proof methods they had already known. Doruk and Kaplan (2013) revealed that preservice mathematics teachers were unsuccessful in proof evaluation processes, and that they learned and structured proofs mostly by rote. Similarly, Doruk and Kaplan (2017) revealed that preservice mathematics teachers did not have difficulty in determining the truth of propositions, but their proof skills were weak. In addition, they determined that preservice teachers with high academic achievement had analytical proof schemes, while preservice teachers with average success levels had deductive, experimental and external proof schemes. Uğurel et al. (2016) pointed out that preservice mathematics teachers had difficulties in understanding the meaning of the given proposition, knowing where to start the proof, finding and using the appropriate method for proof, creating a proof and defining the logical structures of the proposition. Köğce (2013) concluded in his study that preservice mathematics teachers believed that verifying propositions by giving numerical values was sufficient for proof. Güler and Ekmekçi (2016) determined that preservice teachers had weak proof evaluation skills and produced weak arguments. Barak (2018) concluded that preservice mathematics teachers' processes of proving basic concepts were not at the desired level. Pala and Narlı (2018) revealed that preservice mathematics teachers were unsuccessful in creating formal proofs. İmamoğlu and Yontar Toğrol (2015), in the study where they examined how preservice mathematics teachers used proof methods, stated that students preferred direct proof and proof with situations for a proposition that could be proven by many methods, and that most of them had difficulty in structuring their proofs. In the study, it was determined that preservice teachers and mathematics undergraduate students tended to try to be convinced with empirical arguments. Noto et al. (2019) stated that preservice teachers had problems visualizing geometric objects and creating rules for them, understanding the language and symbols used when proving, using definitions to create proofs, and that they did not know how to start the proof.

In this study, each proposition posed to preservice teachers can be solved by different methods. When the summarized studies were examined, among the studies on the proof processes of preservice middle school mathematics teachers, no study was found that addressed deductive reasoning skills in the context of the subject areas discussed in this study and with the diversity of methods. Besides, the preservice teachers in this study consisted of fourth-grade students who had taken all courses related to proof. This study, in this respect, differs from other studies on proof skills. There are studies in the relevant literature aimed at determining the proof schemes of preservice teachers. In this study, proof schemes of preservice teachers were discussed in the context of their "understanding of proof" by revealing their skills in proving and their knowledge and ideas about proof methods. In this respect, it is thought that this research will contribute to the literature in terms of presenting the deductive proof skills of preservice mathematics teachers by associating them with proof schemes.

The aim of this study is to investigate preservice mathematics teachers' understanding of proof by considering their proof skills, methodological knowledge of proof and proof schemes.

## Method

In cases where the boundaries of events, phenomena and contexts are not clear, studies examining the phenomenon in real-life situations are considered as case studies (Yin, 2003). This study is a case study, one of the qualitative research methods. The unit of analysis of the study is preservice mathematics teachers' understanding of proof. Proof understanding of preservice mathematics teachers was discussed with their proof skills and proof knowledge and supported with proof schemes. According to Yin (2003), when a case study contains more than one unit of analysis, it is defined as a nested case study. Therefore, the design of this study was determined as a nested case study. Proof understanding of preservice mathematics teachers was discussed with their proof skills and proof knowledge and supported with proof schemes.

This study was carried out within the scope of the BAP project, numbered 2019BSP017, and the permission of Pamukkale University Social and Human Sciences Research and Publication Ethics Board dated 09.09.2020 and numbered 68282350/2018/G07.

### Participants

This study was conducted with 46 preservice mathematics teachers (8 males, 38 females) studying in their final year at the Department of Mathematics Education at Pamukkale University in the Aegean Region, Turkiye. In order to increase transferability in qualitative research, a study group was appointed with purposeful sampling to reveal both the typically encountered events and phenomena and their varying characteristics (Yıldırım & Şimşek, 2021). In the study, preservice mathematics teachers were required to have taken all courses related to proof. For this reason, preservice mathematics teachers were selected on a voluntary basis among fourth grades who had taken Elementary Number Theory, which includes proof applications, as well as Analysis I and II, Abstract Mathematics, Algebra, and Analytic Geometry courses, which cover the information and theorems related to proof. Preservice mathematics teachers who participated in the study were labeled as PT1, PT2, PT3, etc. to keep their identities anonymous.

### Instruments

In the study, while developing instruments to reveal preservice mathematics teachers' understanding of deductive proof, expert opinions were obtained from three mathematics education professors, a mathematics education instructor with a Ph.D., and a mathematics instructor with a Ph.D. degree in mathematics education. Instruments took their final form after the pilot application. Experts, in addition to their comments, were also asked to evaluate instruments according to their suitability for the purpose of the research, difficulty, clarity and understandability. For this purpose, experts were asked to give a rating between 1 and 5. As a result of expert opinions and pilot application, instruments took their final form.

### *Deductive Reasoning Instrument*

Deductive Reasoning Instrument (DRI), which is in the field of numbers was developed by the researcher. Five proof questions of moderate ease were asked to the participants which they had to prove using deductive reasoning. The first question can be solved through direct proof, the second through proof by situations, the third through proof by contradiction, the fourth through proof by contrapositive, and the fifth through proof by counterexample. The questions are as follows:

1)Let $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{m} > \boldsymbol{0}$ then; $\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{n+1}} > \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$; 2) For $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$ , $\boldsymbol{n^2 + 3n + 7}$ is odd

3)There is no integer that satisfies $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1}$.

4) Let $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ fort he sets A,B,C. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$ .If x∉ $\boldsymbol{A}$ then x∈ D.

5)Let n>1 be a prime number. Then $\boldsymbol{2^n - 1}$ is prime.

At the end of each question, preservice teachers were asked, “Which method did you use?” Can you explain?" and space was given for them to write.

### *Knowledge of Proof Methods Instrument*

Knowledge of Proof Methods Instrument (KPM) was developed to assess the knowledge of preservice teachers about proof methods. First of all, preservice teachers were asked to explain the proof methods they knew, and then, to define the methods of direct proof, proof by contradiction, proof by contrapositive, proof by counterexample and proof by trial. Thus, it was aimed to assess the deductive proof skills of preservice teachers and to determine their knowledge of these methods. The proof schemes of the preservice teachers were examined by observing their explanations and proof behaviors.

## Data Collection Procedures

### *Pilot Study*

The pilot application was carried out in the fall semester of the 2020-2021 academic year with two female and two male preservice teachers studying in the final year of the same university. DRI and KPM were applied online due to the Covid-19 pandemic. DRI consisted of two parts in the pilot application. The first part included 5 proof questions, and the second part included the given proofs of the same questions, and preservice teachers were asked to evaluate these proofs. After the pilot application, in the first part, it was seen that extensive and in-depth information was obtained from the preservice teachers and the second part was abandoned to be directed to the preservice teachers. KPM was found to be applicable after the pilot application. DRI and KPM were directed and recorded by screen sharing with a PowerPoint presentation with the help of the Zoom application. In addition to video recordings, proof solutions were photographed. DRI and KPM pilot applications took place between 1 hour and 1 hour and 16 minutes. The expressions that emerged as a result of the audio and video recordings of the responses of preservice teachers were collected under certain themes and decided with indicators to determine the proof schemes. After the pilot application, all proof scheme-type indicators were found. The proofs and statements made by the prospective teachers were also collected under the classifications of true, false and half-true, and their common reactions were determined by examining them under these classes. Common expressions were grouped, and then, these expressions were collected under themes. Therefore, it was determined that the instruments were ready for real application and that the pilot application was sufficient to reveal the diversity of data.

### *Application*

DRI and KPM were administered to preservice teachers in the fall semester of the 2021-2022 academic year in Pamukkale University, in two classes subsequently, in a quiet environment on the same day. Each of the written exercises lasted between one and two class hours. As a result of the application, 44 preservice teachers responded to all written forms. (Since this study is a part of the relevant project, two preservice teachers T39 and T44) did not participate in DRI and KPM but took part in other instruments within the scope of the project. Therefore, the last preservice teacher who responded to this instrument was T46).

### Data Analysis

Both instruments were administered in written form; It was subjected to content analysis by the researcher and an instructor with a Ph.D. degree in mathematics education. Each instrument was first deciphered into Excel format on a question-by-question basis, and then common expressions were identified. Codes were created by combining the same expressions in each instrument. The coders came together from time to time to identify common codes and themes, and as a result of the analysis, they reached a complete consensus. In the study, the proof schemes of preservice mathematics teachers were revealed using the proof scheme framework of Sowder & Harel (1998). The deductive reasoning processes of preservice teachers (their knowledge about proof methods, and the way they use these methods) were revealed with instruments developed by the researcher. Therefore, preservice teachers' understanding of proof through deductive reasoning was attempted to be revealed as a whole as a result of the analysis of their proof method knowledge, proof skills and proof schemes.

## Findings

In this section, findings regarding preservice mathematics teachers' understanding of proof and comments related to these findings were presented. For this purpose, findings regarding the proof skills of preservice mathematics teachers and their knowledge of proof methods were presented. These findings were associated with the proof schemes of the preservice teachers. All findings were taken together, and an attempt was made to reveal the understanding proof of preservice mathematics teachers.

### Findings on the Proof Skills of Preservice Mathematics Teachers

The responses of 44 mathematics preservice teachers to five questions in DRI were examined. The first question could be solved by direct proof, the second through proof by situations, the third through proof by contradiction, the fourth through contrapositive, and the fifth could be solved through proof by counterexample. Below are the answers given by preservice teachers to all questions (Table 1). All findings were taken together, and an attempt was made to reveal the proof of understanding of the preservice mathematics teachers.

**Table 1**

*Findings Regarding DRI*

| | | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Accuracy of the Answer | True | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 18 |
| | False | 43 | 20 | 39 | 39 | 42 | 183 |
| | Blank | 1 | 0 | 2 | 5 | 2 | 9 |
| The Proof Method She/He Stated She/He Used | Deduction | 7 | 2 | 2 | 3 | 1 | 15 |
| | Direct proof | 13 | 13 | 6 | 7 | 1 | 40 |
| | Proof by Trial | 6 | 10 | 9 | 8 | 13 | 46 |
| | Proof by Induction | 5 | 6 | 6 | 1 | 7 | 25 |
| | Proof by Contrapositive | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 11 |
| | Counterexample | 3 | 0 | 4 | 5 | 9 | 21 |
| | Proof by Contradiction | 1 | 1 | 5 | 1 | 3 | 11 |
| | I don't think it's proof | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | I don't know /blank | 5 | 7 | 9 | 8 | 6 | 35 |
| | Deductive reas./reasoning | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | Trying all possible situations | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| | Hypothetical reasoning met. | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | Assigning method | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Diagrammatize | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

When Table 1 is examined, it is seen that the preservice teachers did not answer any question correctly except for the second proof question, which could be easily answered with the proof by situation method. In their answers to the questions regarding DRI, preservice teachers mentioned the methods they used most, first proof by trial, and then, direct proof. Preservice teachers responded that the proof methods they thought they used most were direct proof and proof by trial. However, in their answers to the second question, none of the preservice teachers gave a correct answer about the method they used. The method that preservice teachers called the proof by experimentation trial method was the "proof by consuming method." Hence, it can be concluded that preservice mathematics teachers mostly cannot structure the proofs in their answers regarding DRI, and that they have incorrect information about the method they use in the proofs that they structure correctly.

### *Answers of Preservice Mathematics Teachers to the First Question of DRI*

The first question could be solved by direct proof method by adding the expression "mn" to both sides of the equation and with easy algebraic manipulation. There were no preservice teachers who proved the proposition correctly. As seen in Table 2, the answers given by the participants to the proof questions were classified in terms of the proof methods they stated that they used and the way they answered these proof questions. For example, a preservice teacher reported that he made a direct proof, but while stating this, he may have reacted by examining the proposition with certain values. What the preservice teachers reported and what their proof behaviors were presented by associating them with proof schemes. The answers given by preservice teachers while proving the proposition were classified under the themes of "verification with certain values", "progress from hypothesis to judgement", and "incorrect/meaningless algebraic manipulation." These themes were also associated with proof schemes.

**Table 2**

*Findings Regarding the First Question of DRI*

| The Proof Method She/He Stated She/He Used /Proof Behaviour (associated proof scheme) | Verifying With Certain Values (Empirical Examples Based P.S. ) (%) | Progress From Judgement to Hypothesis (External Symbolic P.S.) | Incorrect/ Meaningless Algebraic Manipulator (External Symbolic P.S | Total |
|---|---|---|---|---|
| Deduction | 3 | 1 | | 7 |
| Direct Proof | 1 | 11 | 1 | 13 |
| Proof by Trial | 5 | | 1 | 6 |
| Proof by Induction | 3 | | 2 | 5 |

**Table 2**

*Findings Regarding the First Question of DRI (continued)*

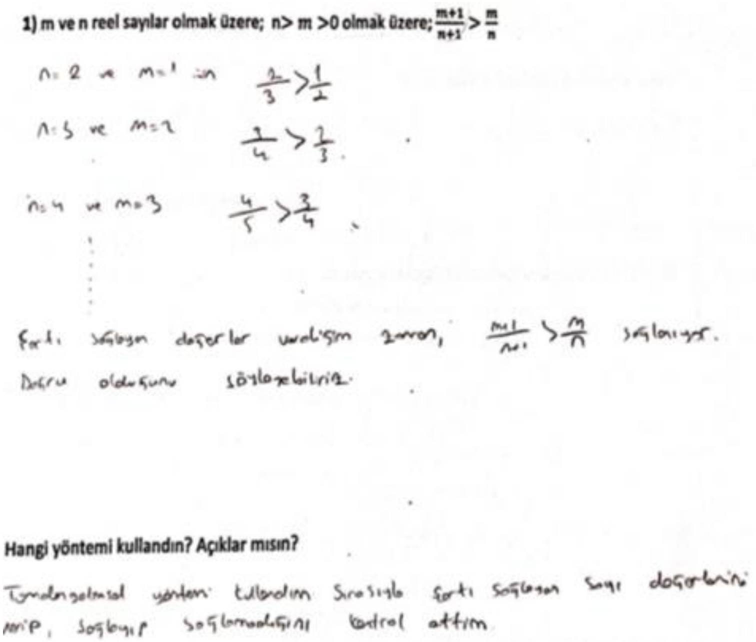
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Proof by Contrapositive | | | 2 | 2 |
| Proof by Contradiction | | 1 | | 1 |
| Deductive Reasoning | 1 | | | 1 |
| Counterexample | 3 | | | 3 |
| I don't know/I don't remember | 1 | 2 | 2 | 4 |
| Total | 18(42%) | 17 (40%) | 6(14%) | 42 (97%) |

As seen in Table 2, preservice teachers who proved the proposition with indicators for verifying it with certain values were referred to the empirical examples-based proof scheme. Progression from judgement to hypothesis and false/meaningless algebraic manipulation indicators were grouped into the external symbolic proof scheme. 18 preservice teachers tested the proposition with certain numerical values, and their responses were associated with empirical examples-based proof scheme indicators. Six pre-service teachers made incorrect/meaningless algebraic manipulations, and 17 preservice teachers responded with the indicators of external and experimental proof schemes by structuring the proof by proceeding from the judgement to the hypothesis, "*without associating the symbols with their quantities in the situation, away from the meaning*" instead of proceeding from hypothesis to judgement. Although the preservice teachers (13 preservice teachers) made correct judgments about the proof method by stating that they used the direct proof method, none of them could prove the proposition correctly. In their answers to the first question, which could be easily solved by the direct proof method, they had indicators of the experimental basic examples proof scheme and the proof methods that the preservice teachers stated they used were as follows: Deduction, direct proof, proof by trial, proof by induction, logical reasoning, counterexample. A preservice teacher did not answer the question, stating that he/she did not remember. Therefore, the reactions of these preservice teachers (3%) were not included in the table.

Three of the seven preservice teachers used the deductive method; one of the preservice teachers used the direct proof method; six of the preservice teachers used the proof by trial method; three preservice teachers used inductive proof; one preservice teacher the logical reasoning method; three of preservice teachers used counterexample. All these strategies showed the behavior of validating the proposition with certain values. These indicators were associated with the empirical examples-based proof scheme. Two preservice teachers tried to prove this with algebraic manipulations, but when they were unsuccessful, they tried to validate with certain numerical values. On the other hand, a preservice teacher reasoned logically and tried to explain the proof of the proposition verbally, and then, tried to verify it with numerical experiments. While two preservice teachers used the induction method and acted with similar indicators, one of the preservice teachers took variables such as m = k and n = k + 1 and replaced them in the assumption (q) expression but did not do this by proceeding from hypothesis to judgement. The statements of the preservice teacher show that he/she perceives examining the proof as induction by valuing two different variables, k and k+1. PT12's answer to the first proof question can be exemplified as in Figure 1.

**Figure 1**

*Answer of PT12 to The First Question of DRI*



1) m ve n reel sayılar olmak üzere; n> m >0 olmak üzere; $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$

n=2 ve m=1 için $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

n=3 ve m=2 $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

n=4 ve m=3 $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$.

⋮

Farklı sağlayan değerler verdiğim zaman, $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$ sağlanıyor. Doğru olduğunu söyleyebiliriz.

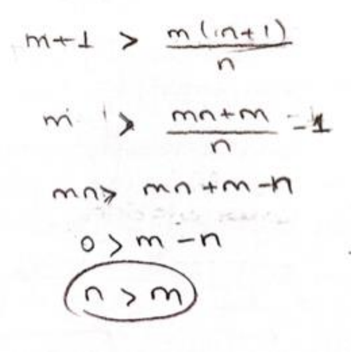
Hangi yöntemi kullandın? Açıklar mısın?

Tümdengelimsel yöntem kullandım. Sırasıyla farklı sağlayan sayı değerlerini verip, sağlayıp sağlamadığını kontrol ettim.

PT12 stated that he/she used the deductive method and tried to structure the proof by checking it with numerical values such as m=1,2,3. The proof scheme of the preservice teacher was associated with the empirical examples-based proof scheme. Some of the preservice teachers who responded with external symbolic proof scheme indicators (17 PTs, 40%) progressed from the judgement (q) to the hypothesis (p) instead of progressing from the hypothesis to the judgement using direct proof behaviour. Thus, they "acted without understanding the meaning and relating the quantities within the situation." Some preservice teachers (six of them, 14%) tried to structure the proof with meaningless algebraic manipulations. In other words, more than half of the preservice teachers, which was 54%, answered the first proof question with indicators related to external symbolic proof schemes. The preservice teachers stated that they used the methods of deduction, direct proof, induction, and contrapositive. Seven of the preservice teachers used the method of deduction; four of them used the method of direct proof, and one of the preservice teachers used the method of contradiction with the method of proof. This has shown the behavior of progressing from judgment to hypothesis. In Figure 2, the response PT15 to the first question is seen.

**Figure 2**

*Answer of PT15 to The First Question of DRI*

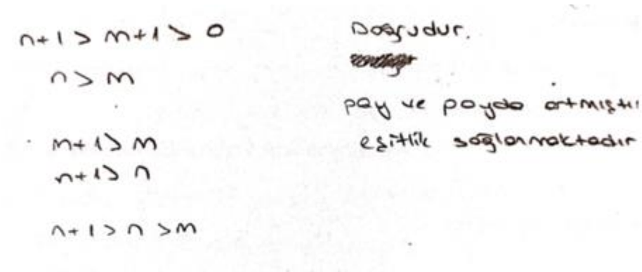



PT15 constructed the proof by advancing from the given judgment to the hypothesis n>m instead of progressing from hypothesis n>m to judgment. In the explanation section, he/she stated that he/she used the method of direct proof. Therefore, their statements were associated with the external symbolic proof scheme. One of the preservice teachers used the method of direct proof; two of the preservice teachers used the method of induction, and two of the preservice teachers used the method of contrapositive. Thus, they have tried to construct the proof with meaningless algebraic manipulations.

The responses of these preservice teachers have also been grouped into the external symbolic proof scheme. These preservice teachers indicated that they used the methods of deduction, direct proof, induction, and contrapositive. For example, four preservice teachers who claimed to prove by deduction have progressed from judgement to hypothesis instead of using the logic of direct proof by progressing from hypothesis (p) to judgement (q). PT7 attempted to make inferences by progressing from q to p using positive and negative cases; PT13 stated that they reached the conclusion by progressing from q to p and stating that both the numerator and denominator would increase (Figure 3), PT25 used meaningless algebraic operations to progress from q to p.

**Figure 3**

*Answer of PT13 to The First Question of DRI*




Based on all these findings, an analytical proof scheme can be said to be absent in the proof attempts of the preservice teachers for the first question, Furthermore, it can be concluded that none of the preservice teachers were able to prove this proposition, which requires direct proof, and they lacked accurate knowledge about the methods they used. In addition, the majority of preservice teachers (54%) demonstrated indicators of the external symbolic proof scheme by progressing from judgement to hypothesis and by engaging in meaningless algebraic operations. Furthermore, 42% of the preservice teachers structured the proof by assigning numerical values to variables, even though they claimed they were using different methods, they resorted to verification with numerical values in their explanations. As a result, it can be pointed out that almost all preservice teachers used external and empirically derived convincing situations in their responses regarding this proposition, which can be easily proven using the method of proof by cases.

### *Answers of Preservice Mathematics Teachers to the Second Question of DRI*

The second question contained a proof that would be structured using the method of proof by cases. This question was the only question that the preservice teachers answered correctly. While 24 preservice teachers were able to prove this proposition, 19 preservice teachers were unable to do so. One preservice teacher did not respond. Hence, it can be stated that 55% of preservice mathematics teachers answered the proof question that could be solved using the method of proof by cases correctly, while 43% answered incorrectly. Table 3 presents the data of preservice teachers who correctly structured the proof.

**Table 3**

*Findings Regarding The Second Question of DRI*

| The Proof Method She/He Stated She/He Used /Proof Behaviour | Using The Method of Proof by Cases |
|---|---|
| Proof By Trial | 4 |
| Proof By Contrapositive | 1 |
| Hypothetical Reasoning | 1 |
| Proof By Induction | 4 |

**Table 3**

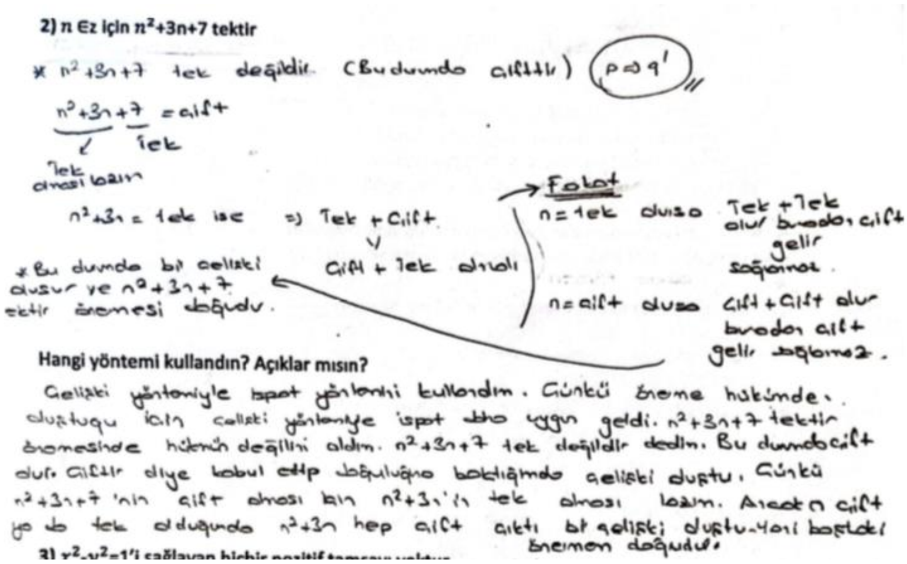
*Findings Regarding The Second Question of DRI (continued)*

| | |
|---|---|
| Direct Proof | 6 |
| Proof By Deduction | 1 |
| Method Of Giving Values | 1 |
| Not Specifying The Method He/She Used/Stating He/She Did not Remember | 5 |
| Total | 23 |

Among the preservice teachers, 24 of them proved this proposition correctly. All but one of the preservice teachers (PT5), who structured their proofs correctly, completed their proofs using the method of proof by case. However, none of the preservice teachers correctly stated the proof method they used. PT5 stated that he used the method of contradiction, but he/she used the method of contrapositive (not included in Table 3). The preservice teacher PT5 constructed the notations incorrectly but structured the proof with correct logic (Figure 4).

**Figure 4**

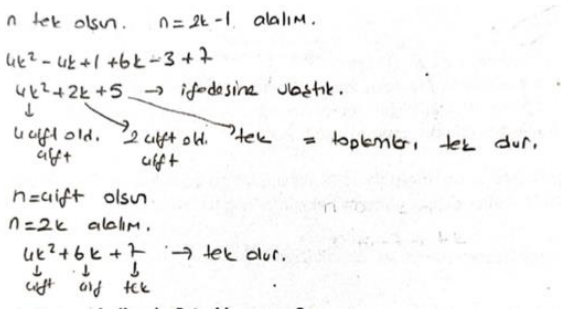
*Answer of PT5 to The Second Question of DRI*




Other preservice teachers, whose proofs were accepted as structured correctly, structured their proofs using the method of proof by cases. While four preservice teachers used the method of proof by trial, one preservice teacher used the method of contrapositive. Another one stated that he/she used the "hypothetical reasoning method." Four preservice teachers used the method of proof by induction ix preservice teachers used the direct proof method, and one preservice teacher used the deductive method. The other one stated that he/she used the method of giving values. For example, PT19 stated that: "since n is an integer, we can say that it will either be odd or even. I showed that it is odd when I consider it as even or odd. It was an inductive proof" (Figure 5).

**Figure 5**

*Answer of PT19 to The Second Question of DRI*




Five preservice teachers stated that they did not know which method they used. Based on these findings, It can be concluded that no preservice teacher who structured the proof correctly knew the method he/she used. Since all of the preservice teachers performed transformation operations through logical inference within the axiomatic system, it was concluded that 55% of them had an analytical transformational proof scheme in this question. The answers of the remaining 19 preservice teachers were evaluated as incorrect (Table 4).

**Table 4**

*Findings Regarding Wrong Answers to the Second Question of DRI*

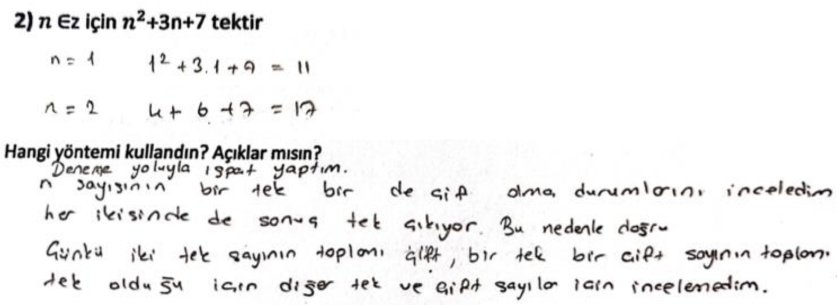
| Proof Method She/He Stated That She/He Used /Proof Behaviour (Associated Proof Scheme) | Verifying With Certain Values (Empirical Ex. Based P.S. ) (%) | Expression Verbally or Through Drawings (Empirical Perc. P.S.)(%) | Incorrect/ Meaningless Algebraic Manipulation (External Symbolic P.S.)(%) |
|---|---|---|---|
| Deduction | | | 1 |
| Direct Proof | 1 | | 5 |
| Proof By Trial | 4 | 2 | 1 |
| Proof By Induction | 3 | | |
| Proof By Contrapositive | | | 1 |
| Not Specifying Method | 1 | | |
| Total | 9 (47%) | 2 (11%) | 8 (42%) |

Regarding the reactions of the preservice teachers who stated that they used the direct proof method, four preservice teachers used proof by trial, three preservice teachers used proof by induction, and one preservice teacher did not specify a method. Their reactions were all associated with the empirical examples-based proof scheme indicators. The reactions of two preservice teachers who used the method of proof by trial were associated with the empirical perceptual proof scheme. On the other hand, one preservice teacher used the deductive method; four preservice teachers used direct proof; one preservice teacher used the proof by trial, and one preservice teacher used the proof by contrapositive. All their reactions were associated with external symbolic proof scheme indicators. As seen in Table 4; 19 preservice teachers constituted 44% of the total. Therefore, preservice teachers who acted with empirical examples-based proof scheme indicators constituted 47% of those who answered incorrectly and 20% of the total number. Similarly, preservice teachers who had an external symbolic proof scheme indicator constituted 53% of those who answered this question incorrectly and 23% of the total preservice teachers.

Nine of the preservice teachers checked the proposition with numerical values, acting with the indicators related to the empirical examples-based proof scheme. For example, PT4, PT15, PT31, and PT45 stated that they proved the question through experimentation and that the proposition ensured accuracy for certain values.

**Figure 6**

*Answer of PT31 to The Second Question of DRI*


**2)** $n \in z$ için $n^2+3n+7$ tektir

$n=1$ $1^2+3.1+9 = 11$

$n=2$ $4+6+7=17$

**Hangi yöntemi kullandın? Açıklar mısın?**
Deneme yoluyla ispat yaptım.
n sayısının bir tek bir de çift olma durumlarını inceledim
her ikisinde de sonuç tek çıkıyor. Bu nedenle doğru
Çünkü iki tek sayının toplamı çift, bir tek bir çift sayının toplamı
tek olduğu için diğer tek ve çift sayılar için incelemedim.

As seen in Figure 6, PT31 tested the proposition by giving n values of 1 and 2; he/she stated that the proposition was true because the result of both values was odd; he/she did not feel the need to examine the proposition for other numbers. Therefore, the proof process and its explanations were associated with empirical examples-based proof scheme indicators.

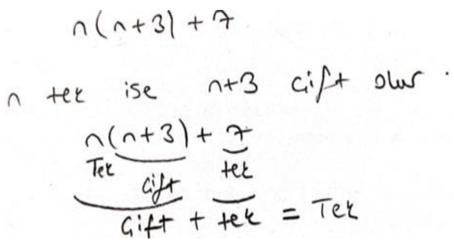
Similarly, a preservice teacher used the direct proof method, but she chose to structure the proof with numerical values. Two of the preservice teachers who used proof with inductive reasoning stated that they structured the proof by giving different numerical values to the variable. For example, PT22 stated that she reached a generalization through the inductive method. PT25 stated that she used inductive reasoning and wrote P(k+1) after first checking the proposition for values such as n=1,2, but then checked the variables by valuing them over k+1. she did not make any inference. PT42, on the other hand, did not state that she used any method, but preferred to give numerical values to the variables.

When some preservice teachers could not find strong evidence of the truth or falsehood of the situation, they tried to convince with drawings or writing (empirical perceptual proof scheme). These preservice teachers could not make logical inferences in their explanations and expressed their thoughts.

PT17 and PT29 stated that they used the trial method and tried to complete the proof by expressing it verbally but could not structure it. Hence, it was determined that PT17 and PT29 had an empirical perceptual proof scheme. PT29 made statements such as “If n is odd, n+3 is even” (Figure 7).

**Figure 7**

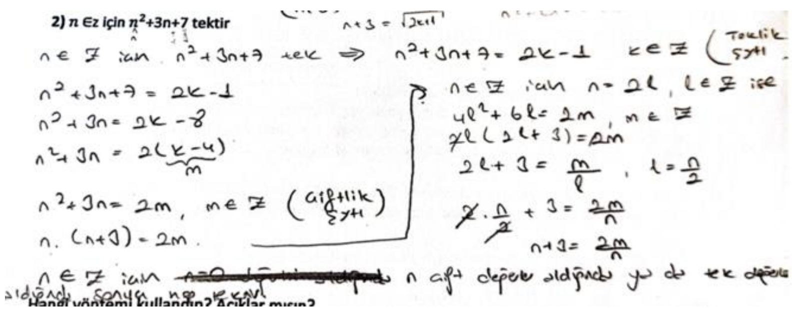
*Answer of PT29 to The Second Question of DRI*




Some preservice teachers, on the other hand, acted with meaningless manipulations (symbolic proof scheme) without associating the symbols with their meaning and quantities in the situation. A preservice teacher stated that he/she used the proof-by-trial method and made meaningless algebraic manipulations. 5 preservice teachers stated that they used the direct proof but used meaningless algebraic expressions. PT27 was not successful in advancing to the conclusion by structuring the reasoning process in harmony with the symbols (Figure 8).

**Figure 8**

*Answer of PT27 to The Second Question of DRI*



T12 stated that he used the deductive proof method and verified only for 2k+1. Another preservice teacher stated that he/she used the method but made a logical error by using only the definition of even numbers. The reactions of these preservice teachers were also categorized in the external symbolic proof scheme. In summary, the majority of preservice teachers who answered incorrectly (47%) gave indications of empirical examples-based and empirical perceptual (42%) proof schemes.

### *Answers of Preservice Mathematics Teachers to the Third Question of DRI*

The third proof question was a kind of question where proof could be structured through contradiction. There was no preservice teacher who structured this proof correctly.

**Table 5**

*Findings Regarding Answers to the Third Question of DRI*

| Proof Method Participants Used /Proof Behaviour (Associated Proof Scheme) | Verifying The Proposition With Certain Values (Empirical Examples Based P.S. ) (%) | Incorrect/ Meaningless Algebraic Man. (External Symb. P.S)(%) |
|---|---|---|
| The Method of Deduction | 2 | |
| Direct Proof | 4 | 2 |
| Proof By Trial/Trial and Error | 8 | 2 |
| Proof By Induction | 5 | 1 |
| Proof By Contrapositive | 1 | 1 |
| Contradiction | 1 | 3 |
| I Don't Have Any Ideas/Haven't Written Any Methods. | 5 | 2 |
| Counterexample | 2 | 2 |
| Trying All Cases | 1 | |
| Total | 29 (66%) | 12 (27%) |

Among the preservice teachers, 29 of them tested the proposition with certain numerical values, and therefore, it was thought that they had indicators of empirical examples-based proof schemes.

As seen in Table 5, four of the preservice teachers used the deductive method and tried to check the accuracy by giving certain numerical values to the variables. PT26 used the trial and error method, PT28 and PT35 proved it by trial, and both preservice teachers constructed the proof by reaching the result x=1, y=0 for the values x-y=1, x-y=-1. PT35 used the contrapositive method. Two preservice teachers who used the same solution stated that they had no idea about the method they used. Different preservice teachers who used the same solution stated that they used different methods. For example, two preservice teachers used the counterexample method. The other two used the deductive method, and one of them used the contradiction method. In addition, two preservice teachers used the direct proof method, and a preservice teacher created a table of values and stated that he checked all the situations. Stating that he/she used the method of trial and error, PT11 chose the smallest numbers that would give the result 1 and explained that "1-1=0, but there was no integer in this case. PT18 used the direct proof method and tried to structure the proof by checking numerical values. Stating that he used this method, PT33 stated that when one of the expressions (x-y).(x+y) was given 0, he examined both situations and that the situations did not satisfy the proposition. Six preservice teachers used the inductive method and tried to structure the proof with different solutions. Five preservice teachers tried to structure the proof by giving certain numerical values to the variables. For example, PT13 explained that since x and y would be positive integers, they could be 1, 2, 3, 4. As the numbers increase, the difference in the squares will be greater. Three preservice teachers similarly tried to structure the proof by giving certain numbers to the variable, without specifying which method they used. For example, PT21 chose consecutive and identical numbers. PT46 used the expression "*It does not provide for y = 1*".

Next, two preservice teachers constructed direct proofs; two preservice teachers proved through experiments; one preservice teacher proved by induction; one preservice teacher used the contrapositive method; three preservice teachers used the contradiction method; two preservice teachers used the counterexample method and two preservice teachers who didn't specify any method. All these methods were associated with external symbolic proof scheme indicators. In addition, two of the preservice teachers made a proof by trial, and after writing the algebraic expression as (x-y).(x+y), they considered that it could take the values -1 and +1, but they did not continue the proof. Two preservice teachers used the direct proof method and tried to structure the proof with meaningless algebraic manipulations, and one preservice teacher used the inductive method and tried to structure the proof with meaningless algebraic operations. Three preservice teachers who used the contradiction method made logical errors. For example, PT8 tried to show that the statement was not true by accepting the statement as true. Stating that he/she has used the contrapositive method, PT40 stated that he/she has completed the proof by reaching the result x = 1/2 with algebraic operations. PT9 who used the counterexample method carried out certain operations but stated that she/he could not find any counterexamples. PT16 stated:

"*The expression is wrong because it does not provide for x = 1.*" Two preservice teachers, who did not specify which method they used, performed meaningless algebraic operations. Three preservice teachers did not answer this proof question.

In summary, it was observed that no preservice teachers were knowledgeable about the method they used. Preservice teachers mostly tried to structure the proof by giving numerical values to the variables. Although four preservice teachers stated that they had proved through contradiction, they tried to verify the proposition with certain values or meaningless algebraic manipulations. To the question that proof could be structured through contradiction, 66% of the teacher candidates responded with indicators related to the empirical proof scheme, and 27% responded with indicators related to the external symbolic proof scheme.

### *Answers of Preservice Mathematics Teachers to the Fourth Question of DRI*

The fourth proof question contained a proposition that could be proven by the method of contrapositive. Five preservice teachers left this question blank. All remaining preservice teachers structured the proof incorrectly. Most of the preservice teachers tried to structure the proof with Venn diagram representation. Preservice teachers based their persuasion efforts only on drawings or some explanations. These responses were associated with indicators of the empirical perceptual proof scheme. In addition, these preservice teachers stated that they have used different methods.

**Table 6**

*Findings Regarding Wrong Answers to the Fourth Question of DRI*

| The Proof Method She/He Said She/He Used /Proof Behaviour | Expression Verb. or Through Drawings (Emp.Percep. Ps) | Incorrect/ Meaningless Algebraic Manipulation (External Symbolic P.S) |
|---|---|---|
| The Method of Deduction | | 3 |
| Proof By Trial/ The Method of Trial | 6 | |
| Proof By Induction | 1 | |
| Proof By Contrapositive | 2 | 1 |
| Proof By Counterexample | 3 | 1 |
| Direct Proof | 1 | 5 |
| Contradiction | 1 | 1 |
| Not Writing Any Methods | 1 | |
| No Explanation, Meaningless Explanations | 6 | |
| | 21 (48%) | 11 (25%) |

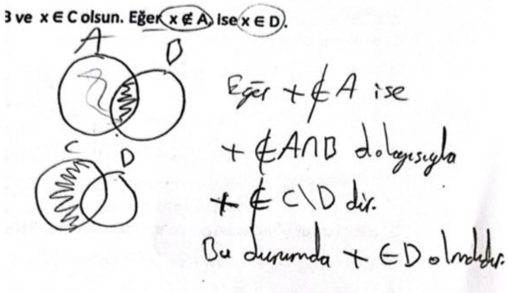
As seen in Table 6, six preservice teachers proved the question by trial; one preservice teacher proved it by induction; two preservice teachers proved it by contrapositive; three preservice teachers proved it by counterexample; one of them proved it by direct proof and the other proved it by contradiction. One of them did not write any methods; six preservice teachers made no explanations about the method they used making meaningless explanations or wrote their proofs verbally without using symbols but explained them with drawings. A preservice teacher used a Venn diagram without referring to any methods. In cases where preservice teachers could not use mathematical language correctly, their indicators were associated with an empirical perceptual proof scheme.

Stating that he/she proved the question through trials, PT2 explained, "*I gave values that would meet the conditions*." Two preservice teachers used the trial method and added that what they did was wrong. One preservice teacher proved it through trials and showed that it was not true by using the representation of sets. PT36 tried to explain with verbal expressions in addition to his/her drawing. PT41, who drew the Venn Diagram, explained, "*It is a trial method because it provides proof*".

Making an explanation using the Venn Diagram, PT1 stated that he/she used the inductive method; he explained: "*Based on what was given step by step, I reached the truth and falsehood of the proposition*" (Figure 9).

**Figure 9**

*Answer of PT1 to The Third Question of DRI*

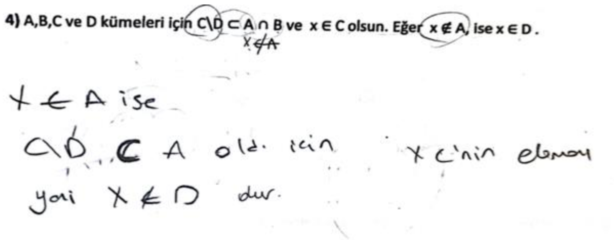



A preservice teacher used the contrapositive method drawing it with a Venn diagram trying to support his/her drawing with verbal expressions. A preservice teacher who stated that he/she structured the proof with the direct proof method misunderstood the hypothesis and judgement expressions. A preservice teacher who stated that he/she used the trial method also made meaningless expressions with long words.

Three preservice teachers used the deductive method; one preservice teacher proved the question by contrapositive; one preservice teacher proved it by giving examples; five preservice teachers made direct proofs. In addition, one preservice teacher proved it by contradiction method, structured their proofs by supporting meaningless algebraic manipulations and carried indicators of the external symbolic proof scheme. A preservice teacher used the contrapositive method, and structured his/her proof incorrectly, based on the statement of the reverse of the hypothesis. On the contrary, a preservice teacher (PT35) used the method of giving examples and performed algebraic operations but made a logical error because he/she tried to structure the proof by reverse of the hypothesis (Figure 10).

**Figure 10**

*Answer of PT35 to The Fourth Question of DRI*



4) A,B,C ve D kümeleri için $C \setminus D \subset A \cap B$ ve $x \in C$ olsun. Eğer $x \notin A$ ise $x \in D$.

$x \notin A$

$x \in A$ ise

$C \setminus D \subset A$ old. için $x$ C'nin elemanı

yani $x \notin D$ dur.

There were some preservice teachers who thought that they structured the proof with the direct proof method. Five preservice teachers tried to perform algebraic operations by drawing a Venn diagram. A preservice teacher used the contradiction method but made incomprehensible explanations. Finally, the statements of seven preservice teachers were found to be irrelevant to the topic.

Some of the preservice teachers thought that drawing a Venn diagram was sufficient for proof and they could not structure convincing arguments, but they stated that they used the deductive method. For example, PT12 stated: "*I explained the whole information with drawings, from whole to the part...*" next to his drawing, while PT13 stated: *"I reduced general set definitions to specific ones."* Another one tried to support his drawing with meaningless algebraic manipulations. There were six preservice teachers who did not make any explanations about the method and only drew a Venn diagram. Four preservice teachers, who stated that they used the method of giving examples rather than drawing a Venn diagram, tried to support their drawings with verbal expressions.

In summary, there was no preservice teacher who could correctly prove this proposition, which can be proven by the method of contrapositive. 48% of the preservice teachers acted with indicators related to the experimental perceptual proof scheme, and 25% acted with indicators related to the external symbolic proof scheme. Only three preservice teachers gave correct information about the method of proof. One preservice teacher drew a Venn diagram and tried to support his/her drawing with verbal expressions. Another took the expressions of hypothesis and judgment incorrectly, and the other one misstructured his proof based on the statement reverse of the hypothesis.

### *Answers of Preservice Mathematics Teachers to the Fifth Question of DRI*

The fifth question is a proposition, which is a proof form of Mersenne numbers that preservice teachers have encountered before. The falsehood of the proposition can be proven with a counterexample (giving an example to the contrary) (with n=11).

**Table 7**

*Findings Regarding Wrong Answers to the Fifth Question of DRI*

| The Proof Method She/He Stated She/He Used /Proof Behaviour (Associated Proof Scheme) | Verifying with Certain Values (Empirical Ex.Bas.P.S. ) | Incorrect/ Meaningless Algebraic Manipulation (External Symbolic P.S |
|---|---|---|
| Deductive Method | 1 | |
| Proof By Trial | 13 | |
| Proof By Induction | 7 | |
| Proof By Contrapositive | | 2 |
| Proof By Counterexample | 9 | |
| Direct Proof | 1 | |
| Contradiction | 2 | 1 |
| Method Of Trial | | |
| Contradiction Or Contrapositive | | 1 |
| No Explanation, Meaningless Explanations | 4 | 1 |
| | 37(84%) | 5 (11%) |

Two preservice teachers left this question blank. As seen in Table 7, five preservice teachers tried to structure the proof with meaningless algebraic manipulations (external symbolic proof scheme). Other preservice teachers (37 PTs) structured their proofs by giving numerical values to the variable (n) but stated that they used different methods. The reactions of these preservice teachers were associated with the empirical examples-based proof scheme. 13 preservice teachers who gave numerical values to the variables stated that they used the proof by trial method and seven preservice teachers stated that they proved it by the inductive method. Four preservice teachers who chose to prove with numerical values did not explain the method. PT10 stated: *"I remember it as Fermat's theorem."* PT21 stated: *"I couldn't figure it out."* In addition, nine preservice teachers who verified with numerical values stated that they used counterexample; however, like other preservice teachers, they tried to check the accuracy by substituting values such as 2, 3, 5, and 7 instead of the variable in the proposition. For example, PT9 stated, *"It is true because I could not find a counterexample."* PT18 for n=6, PT19, PT29, PT37 for n=4; S25 for n=7 and n=8; PT27 for n=2 stated that they proved the proposition, and PT29 stated that he/she proved the proposition for n=2, 3 and 4. A preservice teacher who thought he/she proved with numerical values stated that he/she made a direct proof; he/she tried numbers 2, 3, 5 and 7. With the same thought, a teacher candidate tried 2, 3, 5 and 7; He/she stated that he/she proved by deductive method. Two preservice teachers stated that they used the contradiction method by trying the proposition for n = 4, with similar thoughts. Five preservice teachers in the other group made meaningless algebraic manipulations. It was thought that these preservice teachers tried to structure their proofs with indicators related to the external symbolic proof scheme. A preservice teacher explained with verbal expressions about what he/she did; the other one answered that it was contradiction or contraposition, one preservice teacher stated that he/she used the contradiction method, and two preservice teachers stated that he/she used the contrapositive method. Two preservice teachers did not answer the question. A preservice teacher left the explanation section blank.

When the answers to the fifth proof question were examined; most of the preservice teachers (37 PTs) chose to prove the proposition with numerical values. In addition, they stated that they used different proof methods. All of the other preservice teachers acted with indicators related to the external symbolic proof scheme. Thus, it can be stated that in their explanations regarding the fifth question, the majority of preservice teachers (84%) have indicators related to the empirical examples-based proof scheme, and 11% of them have proved with indicators related to the external symbolic proof scheme.

**Answers of Preservice Mathematics Teachers Regarding the Methods They Stated That They Had Used**

When DRI is considered in general; the answers given by preservice mathematics teachers to proof questions about the methods they have used are presented in Table 8.

**Table 8**

*Methods Preservice Teachers Stated They Used in DRI*

| | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 | Q5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Direct Proof | 12 | 12 | 6 | 6 | 1 |
| Proof by Cases | - | - | 1 | - | - |
| Proof by Contradiction | 1 | - | 4 | 2 | 3 |
| Proof by Contrapositive | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| Proof by Counterexample | 3 | - | 4 | 4 | 9 |

According to Table 8, 12 preservice teachers gave appropriate answers to the first question, which is suitable for proving by direct proof method; four preservice teachers gave appropriate answers to the third question, which is suitable for proving by contradiction; three preservice teachers gave appropriate answers to the fourth question, which is suitable for proving by contradiction method; nine preservice teachers gave appropriate answers to the fifth question, which is suitable for proving with the proof method by giving counterexamples/contrary examples.

None of the preservice teachers answered the second question correctly, which is suitable for proving by cases. However, four preservice teachers stated that they proved through trials, and 23 preservice teachers answered this proposition correctly by proving it through cases, and one preservice teacher proved it through the contradiction method. In addition, seven of the 19 preservice teachers who constructed proofs false stated that they used the proof method through trial. It is noteworthy that 24 of the preservice teachers made correct proofs, especially regarding the second question, but they did not have any knowledge about the method they used. In other questions, none of the preservice teachers could prove the propositions correctly; very few answered correctly about the appropriate method. Therefore, it can be concluded that preservice mathematics teachers have insufficient ideas about their proof skills and the proof methods they use.

## Proof Schemes of Preservice Mathematics Teachers Regarding DRI

When DRI is considered in general; proof scheme indicators of preservice mathematics teachers regarding the questions are given in Table 9.

**Table 9**

*Proof Scheme Indicators for Preservice Mathematics Teachers Regarding the Questions*

| | Q1 (%) | Q2 (%) | Q3 (%) | Q4 (%) | Q5 (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| External symbolic P.S. | 23% | 42% | 27% | 25% | 11% |

**Table 9**
*Proof Scheme Indicators for Preservice Mathematics Teachers Regarding the Questions (continued)*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Empirical Perceptual P.S. | - | 11% | | 48% | |
| Empirical Examples-Based P.S. | 20% | 47% | 66% | | 84% |
| Analytical Transformational P.S. | 55% | | | | |

Considering Table 9, it can be seen that except for the first proof question, preservice teachers mostly structured their proofs with indicators related to the empirical proof scheme. The preservice teachers then acted with external proof scheme indicators. Only in the first question, 55% of the preservice teachers answered the proof correctly with analytical transformational proof scheme indicators, and the remaining 45% structured their proofs with empirical and external proof scheme indicators. It can be said that in their answers regarding DRI, preservice teachers mostly acted with empirical and then external proof scheme indicators. In addition, it can be interpreted that preservice teachers have incorrect information about the methods they use.

## Evaluation of the Findings Related to the Methods and Proof Schemes that Preservice Mathematics Teachers Stated They Used

The reactions of preservice teachers regarding DRI are discussed together in terms of both the proof methods they have used and the proof scheme indicators.

The method that is said to be most frequently used in the answers to the first question, which is suitable to be solved by the direct proof method, is the direct proof method. In other words, preservice teachers emphasized the most correct method among other proof methods. However, 11 of the 13 preservice teachers who used the direct proof method tried to structure the proof with external symbolic proof scheme indicators, and there was no preservice teacher who answered this proof question correctly and did the proof with the direct proof method. Preservice teachers mostly progressed from hypothesis to judgement as should be the case in the direct proof method. Therefore, it can be pointed out that preservice teachers carry out their direct proof method applications with external persuasion processes and act with external symbolic proof scheme indicators.

The second question, which is suitable to be solved by the method of proof with cases was the one in which preservice teachers were the most successful. 55% of the preservice teachers structured the proof correctly by acting with the indicators of the analytical transformational proof scheme and using the proof by cases method in the proof, which is to be structured using the proof by cases method. However, in their explanations regarding this question, none of the preservice teachers who answered correctly stated that they used the method of proof by case, and they also stated that they used different proof methods. Hence, it can be concluded that none of the preservice teachers, who structured the proof with indicators related to the analytical transformational proof scheme, knew the method they used. 44% of preservice teachers answered this question incorrectly. None of the preservice teachers stated that they used the method of proof by case. They stated that they used proof by trial and direct proof most. These preservice teachers acted with indicators related to empirical perceptual, empirical examples-based and external symbolic proof schemes. Therefore, preservice teachers responded to the question of proof, which is suitable for structuring with the method of proof by cases, with external and experimental persuasion situations.

In their explanations regarding the third proof question, which is suitable for structuring with the method of contradiction, four of the preservice teachers stated that they used the contradiction method. In fact, they did not use the contradiction method, but they tried to test the proposition with certain values or they made meaningless algebraic manipulations. In other words, preservice teachers who thought they had used the contradiction method acted with indicators of the external symbolic and empirical examples-based proof scheme.

In their answers to the fourth question, which is suitable for proving the proposition by using the contrapositive method, only three preservice teachers stated that they used the contrapositive method, but they tried to persuade verbally or with drawings or misstructured the proof with meaningless algebraic manipulations. Therefore, the persuasion of the preservice teachers who stated that they used the contrapositive method was external and experimental.

In their explanations regarding the fifth proof question, where proof could be structured by counterexample, nine preservice teachers stated that they proved it by counterexample. However, they tried to structure the proof by giving numerical values. Therefore, it can be stated that the preservice teachers structured the proof by counterexample with the indicators of the empirical proof scheme.

When the findings regarding DRI are examined in terms of proof methods and proof schemes; It can be concluded that preservice teachers revealed their proof method applications and explanations with indicators of empirical and external proof schemes.

## Findings on Preservice Mathematics Teachers' Knowledge of Proof Methods

Findings regarding the answers given by preservice mathematics teachers to the Proof Methods Instrument (PMI) in order to measure their knowledge of proof methods are as follows. Preservice teachers were asked to write and explain the proof methods they knew in the first question of the PMI. Information regarding their proof methods is presented in Table 10 and Table 11.

**Table 10**

*Findings Related to Proof Methods*

| | | |
|---|---|---|
| Induction | PT1,PT3,PT4,PT5,PT6,PT7,PT8,PT9.PT11,PT12,PT13,PT14,PT16,PT17,PT18,PT19,PT20,PT21,PT22,PT24,PT25,PT28,PT29,PT31,PT33,PT34,PT35,PT38,PT41 | 29(15 %) |
| Deduction | PT1,PT3,PT4,PT5,PT7,PT8,PT9,PT17,PT19,PT20,PT21,PT22,PT24,PT25,PT31,PT33,PT34,PT35,PT38,PT41 | 20(10%) |
| Direct proof | PT3,PT5,PT7,PT8,PT10,PT13,PT15,PT17,PT18,PT19,PT20,PT21,PT23,PT24,,PT25,PT27,PT28,PT30,PT31,PT32,PT33,PT36,PT37,PT38,PT41,PT42,PT43,PT45,PT46 | 29 (15%) |
| Indirect Proof | PT6,PT8,PT10,PT21,PT33,PT42 | 6(2%) |
| Counterexample | PT2,PT3,PT6,PT7,PT9,PT10,PT11,PT12,PT14,PT15,PT17,PT18,PT19,PT20,PT21,PT22,PT23,PT24,PT25,PT27,PT28,PT31,PT35,PT37,PT42,PT43,PT45,PT46 | 28(14%) |
| Method of Contradiction | PT3,PT4,PT5,PT6,PT7,PT10,PT12,PT13,PT14,PT16,PT17,PT19,PT20,PT21,PT22,PT23,PT24,PT27,PT29,PT30,PT31,PT32,PT33,PT35,PT36,PT38,PT41,PT42,PT43,PT45,PT46 | 31(16%) |
| Contrapositive | PT1,PT3,PT4,PT5,PT6,PT7,PT10,PT11,PT12,PT13,PT17,PT19,PT20,PT24,PT25,PT26,PT27,PT28,PT30,PT31,PT32,PT33,PT35,PT36,PT37,PT38,PT40,PT41,PT42,PT43,PT45 | 31(16%) |
| Trial/Error | PT9, PT21,PT26,PT35,PT36,PT41,PT43 | 7(3%) |
| Proof by Trial | PT2,PT3,PT5,PT7,PT10,PT14,PT17,PT19,PT20,PT23,PT24,PT25,PT31,PT37,PT42,PT45,PT46 | 17(9%) |
| Total | | 198 (100%) |

When Table 10 is examined, it was found that preservice teachers mostly responded to the method of contradiction (16%) and contrapositive (16%). then, induction (15%) and direct proof (15%). In addition, they gave answers regarding the methods of "trial and error" (7) and "proof by trial" (17). One preservice teacher answered "logical reasoning" and the other answered "hypotheductive thinking." Since the reactions came from only one student for each answer, they were not included in the table. Among the 30 answers regarding direct proof, explanations were found in nine of them, and three of these explanations were described as correct. On the contrary, while there were 12 explanations regarding counterexample, eight of these explanations were correct, while there were 10 explanations regarding the contradiction method and three of them were accepted as correct. In addition, explanations were written for seven of the empirical proof answers, and two of these explanations were found to be correct. While there were 10 explanations regarding the method of contrapositive, six of these explanations were found correct. These statements were thought to be obtained through logical deduction and were associated with analytical transformational proof scheme indicators. As seen in Table 11; among the proof methods explained by preservice teachers, the highest percentage of correct answers belonged to the proof by counterexample method (67%). Preservice teachers made correct statements about the proof by contrapositive (60%) after the method of counterexample. In other words, preservice teachers who made explanations about the proof method stated that they most frequently gave statements with indicators related to the analytical transformational proof scheme in their explanations about the proof by counterexample and proof by contrapositive method. In addition, it was observed that preservice teachers mostly made explanations about proof methods with external ritual proof schemes, in addition to the indicators related to the analytical transformational proof scheme. The methods that the external ritual proof scheme was associated with were the method of contrapositive, the method of contradiction, and the method of direct proof. In conclusion, it can be pointed out that the explanations of the preservice teachers regarding the external proof scheme regarding their knowledge of proof methods are most frequently related to these three methods.

**Table 11**

*Explanations of Preservice Teachers Regarding the Proof Methods They State They Have Used*

| The Proof Method She/He Said She/He Used /Proof Scheme) | Emp. Examples Based P.S. | External Ritual P.S. | Analyt. Transformational PS. | Unrelated Expr. | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Deduction | | 2 | 1 (25%) | 1 | 4 |
| Direct Proof | | 4 | 3(33%) | 2 | 9 |
| Proof By Trial | 3 | 2 | 2(29%) | | 7 |
| Proof By Contrapositive | | 4 | 6(60%) | | 10 |
| Proof By Contradiction | | 6 | 3 (30%) | 1 | 10 |

**Table 11**

*Explanations of Preservice Teachers Regarding the Proof Methods They State They Have Used (continued)*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Proof By Counterexample | 1 | 2 | 8(67%) | 1 | 12 |
| Total | 4 | 20 | 23(44%) | 5 | 52 |

When preservice teachers were asked to write down the proof methods they knew, they frequently responded to the method of contradiction (16%) and proof by contrapositive (16%). Then, it was observed that they responded with induction (15%) and direct proof (15%). In their explanations regarding these methods, the method with the highest correct response rate was the proof by counterexample (67%) and the method of proof by contrapositive (60%). However, preservice teachers also included indicators of the external ritual proof scheme in their explanations about the method of contrapositive. Hence, it can be stated that preservice teachers are most likely to know the name of the proof method by contrapositive and make explanations at the same time and that it is the proof method in which they make explanations with indicators related to the analytical transformational proof scheme.

### *Knowledge of Preservice Teachers About Proof Methods*

In the second part of the PMI, preservice teachers were asked to explain the methods of direct proof, proof by contrapositive, proof by contradiction, proof by counterexample, and proof by trial, respectively. The findings are as follows.

**Table 12**

*Knowledge of Preservice Teachers About Proof Methods*

| | Analy.Transf. P.S. | Emp. Ex. Based P.S. | External Ritual P.S. | Not grouped /Meaningless | Total | Blank |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Direct Proof | 4 (6%) | 4 (10%) | 9 (24%) | 24 (41%) | 41 | 3 |
| Proof by Contrapositive | 11 (17%) | 2 (4%) | 15 (39%) | 11 (18%) | 39 | 6 |
| Proof by Contradiction | 10 (15%) | 4 (10%) | 10 (26%) | 17 (29%) | 41 | 3 |
| Proof by Counterexample | 32 (48%) | 1 (2%) | 3 (8%) | 6 (10%) | 42 | 2 |
| Proof by Trial | 9 (14%) | 31 (74%) | 1 (3%) | 1 (2%) | 42 | 2 |
| | 66 (100%) | 42(100%) | 38(100%) | 59 (100%) | 205 | |

It has been identified that preservice teachers most frequently gave answers regarding the method of proof by counterexample in their correct statements. For example, PT5 made the following statement regarding the method of counterexample: “It is generally used to refute arguments. When we find a single case that falsifies the given proposition, we refute it.” Such statements are classified in the category of analytical transformational proof schemes.

It was determined that most of the preservice teachers (74%) used empirical examples-based proof scheme indicators in their explanations regarding the proof by trial method. In these statements, preservice teachers did not mention the existence of a limited set. For example, PT2 stated: "Generalization is achieved by trying different values in the expression that is tried to be proven," while PT4 explained: "To show the correctness by trying through substituting a few values." Since the limitation of the set is denied in such statements, it can be stated that the majority of ideas of preservice teachers about what the method of proof through trial is are not correct, and they see “the way of verifying the proposition with certain values” as proof.

It was determined that preservice teachers most frequently (39%) made explanations with indicators related to the external ritual proof scheme in their explanations regarding the method of proof by contrapositive. For example, PT21 stated: “We start by thinking that the given statement is wrong. If the result is wrong when going this way, the statement given is actually true." PT28 stated: "Assuming that the proposition is false, this assumption is proven wrong." Both preservice teachers thought that the proof started by assuming the opposite of the hypothesis and stated that a contradiction would be found in this way. The source of this thought may be that preservice teachers often confuse the approach to the contrapositive method with the contradiction method, and therefore, resort to ritual definition. In addition, it was determined that most of the preservice teachers (32 PTs, 48% of the responses regarding the analytical transformational proof scheme) made explanations with indicators related to the analytical transformational proof scheme in their explanations regarding the proof method by contrapositive. In addition, preservice teachers frequently (15 PTs, 39%) made explanations with external ritual proof scheme indicators in their explanations regarding the method of proof by contrapositive.

## Discussion

Our data revealed that the preservice could not construct a correct proof in their answers regarding the DRI, except for the second question, and that their methodological knowledge regarding the proposition they constructed correctly was incorrect. In the proofs they structured correctly regarding the second question of DRI, it was determined that they had incorrect information about the method they used. In other words, it was identified that preservice teachers were unsuccessful in proving propositions and that they lacked knowledge of methods, and how to use them, and that they did not know the method they used in cases where they proved the proposition. This finding is consistent with studies (Güler et al., 2012; Özer & Arıkan, 2002; Stylianides et al., 2007; Zaimoğlu, 2012) stating that preservice mathematics teachers have difficulties in constructing proofs and cannot understand the logic of proof methods.

In their answers to the first question, which is suitable for solving with the direct proof method, preservice teachers stated that they mostly used the direct proof method. Their explanations, which were expressed with correct judgement, did not help prove the proposition regarding this question because in cases where they stated, they used the direct proof method and acted with external symbolic proof scheme indicators. Thus, it can be pointed out that preservice teachers used external persuasion methods in the proofs they constructed correctly. İmamoğlu & Yontar Toğrol (2015) revealed that preservice teachers preferred to use direct proof and proof with case methods more frequently than other methods. The attitudes of preservice teachers are similar in this respect. Besides, the reason why preservice teachers have external proof scheme indicators even in the proofs they have constructed correctly may be due to the fact that they do not find the proof meaningful. Thus, proofs and their applications are rarely encountered by students in school mathematics. For this reason; they may have perceived mathematics as a compilation of facts provided by their teachers, textbooks, and other entities (Sears, 2019), rather than a product of their own norms and practices.

In their reactions to the second question, which is suitable to be solved by the method of proof by cases, more than half of the preservice teachers (55%) responded by structuring the proof correctly. Therefore, most of the preservice teachers answered the question requiring proof with situations with analytical transformational proof scheme indicators. However, none of the preservice teachers stated that they have used the method of proof by cases. Hence, it can be concluded that the preservice teachers who participated in the study were unaware of the proof method they used, even in cases where it had an analytical transformational proof scheme. 44% of the preservice teachers gave the wrong answer to the second question, which is suitable for structuring with the proof method.

In their explanations regarding the third proof question, which is suitable for structuring with the method of contradiction, only four of the preservice teachers stated that they used the method of contradiction, but they tried to check the proposition with certain values or made meaningless algebraic manipulations. Therefore, preservice teachers who stated that they used the contradiction method, structured their proofs with indicators related to the external and empirical proof scheme. This finding is consistent with Sears' (2019) finding that preservice teachers mostly respond to external and empirical proof schemes and generally tend to examine propositions with certain values.

In their answers to the fourth question, which is suitable for proving the proposition using the method of contrapositive, only three preservice teachers stated that they used the method of contrapositive with external and empirical proof scheme indicators. In their explanations regarding the fifth proof question, where proof can be structured by the method of counterexample, nine preservice teachers stated that they constructed proof by counterexample, but they structured the proof by giving examples using empirical proof scheme indicators.

In this study, it can be pointed out that preservice teachers could only prove with the method of proof by cases, and in other cases, they failed in proof construction by acting with indicators related to the external and empirical proof scheme. In addition, preservice teachers who made direct proofs acted with indicators related to the external symbolic proof scheme. Preservice teachers who constructed proofs with cases gave responses regarding the analytical transformational proof scheme in their correct answers, but they did not know the method they used. In their incorrect answers, they acted with indicators related to empirical perceptual, experimental examples-based and external symbolic proof schemes. While the preservice teachers who used the method of contrapositive and contradiction carried indicators related to the external symbolic and empirical examples-based proof scheme indicators in their answers, the preservice teachers who used the method of counterexample tried to structure their proofs with indicators related to the empirical examples-based proof scheme.

In the questions about knowledge of proof methods, preservice teachers mostly (74%) made explanations with empirical examples-based proof scheme indicators in their explanations. This finding is consistent with the findings of preservice teachers (Doruk & Kaplan, 2017; Gholamazad et al., 2004; İskenderoğlu et al. 2010; Stylinou et al., 2016) and secondary school students (Heinze & Reiss, 2003) mostly use empirical and external proof schemes or see the arguments as proof which are constructed empirically.  In their answers regarding DRI, especially in the first, third and fifth questions, preservice teachers mostly tried to structure the proof by giving numerical values to the variable in the proposition. For this reason, preservice teachers mostly acted with indicators related to the experimental examples-based proof scheme when constructing proofs regarding these questions. Similarly, Köğce (2013) reported in his study that preservice mathematics teachers believed that verifying propositions by giving numerical values was sufficient for proof.

One of the important findings of this study is that 24 of the preservice teachers structured their proofs correctly in their answers to the second question, but they did not have information about the method they used. Besides; In other questions, none of the preservice teachers could prove the propositions correctly. In addition, very few of them gave correct answers about the appropriate method. Therefore, it can be concluded that preservice mathematics teachers have insufficient ideas about their proof skills and the proof methods they use. This finding is consistent with Demircioğlu's (2022) finding that preservice teachers are not knowledgeable about alternative proof methods. Doruk and Kaplan's (2013) reported that preservice mathematics teachers failed in proof evaluation processes. In addition, Doruk and Kaplan (2017) also reported that the proof skills of preservice mathematics teachers were poor and compatible with the findings that the proof construction skills of preservice teachers were weak and the processes of proving basic concepts were not at the desired level (Barak, 2018).

The findings regarding the PMI revealed that when preservice teachers were asked to write and explain the proof methods they used, it was seen that the highest percentage of correct answers were proof by counterexample (67%). Next, preservice teachers made correct statements about the method of proof by contrapositive (60%). In other words, the preservice teachers who made explanations about the proof method they used most frequently gave statements with indicators related to the analytical transformational proof scheme in their explanations about the proof by counterexample and proof by contrapositive. In addition, it was observed that most of the preservice teachers made explanations about the proof methods with external ritual proof schemes, in addition to indicators related to the analytical transformational proof scheme.

The methods associated with the external ritual proof scheme are determined as the method of contrapositive, method of contradiction and the direct proof method. Therefore, it can be stated that preservice teachers most frequently associated the explanations with the external proof scheme regarding their knowledge of proof methods with these three methods. However, preservice teachers also included indicators of the externally ritual proof scheme in their explanations about the method of contrapositive. Thus, the highest rate at which preservice teachers both knew the name and made explanations at the same time was the method of counterexample. These explanations were associated with analytical transformational proof scheme indicators. This finding is consistent with Doruk's (2019) finding that preservice mathematics teachers were successful in determining the proof using induction, direct proof, and counterexample methods.

In their explanations regarding the proof method, the preservice teachers considered most important or used most frequently, and they made explanations by emphasizing the method they knew the most (proof by trial) instead of emphasizing the use of the proof method where necessary. Hence, it can be concluded that preservice teachers do not have the knowledge of alternative proof methods and the situations in which they use these methods and that they tend to structure the proof with the methods they know or consider important, instead of searching for the appropriate method for all proof questions. This finding is consistent with the finding in the study of Demircioğlu (2022) that preservice teachers are not knowledgeable about alternative proof methods and insist on using the proof methods they have already known. During the proving process, preservice teachers frequently proceeded from judgement to hypothesis instead of proceeding from hypothesis to judgment, and in cases where they could not reason, they tried to structure the proof with meaningless algebraic manipulations without making an effort to determine the appropriate method. This finding indicates that preservice teachers learn and structure proofs mostly by rote (Doruk and Kaplan, 2013), and have difficulties in understanding the meaning of the proposition regarding given propositions, in knowing where to start the proof, in finding and using the appropriate method for proof, in creating a proof and defining the logical structures of the proposition (Uğurel et al., 2016) and that they produce weak arguments (Güler & Ekmekçi, 2016).

## Conclusion and Suggestions

When findings are considered as a whole, it can be stated that the majority of preservice teachers tend to prove the questions by giving values to variables and are not aware that this does not constitute proof. Thus, it can be concluded that preservice teachers mostly act with indicators related to the empirical proof scheme. In addition, preservice teachers mostly do not know the proof methods correctly. Hence, it can be concluded that there is a lack of knowledge regarding proof methods. Preservice teachers take courses on proof knowledge and methods throughout their undergraduate education. As seen in the relevant literature, they have deficiencies in this regard. Changing paradigms and curricula require preservice teachers to learn proof. Considering that very few of the preservice teachers have proof schemes at the desired level, it is predicted that they will have difficulty in teaching proof with limited understanding as they have difficulty in creating convincing proof (Sears, 2019). Therefore, it is recommended that preservice teachers should deal with more and more types of proof during their undergraduate education. It has been pointed out in the literature that preservice teachers should improve their proof and reasoning skills when they gain experience in dealing with different types of proofs (Karunarakan et al., 2014). In addition, it is recommended that they should be taught proof practices related to proof teaching at secondary and high school levels, instead of focusing only on proofs and solutions in courses that include proof applications in undergraduate courses.

Sears et al. (2013) have pointed out that most preservice teachers do not have many opportunities to do proof outside of geometry and that they perceive that they will have difficulty in teaching proof effectively. Therefore, preservice teachers should have the opportunity to practice proof and proof teaching throughout their university experience. In addition, they have a limited understanding of the role and nature of proof. Therefore, discussions on the role and nature of proof need to be included in the teacher education curriculum (Sears et al., 2013). In this way, preservice teachers can gain a deeper understanding of proof teaching along with pedagogical training and can integrate proof teaching into the secondary and high school curriculum in their future teaching. Preservice mathematics teachers are required to graduate from teacher training programs with both well-developed ways of understanding and thinking about proof and in-depth knowledge of proof appropriate to this level of education (Brown & Stillman, 2009).

In this study, proof skills, proof method knowledge and proof schemes of preservice mathematics teachers were investigated. It is recommended that researchers should conduct experimental studies in courses for middle and high school students that integrate proof applications. In this way, the outcomes resulting from the integration of proof-practice teaching into education can be discussed and solutions can be developed.

## Ethics Committee Approval:

## Conflict of Interest:

## Author's Contribution:

## References

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anyting. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(4), 479-488. https://doi.org/10.1080/0020739031000108574.

Barak, B. (2018). *Investigation of pre-service middle school mathematics teachers' proving processes* [Doctoral Dissertation, Anadolu University]. National Dissertation Center.

Brown, J., & Stillman, G. (2009). Preservice secondary teachers' competencies in proof. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education Mathematics Education*, *1,* 1-94.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM).* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/Math/

Çontay, E. G. & Duatepe Paksu, A. (2019). The Proof Schemes of Preservice Middle School Mathematics Teachers and Investigating the Expressions Revealing These Schemes. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education,* *10*(1), 59-100. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.397109

Demircioğlu, H. (2022). Investıgatıon of preservıce mathematıcs teachers' ,mathematıcs teachers' and academıcıan's proof skılls, *The Journal of Academic Social Science Studies*, *73,* 493-508. http://dx.doi.org/10.9761/JASSS7906.

Doruk, M. (2019). preservice mathematics teachers' determination skills of the proof techniques: The case of ıntegers. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *7*(4), 335-348.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2017). The characterıstıcs of proofs produced by preservıce prımary mathematıcs teachers ın calculus. *Mehmet Akif Ersoy Journal of Education Faculty*, (44), 467-498. https://doi.org/10.21764/maeuefd.305605.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2013). Prospectıve prımary mathematıcs teachers' proof evaluatıon abılıtıes on convergence of sequence concept. *Journal of Research in Education and Teaching*, *2*(1), 241-252.

Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2004, October 21-24). *What counts as proof? Investigation of preservice elementary teachers' evaluation of presented 'Proofs'*, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Toronto, Canada. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2026%202004%20Proceedings%20Vol%201.pdf.

Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A historian's perspective. G. Hanna, & M. De Villers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer.

Güler, G. (2013). *Investigating Pre-Service Teachers' Knowledge for Teaching Mathematics: The Sample of Algebra*, [Doctoral Dissertation, Atatürk University]. National Dissertation Center.

Güler, G., & Ekmekci, S. (2016). Examination of the proof evaluation skills of the prospective mathematics teachers: The example of sum of successive odd numbers. *Bayburt Journal of Faculty of Education*, *11*(1), 59-83.

Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R (2012). Pre-servıce teachers' provıng skılls usıng mathematıcal ınductıon and theır vıews on mathematıcal provıng, *Kastamonu Education Journal*, *20*(1), 219-236.

Güner, S. (2012). Examınıng the ways of understandıng and thınkıng of mathematıcs teacher candıdates accordıng to dnr based teachıng ın theır proof process [Master's Thesis, Marmara University]. National Thesis Center.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7*, 234-283.

Hersch, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24,* 389-399. https://doi.org/10.1007/BF01273372.

Imamoglu, Y., & Togrol, A. Y. (2015). Proof construction and evaluation practices of prospective mathematics educators. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(2), 130-144.

İskenderoğlu, T. (2010). *Proof schemes used by prerservıce mathematıcs teachers and their ıdeas about proof* [Doctoral Diisertation, Karadeniz Technic University]. National Thesis Center.

İskenderoğlu, T., Baki, A., & İskenderoğlu, M.(2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *9*, 531-536. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.192.

Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N., & Arbaugh, F. (2014). Improving preservice secondary mathematics teachers' capability with generic example proofs. *Mathematics Teacher Educator*, *2*(2), 158-170. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.2.0158.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*. *64*(5), 291-314. https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977625.

Knuth, E.J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959.

Köğce, D. (2013). Primary mathematics pre-service teachers' opinions about the contribution of doing proof on learning mathematics and their levels of doing mathematical proof.. Electronic Turkish Studies, *8*(12).

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. A. Gutierrez, & P. Boero (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future (pp.* 173-204). Sense Publishers.

Mason, J, Burton, L., ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2. Ed.). Pearson.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston.VA: NCTM.

Noto, M.S., Priatna, N., & Dahlan, J.A. (2019). Mathematical proof: Learning obstacles pre-service teachers on transformation geometry. *Journal on Mathematics Education*, *10*(1), 117-126.

Oflaz, G., Bulut, N., & Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, *63,* 133-152.

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2022). Secondary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Proof Process: A Case Study. *Eurasian Journal of Teacher Educaiton*. *3*(1), 39-54.

Pala, O., & Narlı, S. (2018). Examining Proof Schemes of Prospective Mathematics Teachers Towards Countability Concept. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, *12*(2).

Pekşen Sağır, P. (2013). *Analysıng the process of prospectıvemath teachers' doıng mathematıcal proof* [Master's Thesis, Marmara University]. National Thesis Center.

Reid, D.A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: case study, *Journal of Faculty of Educational Sciences*, *40*(2), 295-319.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675. https://doi.org/10.5951/MT.91.8.0670.

Sears, R., Mueller, E., ve Karadeniz, I. (2013, November 6-8). Preservice teachers perception of their preparation program to cultivate their ability to teach proof. I Congreso de Education Matematica de America Central y El Caribe. http://funes.uniandes.edu.co/4271/1/SearsPreserviceCemacyc2013.pdf.

.

Sears, R. (2019). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(4), 258-274. https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1467106.

Stylinou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006, Kasım 9-12). *Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions,* Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2028%202006%20Proceedings.pdf.

Şengül, S., & Güner, P. (2013). Investigation of preservice mathematics teachers' proof schemes according to DNR based instruction. *International Journal of Social Science,* 6(2), 869-878. http://dx.doi.org/10.9761/JASSS_401

Şen ve Şen, C.., & Güler, G.(2022). Examining Proof-Writing Skills of Pre-Service Mathematics Teachers' in Geometric Proofs: van Hiele Model. *Ahi Evran universityi Kırşehir Journal of Faculty of Education*, *23*, 128-176. https://doi.org/10.29299/kefad.997311

Stylianides,G.J., Stylianides,A.J., & Philippou, G.N.(2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10,* 145-166. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z.

Uygan, C., Tanışlı, D., & Köse, N.Y. (2014). Research of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Beliefs in Proof, Proving Processes and Proof Evaluation Processes, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 137-157. https://doi.org/10.16949/turcomat.33155

Uğurel, I., Morali, H., Yiğit Koyunkaya, M., & Karahan, O. (2016). Pre-Service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *Eurasıa Journal Of Mathematıcs Scıence And Technology Education*, *12*(2), 203-231. 10.12973/eurasia.2016.1523a.

Uygur Kabael, T. (2020). Methods of Prooving. I. Uğurel (Ed.) *Mathematical Proof and teaching* (227-242). Anı Publishing

Varghese, T. (2007). Student teachers' conceptions of mathematical proof, Faculty of Graduate Studies and Research. [Master's Thesis, University of Alberta]. Admonton. https://era.library.ualberta.ca/items/e2c86876-2f0a-4982-9812-ff314d023fcd.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2021). *Methods of qualitative research*. Seçkin Publishing.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers* [Doctoral Dissertation, The University of Texas, Austin, USA]. https://www.proquest.com/docview/304473805?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true&sourcetype=Dissertations%20&%20Theses.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *Geometrıcal proof processes and tendencıes of 8th grade students*. [Master's Thesis, Kastamonu University]. National Thesis Center.