Aksakal, S. Ş. (2024). Uzay Hareketinde Bir Katı Cismin Kinematik Diferansiyel Geometrisi. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 14(1), 143-167.

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 14(1), 143-167, 2024. DOI: 10.31466/kfbd.1373369

KFBD

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi
The Black Sea Journal of Sciences
ISSN (Online): 2564-7377 https://dergipark.org.tr/tr/pub/kfbd

Araştırma Makalesi / Research Article

Uzay Hareketinde Bir Katı Cismin Kinematik Diferansiyel Geometrisi

Saime Şule AKSAKAL[1*]

Öz

Bu çalışmanın iki bölümünden birincisi; diğer bölümün daha iyi anlaşılabilmesi için temel kavramları olan diferansiyel geometri ve kinematikle ilgilenir. İkinci bölümde ise bir düzlem yüzeye komşu bir nokta tanımlanmıştır. Belirtilen noktanın sabit olması için gerekli ve yeterli koşullar sunulmuştur. Regle yüzeye adjoint bir A noktasının geometrik yeri olan eğrinin özellikleri, regle yüzeyin özellikleriyle bağdaştırılarak incelenir.

Anahtar Kelimeler: Dağılma parametresi, Regle yüzey, Euler-Savary formülü, Yapı denklemleri, Striksiyon eğrisi, Kinematik.

Kinematic Differential Geometry of a Rigid Body in Space Movement

Abstract

This thesis is structured into two chapters. The first chapter introduces basic concepts in differential geometry and kinematics to facilitate understanding. The second chapter defines the adjoint point to a ruled surface and presents the conditions for this point to be fixed. The analysis of the properties of the curve formed by the A point adjacent to the ruled surfaces is conducted by correlating it with the properties of the ruled surface.

Keywords: Distribution parameter, Ruled surface, Euler-Savary formulas, Construction equations, Striction curve, Kinematics.

[1]Giresun Üniversitesi, Matematik Bölümü, Giresun, Türkiye, sule.aksakal@giresun.edu.tr

[*]Sorumlu Yazar/Corresponding Author
Geliş/Received: 09.10.2023 **Kabul/Accepted:** 01.03.2024 **Yayın/Published:** 15.03.2024

1. Giriş

Regle yüzeylerin tanımı başlangıçta G. Monge (1850) tarafından yapılmış, daha sonra konuya ek olarak V. Hlavaty (1945) ve J. Hoschek (1973) tarafından doğruların 1- parametreli ailesi konuları araştırılmıştır. Bir doğrunun seçilen bir dayanak eğrisi boyunca hareket etmesiyle oluşturulan regle yüzeylerden mühendislik, mimarlık, kinematik, bilgisayar programları ve mekanik gibi çeşitli alanlarda yararlanılmaktadır. Ayrıca özel olarak açılabilir regle yüzeyler; hareket analizi, nesne tanıma sistemleri, gemi ürünlerinin üretimi, katı cisim simülasyonunda kullanılmaktadır [Saçlı (2013); Sevinç ve Samancı (2022)].

2. Materyal ve Metot

Bu çalışmanın bulgu ve tartışma kısmını daha iyi anlamak için temel kavramlara ayırdığımız ikinci kısım, üç alt başlıktan meydana gelmektedir. İlk alt başlık çizgilerin uzaydaki hareketlerine; ikinci alt başlık eğriler teorisine ve üçüncü alt başlık ise yüzeylere odaklanmıştır.

2.1. Çizgilerin Uzayındaki Hareketler

Tanım 2.1.1. *T*, *L* cismi üzerinde bir vektör uzayı; *K* ise boştan farklı bir cümle olsun. Eğer $\psi: K \times K \rightarrow T$ fonksiyonu, her $P, Q \in K$ noktaları için $\overrightarrow{PQ} \in T$ tanımı altında aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, *K* cümlesi *T* ile birleştirilmiş bir afin uzay olarak adlandırılır.

i) $\forall P \in K$ ve $\forall \alpha \in T$ iken $\overrightarrow{PQ} = \vec{\alpha}$

ii) $\forall P, Q, R \in K$ olmak üzere $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

şartlarını sağlayan bir tek $Q \in K$ noktası vardır. $\overrightarrow{PQ}$ vektörü başlangıç noktası *P* ve uç noktası *Q* olan bir vektördür. *K*'nın boyutu *boyK=boyT* şeklinde tanımlıdır.

T bir vektör uzayı, *K ise T* ile birleşen bir reel afin uzay olsun. *T'* de tanımlanan bir $<,>$ $: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ iç çarpım işlemi aracılığıyla *K'* da diklik, açı, uzunluk gibi metrik özellikleri tanımlayabiliriz. Bu durumda *K* afin uzayı artık bir Öklid uzayı olarak adlandırılır ve E^n ile temsil edilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.1.2. *n* boyutlu E^n Öklid Uzayında yer alan bir *P* noktasının E^n' de bir afin koordinat sistemine göre koordinatları $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ olarak verilsin. $p_i = E^n \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarına E^n' nin *i*-yinci koordinat fonksiyonu adı verilir. $\mathbb{R}^n$ standart reel afin uzayı iken $\mathbb{R}^n$' de bir $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ iç çarpımı $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$ için $<,>$ $(P, Q) =< P, Q > \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i$ şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma

$\mathbb{R}^n$' de Öklid iç çarpımı veya standart iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlandığı bu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayıyla birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n- boyutlu standart Öklid uzayı adı verilir ve E^n ile temsil edilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.1.3. E_1^n ve E_2^n, $\mathbb{R}_1^n$ ve $\mathbb{R}_2^n$ iç çarpım uzaylarıyla birleşen Öklid uzayları olsun. Bir $f: E_1^n \rightarrow E_2^n$ afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ koşulunu gerçekleyebilen bir $\psi: \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ lineer dönüşümü ile birleşebiyorsa f ye bir izometri denir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.1.4. $n -$ boyutlu E^n Öklid uzayının bir izometrisi f olsun. E^n' de bulunan bir $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f nin matris formundaki gösterimi $A \in O(n)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere $\begin{bmatrix} X' \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklindedir. f ye E^n de bir hareket adı verilir.

$A \in O(n)$ olduğunda $detA = \pm 1$ olmaktadır. Eğer bu A matrisinin determinantı pozitif ise f' ye direkt hareket; determinant negatif ise f' ye karşıt hareket denir. Bu çalışmada hareket ifadesi yalnız kullanıldığında direkt hareketleri temsil edecektir. Direkt hareketler, direkt dönme ve öteleme olmak üzere iki tür hareketin bileşimidir.

Eğer E^n Öklid uzayında bir izometri olan f için $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir $O \in E^n$ noktası mevcut ise f ye "O" noktası etrafında bir dönme denir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.1.5. E^n Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + h$ koşulunu sağlayan bir ve tek $h \in E^n$ noktası mevcut ise f dönüşümüne E^n uzayının h ile gösterilen bir ötelemesi adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

E^3 uzayında bulunan 1- parametreli hareketlerde E^3 uzayının doğruları regle yüzeyler teorisi açısından büyük önem taşımaktadır. Doğrular E^3 uzayının doğrusal nokta cümleleridir. Bu nedenle E^3 Öklid uzayını sadece doğrulardan oluşmuş bir uzay olarak kabul edecek ve E^3' e çizgiler uzayı adını vereceğiz.

Tanım 2.1.6. Uzay hareketi H/H' nin $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi üzerinde dönmeyi temsil eden $A \in O(3)$ ve ötelemeyi temsil eden $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri, $A = A(t)$ ve $C = C(t)$ olarak belirli tek bir t reel parametresine ait diferensiyellenebilir fonksiyonlarıysa H/H' hareketine 1-parametreli uzay hareketi adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

2.2.Eğriler Teorisi

Tanım 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık iken (I, α) koordinat komşuluğunda tanımlı $\alpha(I) \subset E^n$ fonksiyonuna α eğrisi adı verilir, $\alpha: I \to E^n,\ I \subseteq \mathbb{R}$ ile ifade edilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.2.2. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğunda tanımlansın. $\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R}$ iken $t \to \|\alpha'(t)\|$ olarak tanımlı $\|\alpha'\| \in \mathbb{R}$ sayısına M nin (I, α) koordinat komşuluğunda yer alan $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.2.3. (I, α) koordinat komşuluğunda tanımlı bir $M \subset E^n$ eğrisi için $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α)' ya göre birim hızlı eğridir olarak adlandırılır. Eğrinin $s \in I$ parametresine ise yay parametresi adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.2.4. (I, α) koordinat komşuluğunda tanımlı bir $M \subset E^n$ eğrisi için $a, b \in I$ iken M eğrisinin *a'* dan *b'* ye yay uzunluğu olarak, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğunu ifade eden $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$; $t \in I$ reel sayısına karşılık gelir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.2.5. Bütün noktalarının hız vektörünün sıfırdan farklı olduğu eğrilere regüler eğriler adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.2.6. (I,α) koordinat komşuluğunda tanımlı bir $M \subset E^n$ eğrisi için $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, N(t) = B(t) \wedge N(t) , B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

olarak tanımlanır [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.2.7. (I,α) koordinat komşuluğunda tanımlı bir $M \subset E^n$ eğrisi için $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasında yer alan Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olarak tanımlansın. Frenet vektörleri ile türevleri arasında

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı bulunur. Burada $k_1(s) \in \mathbb{R}$ sayısına α eğrisinin eğriliği ve $k_2(s) \in \mathbb{R}$ sayısına ise α eğrisinin burulması adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

2.3.Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.3.1. M cümlesi, *n* boyutlu E^n vektör uzayında boyutu olan bir yüzey ya da *(n*-1*)* yüzey olarak E^n uzayında tanımlı boştan farklı bir cümledir. Öyle ki bu cümle

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n | f: U \xrightarrow[x \to f(x) = c]{diferensineyellebilir} \mathbb{R}, U \; bir \; açık \; alt \; cümle \right\}$$

$\nabla f|_P \neq 0,\ \forall\ P \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2' de bir 1 yüzeye düzlemsel eğri**,** E^3' de bir 2 yüzeye ise genel olarak yanlızca yüzey denir. $n > 3$ iken E^{n}' de bir *(n*-1*)* yüzey genel olarak bir hiperyüzey olarak isimlendirilir.

Herbir M hiperyüzeyi bir $(n-1)$ manifolddur, bu nedenle $\forall P \in M$ noktasında M' nin bir tanjant uzayı $T_M(P)$ olarak tanımlı olup, bu tanjant uzayı $(n-1)$ boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzay $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. $T_M(P)$, M' yi tanımlarken kullanılan f fonksiyonundan bağımsız; yanlızca M' ye bağlı bir tanjant uzayıdır. $T_M(P)$ vektör uzayı, E^n' nin tamamen M' de bulunan parametreli eğrilerinin P noktasındaki hız vektörleriyle karakterize edilebilir. Eğer M' yi tanımlarken bahsedilen türevlenebilir fonksiyon f ise $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak şartıyla $f(x) = c,\ \forall x \in M$ dir, ayrıca $\nabla f|_P \neq 0, \forall P \in M$ dir. Böyle bir f fonksiyonu M' nin tanımı ile mevcuttur; ayrıca f fonksiyonları birden fazla olabilir. Her f fonksiyonu için $T_M(P) = [\nabla f|_P]^\perp$ olarak ifade edilebilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.3.2. M, E^n nin bir hiperyüzeyi olarak verilsin. $\chi(M)^\perp$' nin ortonormal bir bazı $\{N\}$ olarak belirlenirse, N' ye M' nin birim normal vektör alanı adı verilir. $\chi(M)^\perp$' nin $\{N\}$ ve $\{-N\}$ olmak üzere iki tane birim normal vektör alanı vardır [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.3.3. $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3' ün M' de kalan bir doğrusu var ise M' ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M' de kalan doğruya da M' nin bir doğrultmanı denir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.3.4. E^3 Öklid uzayında $e_1(P) = (1,0,0)|_P, e_2(P) = (0,1,0)|_P, e_3(P) = (0,0,1)|_P$ biçimindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanına doğal çatı alanı adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.3.5. $V_1,\ V_2,\ V_3$ vektör alanları E^3 Öklid uzayında tanımlanmış olsun. Eğer $\forall P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayına ait bir taban ise bu vektör alanlarına E^3 de bir çatı alanı adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.3.6. Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinde iki komşu doğrultmanın orta dikmesinin esas doğrultmanı üstündeki ayağına striksiyon (merkez veya boğaz) noktası adı verilir [Hacısalihoğlu (1983)].

Tanım 2.3.7. Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeye ait ana doğru, dayanak eğrisi boyunca hareket ederek yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) eğrisi (çizgisi) denir [Hacısalihoğlu (1983)].

3. Bulgular ve Tartışma

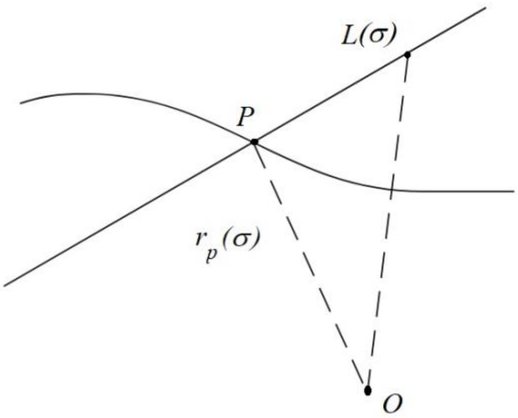
3.1.Regle Yüzeylerde Sabit ve Hareketli Cisimlerin Kinematik Anlamları

3.1.1. Bir Regle Yüzeye Bitişik Olan Eğriler

$\sigma \in \mathbb{R}$ iken $r_p(\sigma)$ uzay eğrisini düşünelim (Şekil1). Bir L doğrusunun $r_p(\sigma)$ uzay eğrisine dayanarak hareket ederken oluşturduğu regle yüzeyin vektörel denklemini

$$\Sigma: R(\sigma,\mu) = r_p(\sigma) + \mu L(\sigma), \mu \in \mathbb{R} \tag{1}$$

şeklinde ifade edebiliriz [Sasaki (1956); Wang ve Xiao (1993)].

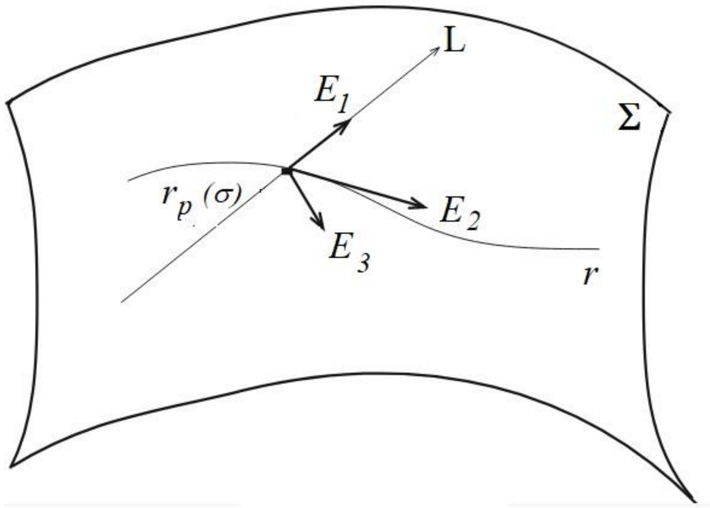


Şekil 1. $r_p(\sigma)$ uzay eğrisi

Burada $L(\sigma)$ ve $r_p(\sigma)$; Σ regle yüzeyinin doğrultmanı ve dayanak eğrisidir. Σ' nın striksiyon eğrisi, $r_p(\sigma)$ dayanak eğrisi olarak belirlensin. Böylece Σ regle yüzeyinin doğal 3-ayaklısı veya $\{\overrightarrow{r_p};\ \overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}\}$ Frenet çatısını

$$E_1 = L(\sigma), \quad E_2 = \frac{dL}{d\sigma}, \quad E_3 = E_1 \times E_2 \tag{2}$$

olarak alalım (Şekil2).



Şekil 2. *Σ* regle yüzeyinin doğal 3-ayaklısı

Burada Frenet çatısı σ' ya göre diferansiyellenerek aşağıdaki işlemler yapılınca

$$\langle E_1, E_1 \rangle = 1 \Rightarrow \langle dE_1, E_1 \rangle = 0 \Rightarrow dE_1 = \alpha E_2 + \gamma E_3$$
$$\langle E_2, E_2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle dE_2, E_2 \rangle = 0 \Rightarrow dE_2 = \lambda E_1 + \beta E_3$$
$$\langle E_3, E_3 \rangle = 1 \Rightarrow \langle dE_3, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow dE_3 = \xi E_1 + \varsigma E_2$$
$$\langle E_1, E_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle dE_1, E_2 \rangle + \langle dE_2, E_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha E_2 + \gamma E_3, E_2 \rangle + \langle \lambda E_1 + \beta E_3, E_1 \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \lambda + \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha$$
$$\langle E_2, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle dE_3, E_2 \rangle + \langle dE_2, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \xi E_1 + \varsigma E_2, E_2 \rangle + \langle \lambda E_1 + \beta E_3, E_3 \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \beta + \varsigma = 0 \Rightarrow \varsigma = -\beta$$
$$\langle E_1, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle dE_3, E_1 \rangle + \langle dE_1, E_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \xi E_1 + \varsigma E_2, E_1 \rangle + \langle \alpha E_2 + \gamma E_3, E_3 \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \gamma + \xi = 0 \Rightarrow \xi = -\gamma$$

olduğundan

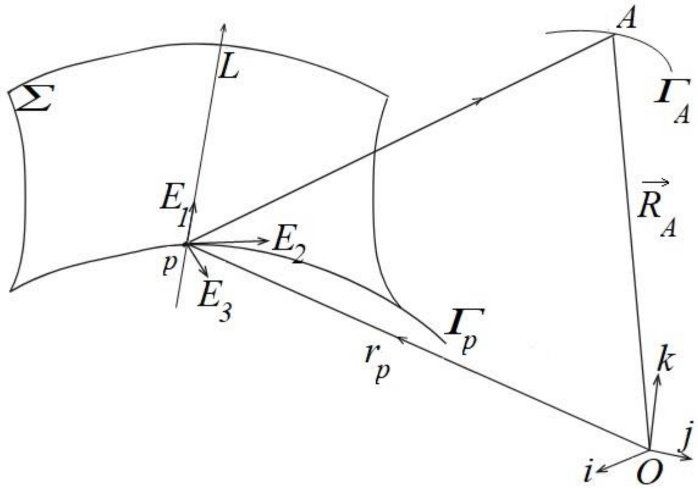
$$\frac{dr_p}{d\sigma} = \alpha E_1 + \gamma E_3, \quad \frac{dE_1}{d\sigma} = \alpha E_2 + \gamma E_3, \quad \frac{dE_2}{d\sigma} = -\alpha E_1 + \beta E_3, \quad \frac{dE_3}{d\sigma} = -\gamma E_1 - \beta E_2$$

bulunur. $\|L\| = 1$ olduğundan $dE_1 = E_2$ olur. Bu durumda $\alpha = 1$ ve $\gamma = 0$ olarak belirlenmiş olur. Bu durumda Frenet çatısı ile diferansiyelleri arasında

$$\frac{dE_1}{d\sigma} = E_2$$
$$\frac{dE_2}{d\sigma} = -E_1 + \beta E_3 \tag{3}$$
$$\frac{dE_3}{d\sigma} = -\beta E_2$$

bağıntıları mevcuttur. Burada α, β, γ katsayıları Σ nın eğrilik fonksiyonları veyaΣ nın yapı parametreleri olarak adlandırılır.

L doğrusu $r_p(\sigma)$ dayanak eğrisine dayanarak Σ regle yüzeyini oluştururken, $r_p(\sigma)$ dayanak eğrisinin üzerinde bulunmayan bir A noktasının geometrik yeri ise Γ_A ile göstereceğimiz, Σ regle yüzeyine adjoint(bitişik) bir eğri şeklindedir [McCarthy ve Roth (1981)].



Şekil 3. Σ regle yüzeyine adjoint Γ_A eğrisi

Böylece Γ_A nın vektörel denklemini

$$\Gamma_A\colon \overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{r_p} + x_1\overrightarrow{E_1} + x_2\overrightarrow{E_2} + x_3\overrightarrow{E_3} \tag{4}$$

olarak yazabiliriz. Burada (x_1, x_2, x_3); $\{\overrightarrow{r_p};\ \overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}\}$ Frenet çatısına göre A noktasının koordinatlarıdır (Şekil3).

$\overrightarrow{R_A}$ yı σ ya göre diferansiyelleyip (3) denklemini kullanırsak

$$\frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma} = \frac{dr_p}{d\sigma} + \frac{dx_1}{d\sigma}E_1 + \frac{dE_1}{d\sigma}x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma}E_2 + \frac{dE_2}{d\sigma}x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma}E_3 + \frac{dE_3}{d\sigma}x_3$$
$$= \alpha E_1 + \gamma E_3 + \frac{dx_1}{d\sigma}E_1 + E_2x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma}E_2 - E_1x_2 + \beta x_2E_3 + \frac{dx_3}{d\sigma}E_3 - \beta x_3E_2$$
$$= \left(\frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha\right)E_1 + \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3\right)E_2 + \left(\beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma\right)E_3$$

elde edilir. Burada

$$A_1 = \frac{dx_1}{d\sigma} - x_2 + \alpha, \quad A_2 = x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma} - \beta x_3, \quad A_3 = \beta x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma} + \gamma$$

alınırsa

$$\frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma} = A_1\overrightarrow{E_1} + A_2\overrightarrow{E_2} + A_3\overrightarrow{E_3} \tag{5}$$

denklemi elde edilir.

A noktası $\{0; i, j, k\}$ sabit çatısına göre sabit bir noktaysa $\frac{dR_A}{d\sigma} = 0$ olur. Burada $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{E_3}$ Frenet vektörler olduğundan

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0 \tag{6}$$

elde edilir. Bu koşullar altında *A* noktasına sabit nokta denir ve (6) denklemi bir regle yüzey ile bitişik bir eğrinin sabit nokta şartı olarak tanımlanır.

3.1.2. Uzay Hareketinde Bir Noktanın Yörüngesinin Temel Denklemleri

$\{0_f; i_f, j_f, k_f\}$ sabit çatısına göre hareketli olan bir çatı $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ olsun. Bu çatıların temsil ettikleri uzaylara sabit uzay ve hareketli uzay diyeceğiz. Sabit ve hareketli çatıya göre regle yüzeyler sırası ile

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_f &= R_f(\sigma_f, \mu_f) = r_f + \mu_f S_f \\ \Sigma_m &= R_m(\sigma_m, \mu_m) = r_m + \mu_m S_m \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

şeklindedir. Burada $r_f$ve r_m sırasıyla Σ_f ve Σ_m nin striksiyon eğrilerinin yer vektörleri, S_f ve S_m de ani vida eksenlerinin (ISA) birim vektörleri veya Σ_f ve Σ_m nin üreteç vektörleri; σ_f ve σ_m ise yay parametreleridir. Σ_f ve Σ_m regle yüzeyleri için $\left\{r_f; E_1^{(f)}, E_2^{(f)}, E_3^{(f)}\right\}ve\left\{r_m; E_1^{(m)}, E_2^{(m)}, E_3^{(m)}\right\}$ Frenet formüllerini (2) denkleminde olduğu gibi yazabiliriz.

$$E_1^{(m)} = S^{(m)}(\sigma), \quad E_2^{(m)} = \frac{dS^{(m)}(\sigma)}{d\sigma_{(m)}}, \quad E_3^{(m)} = E_1^{(m)} \times E_2^{(m)}$$

$$E_1^{(f)} = S^{(f)}(\sigma), \quad E_2^{(f)} = \frac{dS^{(f)}(\sigma)}{d\sigma_{(f)}}, \quad E_3^{(f)} = E_1^{(f)} \times E_2^{(f)}$$

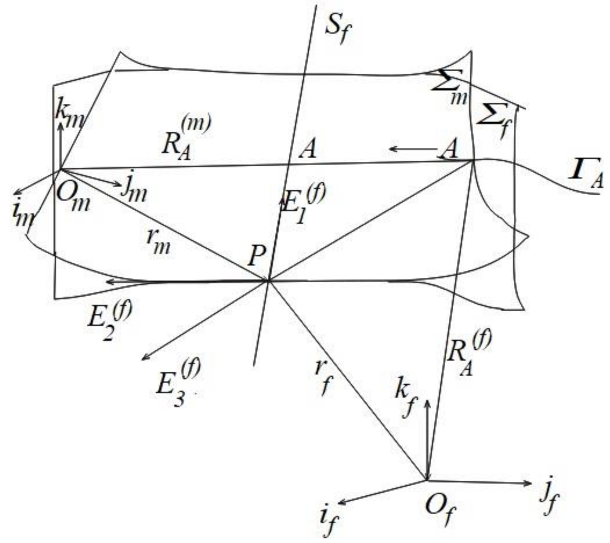
Sabit Σ_f regle yüzeyini (aksoidini) alalım. Sabit (fixed) $\{0_f; i_f, j_f, k_f\}$ referans çatısında bulunan, hareketli Σ_m cisminin sabit bir *A* noktasının yörüngesini araştıralım (Şekil4). Herhangi bir anda *A* noktası Σ_f regle yüzeyine bitişik olsun. Bu durumda Γ_A eğirisinin vektörel denklemi;

$$\Gamma_A: \overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{r_f} + x_1\overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2\overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3\overrightarrow{E_3^{(f)}} \tag{8}$$

ile verilir. Burada (x_1, x_2, x_3); $\left\{\overrightarrow{r_f}; \overrightarrow{E_1^{(f)}}, \overrightarrow{E_2^{(f)}}, \overrightarrow{E_3^{(f)}}\right\}$ *A* noktasının, Frenet çatısına göre koordinatlarıdır. Bu taktirde $\overrightarrow{R_A}$ vektörünün σ_f ye göre diferansiyeli;

$$\frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma_{(f)}} = \left(\frac{dx_1}{d\sigma_{(f)}} - x_2 + \alpha_f\right)E_1^{(f)} + \left(x_1 + \frac{dx_2}{d\sigma_{(f)}} - \beta_f x_3\right)E_2^{(f)} + \left(\beta_f x_2 + \frac{dx_3}{d\sigma_{(f)}} + \gamma_f\right)E_3^{(f)} \tag{9}$$

bulunur.



Şekil 4. Hareketli Σ_m cisminin sabit bir *A* noktasının sabit referans çatısındaki yörüngesi

Şimdi de A noktasını Σ_m hareketli regle yüzeyine adjoint olarak alalım. Σ_m regle yüzeyi oluşturduğu sırada *A* noktası ise bir $\Gamma_A^{(m)}$ eğrisi meydana getirir. Bu eğrinin vektörel denklemini

$$\Gamma_A^{(m)}: \overrightarrow{R_A^{(m)}} = \overrightarrow{r_m} + x_1\overrightarrow{E_1^{(m)}} + x_2\overrightarrow{E_2^{(m)}} + x_3\overrightarrow{E_3^{(m)}} \tag{10}$$

ile gösterelim. Burada (x_1, x_2, x_3); $\left\{\overrightarrow{r_m}; \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}}\right\}$ Frenet çatısına göre A noktasının koordinatlarıdır. Şimdi $\Gamma_A^{(m)}$ eğrisinin $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ referans çatısına göre değişimini inceleyelim.

Bu çalışmada sabit Σ_f regle yüzeyi ile hareketli Σ_m regle yüzeyi (8) ve (10) denklemlerinde birbirine teğet olur. Buna göre $\gamma_m = \gamma_f$ ve $d\sigma_{(f)} = d\sigma_{(m)}$ olur. Veya $\left\{\overrightarrow{r_m}; \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}}\right\}$ ve $\left\{\overrightarrow{r_f}; \overrightarrow{E_1^{(f)}}, \overrightarrow{E_2^{(f)}}, \overrightarrow{E_3^{(f)}}\right\}$ Frenet çatıları herhangi bir anda çakışır ki bu (8) ve (10) denklemlerindeki (x_1, x_2, x_3) koordinatlarının aynı olduğunu gösterir.

A noktası $\{0_m; i_m, j_m, k_m\}$ referans çatısına göre sabit bir nokta olduğu durumda $\overrightarrow{R_A^{(m)}}$' nin türevleri regle yüzeye bir adjoint eğrinin sabit nokta şartı ile uyuşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\sigma_{(m)}} &= x_2 - \alpha_m \\ \frac{dx_2}{d\sigma_{(m)}} &= -x_1 + \beta_m x_3 \\ \frac{dx_3}{d\sigma_{(m)}} &= -\beta_m x_2 - \gamma_m \end{aligned} \tag{11}$$

olur. Yukardaki denklem (9) da yerine yazılırsa

$$\frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma_{(f)}}=\left(x_2-\alpha_m-x_2+\alpha_f\right)E_1^{(f)}+\left(x_1+\beta_m x_3-x_1-\beta_f x_3\right)E_2^{(f)}+$$
$$+\left(\beta_f x_2-\beta_m x_2-\gamma_m+\gamma_f\right)E_3^{(f)}$$

$$\frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma_{(f)}}=\left(\alpha_f-\alpha_m\right)E_1^{(f)}+\left(\beta_m-\beta_f\right)x_3E_2^{(f)}+\left[\left(\beta_f-\beta_m\right)x_2-\left(\gamma_m-\gamma_f\right)\right]E_3^{(f)}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha^*=\alpha_f-\alpha_m, \qquad \beta^*=\beta_f-\beta_m, \qquad \gamma^*=\gamma_f-\gamma_m \tag{12}$$

alınırsa

$$\frac{d\overrightarrow{R_A}}{d\sigma_{(f)}}=\alpha^*E_1^{(f)}+\beta^*\left(x_2E_3^{(f)}-x_3E_2^{(f)}\right) \tag{13}$$

elde edilir. Burada (12) denklemi Σ_m ve Σ_f regle yüzeylerinin indirgenmiş yapı denklemleridir. Bunlar uzay hareketlerinin ani değişmezleridir.

$d\sigma_{(f)}=d\sigma_{(m)}$ olduğundan bundan böyle kısaca $d\sigma$ ile ifade edeceğiz. R_A nın σ ya göre ikinci türevi;

$$R_A'=\alpha^*E_1^{(f)}+\beta^*(x_2E_3^{(f)}-x_3E_2^{(f)})$$
$$R_A''=\alpha^{*\prime}E_1^{(f)}+\alpha^*E_1^{\prime(f)}+\beta^{*\prime}\left(x_2E_3^{(f)}-x_3E_2^{(f)}\right)+\beta^*\left(x_2'E_3^{(f)}+x_2E_3^{\prime(f)}-x_3'E_2^{(f)}-x_3E_2^{\prime(f)}\right)$$
$$=\alpha^{*\prime}E_1^{(f)}+\alpha^*E_2^{(f)}+\beta^{*\prime}\left(x_2E_3^{(f)}-x_3E_2^{(f)}\right)+\beta^*\left(x_2'E_3^{(f)}-\beta_f x_2E_2^{(f)}-x_3'E_2^{(f)}-x_3\left(-E_1^{(f)}+\beta_fE_3^{(f)}\right)\right)$$
$$=\alpha^{*\prime}E_1^{(f)}+\alpha^*E_2^{(f)}+\beta^{*\prime}x_2E_3^{(f)}-\beta^{*\prime}x_3E_2^{(f)}+\beta^*x_2'E_3^{(f)}-\beta^*\beta_fx_2E_2^{(f)}-\beta^*x_3'E_2^{(f)}+\beta^*x_3E_1^{(f)}-\beta^*x_3\beta_fE_3^{(f)}$$
$$=\alpha^{*\prime}E_1^{(f)}+\alpha^*E_2^{(f)}+\beta^{*\prime}x_2E_3^{(f)}-\beta^{*\prime}x_3E_2^{(f)}+\beta^*(-x_1+\beta_mx_3)E_3^{(f)}$$

$$-\beta^*\beta_f x_2 E_2^{(f)} - \beta^*(-\beta_m x_2 - \gamma_m)E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_1^{(f)} - \beta^* x_3 \beta_f E_3^{(f)}$$
$$= \alpha^{*\prime} E_1^{(f)} + \alpha^* E_2^{(f)} + (\beta^{*\prime} x_2)E_3^{(f)} - \beta^{*\prime} x_3 E_2^{(f)} + \beta^*\beta_m x_3 E_3^{(f)} - \beta^* x_1 E_3^{(f)}$$
$$-\beta^*\beta_f x_2 E_2^{(f)} + \beta^*\beta_m x_2 E_2^{(f)} + \beta^*\gamma_m E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_1^{(f)} - \beta^* x_3 \beta_f E_3^{(f)}$$
$$R_A'' = (\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3)E_1^{(f)} + (\alpha^* - \beta^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^*\gamma_m)E_2^{(f)} + (\beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3)E_3^{(f)} \quad (14)$$

elde edilir.

3.1.3. Aksoidlerin İndirgenmiş Yapı Denklemlerinin Kinematik Anlamları

$\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ yapı denklemlerinin kinematik anlamlarını inceleyelim. V_A , bir cismin bir A noktasındaki hızı olmak üzere

$$V_A = \frac{dR_A}{dt} = R_A' \frac{d\sigma}{dt} = \alpha^* \frac{d\sigma}{dt} E_1^{(f)} + \beta^* \frac{d\sigma}{dt} (x_2 \overrightarrow{E_3^{(f)}} - x_3 \overrightarrow{E_2^{(f)}})$$

şeklindedir. Burada, $W = \beta^* \frac{d\sigma}{dt}, V = \alpha^* \frac{d\sigma}{dt}, r = x_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}}$ alınırsa

$$V_A = VE_1^{(f)} + W\left(E_1^{(f)} \times r\right) = VE_1^{(f)} + W(E_1^{(f)} \times (x_1 \overrightarrow{E_1^{(f)}} + x_2 \overrightarrow{E_2^{(f)}} + x_3 \overrightarrow{E_3^{(f)}}))$$
$$\Rightarrow V_A = VE_1^{(f)} + W(x_2 \overrightarrow{E_3^{(f)}} - x_3 \overrightarrow{E_2^{(f)}}) \quad (15)$$

eşitliği bulunur. (15) denklemindeki V ve W; Σ_f ve Σ_m regle yüzeylerinin birbirleri üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi esnasında hareketli cismin öteleme hızı ve açısal hızıdır. Hareketli cismin A noktasındaki ivmesini a_A ile olmak üzere

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{dV}{dt} E_1^{(f)} + VE_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{dW}{dt} x_2 E_3^{(f)} - x_3 \frac{dW}{dt} E_2^{(f)}$$
$$+W(-x_1 + \beta_m x_3)\frac{d\sigma}{dt} E_3^{(f)} - W\beta_f x_2 E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt} + W(\beta_m x_2 + \gamma_m)E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt}$$
$$-Wx_3\left(-E_1^{(f)} + \beta_f E_3^{(f)}\right)\frac{d\sigma}{dt} - x_2\left(\beta_f - \beta_m\right)E_2^{(f)} \frac{d\sigma}{dt}$$
$$\Rightarrow a_A = \left(\frac{dV}{dt} + Wx_3 \frac{d\sigma}{dt}\right)E_1^{(f)} + \left(V\frac{d\sigma}{dt} - x_3 \frac{dW}{dt} - W\beta^* x_2 \frac{d\sigma}{dt} + W\gamma_m \frac{d\sigma}{dt}\right)E_2^{(f)}$$
$$+\left(\frac{dW}{dt} x_2 - Wx_1 \frac{d\sigma}{dt} - W\beta^* x_3 \frac{d\sigma}{dt}\right)E_3^{(f)} \quad (16)$$

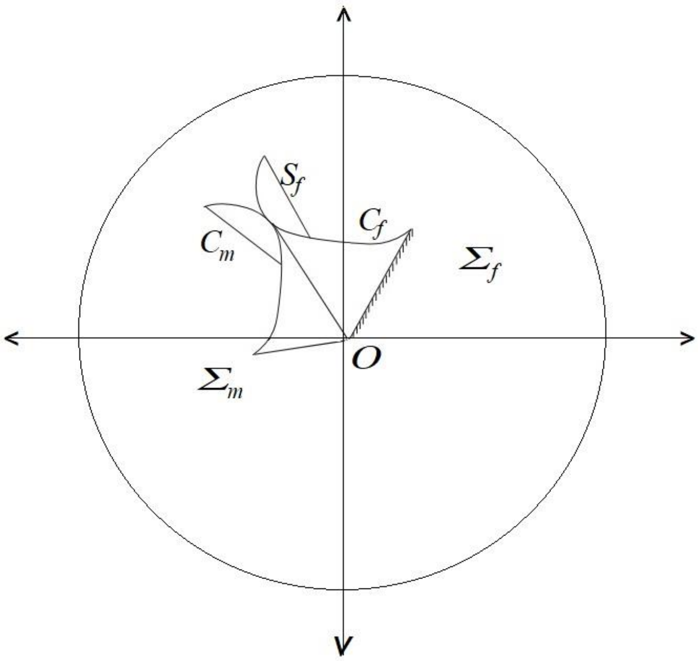
elde edilir. Burada $\frac{dW}{dt}$ ve $\frac{dV}{dt}$ Σ_m nin $E_1^{(f)}$ (ani vida ekseni) boyunca Σ_m ya ilişkin açısal ivme ve öteleme ivmeleridir.

$$\left.\begin{aligned} V_A &= \frac{dR_A}{dt} = R_A' \frac{d\sigma}{dt} \\ a_A &= \frac{d^2R_A}{dt^2} = R_A'' \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + R_A' \frac{d^2\sigma}{dt^2} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &W = \beta^* \frac{d\sigma}{dt}, \qquad V = \alpha^* \frac{d\sigma}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \alpha^{*\prime} \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \alpha^* \frac{d^2\sigma}{dt^2} \\ &\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \beta^{*\prime} \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \beta^* \frac{d^2\sigma}{dt^2} \end{aligned} \tag{18}$$

denklemleri elde edilir.

(17) ve (18) denklemleri α^* ve β^* ifadelerinin kinematik anlamlarını ifade etmektedir[Wang (1995)]. Bunlar uzay hareketlerinin bütün (invaryant) değişmezleridir (Şekil5).



Şekil 5. c_m küresel gösterge eğrisinin yuvarlanma hareketi

$E_1^{(m)}$ için c_m küresel gösterge eğrisi $E_1^{(f)}$ nin c_r küresel gösterge eğrisi üzerinde yuvarlanır [Bokelberg ve ark. (1992); Ridley ve ark. (1992)]. (16) ve (17) denklemleri sıfıra eşitlenirse x_1, x_2, x_3 ifadeleri aşağıdaki şekilde bulunabilir; $a_A = \frac{dV_A}{dt} = 0$ olup

$$\left(\frac{dV}{dt} + Wx_3\frac{d\sigma}{dt}\right)E_1^{(f)} + \left(V\frac{d\sigma}{dt} - x_3\frac{dW}{dt} - W\beta^* x_2\frac{d\sigma}{dt} + W\gamma_m\frac{d\sigma}{dt}\right)E_2^{(f)} + \left(\frac{dW}{dt}x_2 - Wx_1\frac{d\sigma}{dt} - W\beta^* x_3\frac{d\sigma}{dt}\right)E_3^{(f)} = 0$$

$$1)\ \frac{dV}{dt} + Wx_3\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

$$2)\ V\frac{d\sigma}{dt} - x_3\frac{dW}{dt} - W\beta^* x_2\frac{d\sigma}{dt} + W\gamma_m\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

$$3)\ \frac{dW}{dt}x_2 - Wx_1\frac{d\sigma}{dt} - W\beta^* x_3\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

olduğundan

$$x_1 = \frac{\frac{d\omega}{dt}\left(\omega\frac{d\sigma}{dt}\right)^{-1}\left(v.\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dv}{dt}\frac{d\omega}{dt}\left(\omega\frac{d\sigma}{dt}\right)^{-1}\right)}{\omega\beta^*\frac{d\sigma}{dt}} - \frac{\beta^*\frac{dv}{dt}\left(\omega\frac{d\sigma}{dt}\right)^{-1} - \omega\gamma_m\frac{d\sigma}{dt}\frac{d\omega}{dt}\left(\omega\frac{d\sigma}{dt}\right)^{-1}}{\omega\beta^*\frac{d\sigma}{dt}}$$

$$x_2 = \left[V\frac{d\sigma}{dt} + W\gamma_m\frac{d\sigma}{dt} + \left(W\frac{d\sigma}{dt}\right)^{-1}\frac{dV}{dt}\frac{dW}{dt}\right] / \left(W\beta^*\frac{d\sigma}{dt}\right) \tag{19}$$

$$x_3 = \frac{dV}{dt}\left(W\frac{d\sigma}{dt}\right)^{-1}$$

bulunur.

Bu (x_1, x_2, x_3) noktasına Σ_f yüzeyine göre ivme merkezi adı verilir. $a_A \times V_A = 0$ şartını sağlayan noktalara inflection noktaları adı verilir. Bu noktaları bulalım;

$$a_A \times V_A = 0$$

$$\left(R_A''\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + R_A'\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) \times \left(R_A'\frac{d\sigma}{dt}\right) = 0$$

$$R_A'' \times R_A'\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3 + R_A' \times R_A'\frac{d^2\sigma}{dt^2}\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

$$R_A'' \times R_A'\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3 = 0 \Rightarrow R_A'' \times R_A' = 0$$

$$\begin{vmatrix} E_1^{(f)} & E_2^{(f)} & E_3^{(f)} \\ \alpha^{*\prime} + \beta^* x_3 & \alpha^* - \beta^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^*\gamma_m - \beta^* x_3 & \beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3 \\ \alpha^* & & \beta^* x_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[\beta^* x_2(\alpha^* - \beta^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} + \beta^* \gamma_m) + \beta^* x_3(\beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3)]E_1^{(f)}$$
$$+[\alpha^*(\beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) - \ \beta^* x_2(\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3)]E_2^{(f)}$$
$$+[- \ \beta^* x_3(\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3) - \alpha^*(\alpha^* - \beta^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_m)]E_3^{(f)} = 0$$

olur. $E_1^{(f)}, E_2^{(f)}$, $E_3^{(f)}$ baz vektörler olduğundan

$$1)\beta^* x_2(\alpha^* - \beta^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} + \beta^* \gamma_m) + \beta^* x_3(\beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) = 0$$
$$\beta^*(\alpha^* + \beta^* \gamma_m)x_2 - \beta^{*2} x_1 x_3 - \beta^{*3}(x_2^2 + x_3^2) = 0$$
$$-(\alpha^* + \beta^* \gamma_m)x_2 + \beta^* x_1 x_3 + \beta^{*2}(x_2^2 + x_3^2) = 0$$

olup

$$2)\alpha^*(\beta^{*\prime} x_2 - \beta^* x_1 - \beta^{*2} x_3) - \ \beta^* x_2(\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3) = 0$$
$$\alpha^* \beta^{*\prime} x_2 - \alpha^* \beta^* x_1 - \alpha^* \beta^{*2} x_3 - \alpha^{*\prime} \beta^* x_2 - \beta^{*2} x_2 x_3 = 0$$
$$\alpha^* \beta^* x_1 + (\alpha^{*\prime} \beta^* - \alpha^* \beta^{*\prime})x_2 + \alpha^* \beta^{*2} x_3 + \beta^{*2} x_2 x_3 = 0$$

ayrıca

$$3) - \ \beta^* x_3(\alpha^{*\prime} + \beta^* x_3) - \alpha^*(\alpha^* - \beta^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} x_2 + \beta^* \gamma_m) = 0$$
$$- \ \beta^* \alpha^{*\prime} x_3 - \beta^{*2} x_3^2 - \alpha^{*2} + \alpha^* \beta^{*\prime} x_3 + \alpha^* \beta^{*2} x_2 - \alpha^* \beta^* \gamma_m = 0$$
$$-\alpha^*(\alpha^* + \beta^* \gamma_m) - (\alpha^{*\prime} \beta^* - \alpha^* \beta^{*\prime})x_3 - \beta^{*2}(x_3^2 + \alpha^* x_2) = 0$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned} &-(\alpha^* + \beta^* \gamma_m)x_2 + \beta^* x_1 x_3 + \beta^{*2}(x_2^2 + x_3^2) = 0 \\ &\alpha^* \beta^* x_1 + (\alpha^{*\prime} \beta^* - \alpha^* \beta^{*\prime})x_2 + \alpha^* \beta^{*2} x_3 + \beta^{*2} x_2 x_3 = 0 \\ &-\alpha^*(\alpha^* + \beta^* \gamma_m) - (\alpha^{*\prime} \beta^* - \alpha^* \beta^{*\prime})x_3 - \beta^{*2}(x_3^2 + \alpha^* x_2) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

denklemleri elde edilir. Buradaki 3 yüzey sadece bir uzay eğrisi boyunca kesişir veya 3 denklemden ikisi lineer bağımsızdır.

Tanım 3.1.3.1. Bir katı cisimde $\langle a_A, V_A \rangle = 0$ ile belirli hiperboloid Bresse hiperboloididir. (15) ve (16) denklemleri yukardaki denklemde yerlerine yazılırsa $\left\{\overrightarrow{r_m}; \overrightarrow{E_1^{(m)}}, \overrightarrow{E_2^{(m)}}, \overrightarrow{E_3^{(m)}}\right\}$ Frenet çatısında Bresse Hiperboloidinin denklemi;

$$V\frac{dV}{dt} - x_3 W^2 \gamma_m \frac{d\sigma}{dt} - x_1 x_3 W^2 \frac{d\sigma}{dt} + (x_2^2 + x_3^2) W \frac{dW}{dt} = 0 \quad (21)$$

ile temsil edilir.

Özel olarak $\alpha_f, \gamma_f \in \Sigma_f$ ve $\alpha_m, \gamma_m \in \Sigma_m$ ifadelerinin tümü sıfır ise (19) - (21) denklemleri

1) İvme merkezi; $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

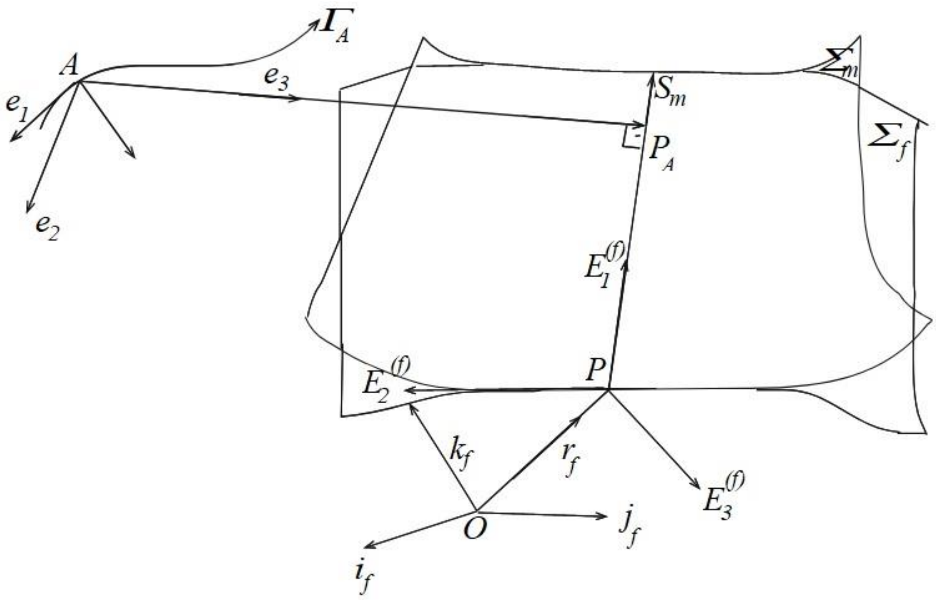
2) İnflection (bükülme) noktaları; $x_2 = 0, x_3 = 0$

3) Bresse Hiperboloidi; $W x_1 x_2 \frac{d\sigma}{dt} + (x_2^2 + x_3^2)\frac{dW}{dt} = 0$

olarak basitleştirilebilir.

3.1.4. Uzay Hareketinde Bir Noktanın Yörüngesinin Ani Özellikleri

Σ_m hareketli regle yüzeyinin Σ_f sabit regle yüzeyine göre hareketini inceleyelim.



Şekil 6. Γ_A yörüngesinin A noktasındaki R_A hareketli çatısı

Öncelikle A noktasının Γ_A yörüngesinin A noktasındaki $\{R_A; e_1, e_2, e_3\}$ hareketli çatısını, bu A noktasının yörüngesinin geometrik özelliklerini incelemek üzere oluşturalım (Şekil6). Burada e_1 birim vektörü A noktasında Γ_A nın birim teğet vektörüdür [Sasaki (1956)]. e_3 birim vektörü ise

$E_1^{(f)}$ nin üzerinde bulunduğu doğrultman vektörüne ortonormal olan bir doğru üzerindeki birim vektördür. e_1, e_2, e_3 vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$e_1 = \frac{R_A'}{\|R_A'\|} = \frac{\alpha^*}{R} E_1^{(f)} + \beta^* \left(\frac{x_2}{R} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{R} E_2^{(f)} \right)$$
$$e_2 = e_1 \times e_3 = \frac{-\beta^* r^2}{Rr} E_1^{(f)} + \alpha^* \left(\frac{x_2}{Rr} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{Rr} E_2^{(f)} \right) \tag{22}$$
$$e_3 = \frac{R_A' \times E_1^{(f)}}{\left\| R_A' \times E_1^{(f)} \right\|} = \frac{x_2}{r} E_2^{(f)} + \frac{x_3}{r} E_3^{(f)}$$

bulunur. Burada $r = (x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $R = (\alpha^{*2} + \beta^{*2} r^2)^{\frac{1}{2}}$ dir. Gerçekten

$$e_1 = \frac{R_A'}{\|R_A'\|} = \frac{\alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* \left(x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)} \right)}{\|R_A'\|} = \frac{\alpha^*}{R} E_1^{(f)} + \beta^* \left(\frac{x_2}{R} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{R} E_2^{(f)} \right)$$
$$e_3 = \frac{R_A' \times E_1^{(f)}}{\left\| R_A' \times E_1^{(f)} \right\|} = \frac{\left[\alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* \left(x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)} \right) \right] \times E_1^{(f)}}{\left\| \left[\alpha^* E_1^{(f)} + \beta^* \left(x_2 E_3^{(f)} - x_3 E_2^{(f)} \right) \right] \times E_1^{(f)} \right\|}$$
$$= \frac{\beta^* x_2 E_3^{(f)} \times E_1^{(f)} - \beta^* x_3 E_2^{(f)} \times E_1^{(f)}}{\left\| \beta^* x_2 E_3^{(f)} \times E_1^{(f)} - \beta^* x_3 E_2^{(f)} \times E_1^{(f)} \right\|} = \frac{\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}}{\left\| \beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)} \right\|}$$
$$= \frac{\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}}{\sqrt{\beta^{*2}(x_2^2 + x_3^2)}} = \frac{\beta^* x_2 E_2^{(f)} + \beta^* x_3 E_3^{(f)}}{\beta^* r} = \frac{x_2}{r} E_2^{(f)} + \frac{x_3}{r} E_3^{(f)}$$
$$e_2 = e_1 \times e_3 = \left[\frac{\alpha^*}{R}, -\frac{x_3 \beta^*}{R}, \frac{x_2 \beta^*}{R} \right] \times \left[0, -\frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r} \right]$$
$$= \frac{-\beta^* r^2}{Rr} E_1^{(f)} + \alpha^* \left(\frac{x_2}{Rr} E_3^{(f)} - \frac{x_3}{Rr} E_2^{(f)} \right) \tag{22}$$

elde edilir.

s yay parametresi olmak üzere

$$s = \int \|R_A'\| d\sigma$$
$$\Rightarrow ds = \|R_A'\| d\sigma \tag{23}$$
$$\Rightarrow ds = R d\sigma$$

yazılabilir. $\{R_A; e_1, e_2, e_3\}$ çatısının türev denklemleri

$$\frac{de_1}{ds} = k_n e_2 + k_g e_3$$
$$\frac{de_2}{ds} = -k_n e_1 + \tau_g e_3 \qquad (24)$$
$$\frac{de_3}{ds} = -k_g e_1 - \tau_g e_2$$

dır. Burada τ_g , k_g ve k_n ve sırasıyla geodezik torsiyon; geodezik eğrilik ve normal eğrilik olarak isimlendirilir. Ayrıca $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ ilişkisi mevcuttur.

A noktasında Γ_A nın eğriliği ve k_g, e_3 yönünde $\frac{d^2R_A}{ds^2}$ nin normal bileşenidir. (22) ve (24) denklemleri birleştirildiğinde

$$k_n = \frac{de_1}{ds} e_2 = \frac{r}{R^3}(\alpha^{*\prime}\beta^* - \alpha^*\beta^{*\prime} + \beta^{*2}x_3) + \frac{\alpha^*}{R^3 r}(\alpha^* x_3 + \beta^*\gamma_m x_3 + \beta^* x_1 x_2)$$
$$k_g = -\frac{de_3}{ds} e_1 = \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*2} r^2 + \beta^*(x_1 x_3 - x_2\gamma_m)}{R^2 r} \qquad (25)$$
$$\tau_g = -\frac{de_3}{ds} e_2 = \frac{\beta^*}{R^2}(x_2 + \alpha^*) + \frac{\alpha^*}{R^2 r}(x_1 x_3 - x_2\gamma_m)$$

bulunur. Artık A noktasının yörüngesi için, düzlem kinematiği içinde bilinen hareketli bir noktanın sabit düzlemdeki yörüngesinin eğrilik yarıçapını sağlayan Euler-Savary formülünü elde etmeye çalışalım.

3.1.5. Uzay Hareketinde Bir Noktanın Yörüngesine Ait Euler-Savary Formülleri

Bir noktanın Γ_A yörüngesinin özelliklerini ortaya çıkarmak için (25) denkleminde

$$D_g = \frac{[\beta^{*2} x_1^2 + (\alpha^* + \beta^*\gamma_m)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta^{*2}} \qquad (26)$$
$$\sin\theta_g = \frac{\beta^* x_1}{D_g}, \qquad \sin\theta = \frac{x_3}{R}$$

eşitliklerini alalım. (25) denkleminin ikinci bölümü

$$k_g = \frac{r - D_g\cos(\theta + \theta_g)}{r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2} \qquad (27)$$

olarak yazılabilir. $k_g = \frac{1}{\rho_g}$ olmak üzere bu denklem,

$$\rho_g \left[r - D_g cos(\theta + \theta_g)\right] = r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 \tag{28}$$

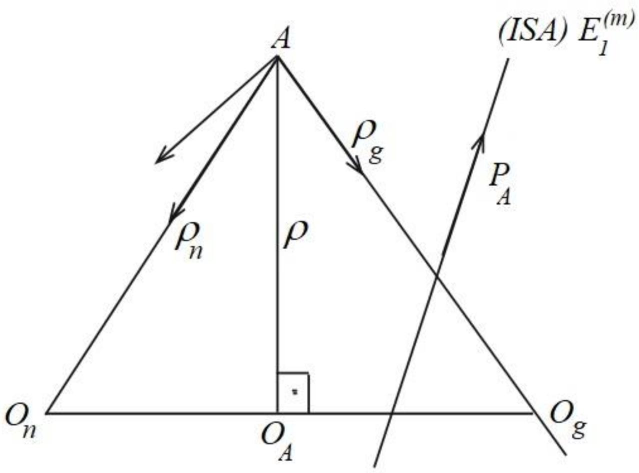
veya

$$r\rho_g \ - r^2 = \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho_g \ D_g cos(\theta + \theta_g)$$
$$\Rightarrow \frac{\rho_g}{r(\rho_g \ - r)} = \frac{\rho_g}{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho_g \ D_g cos(\theta + \theta_g)}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_g \ - r} = \frac{\rho_g}{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho_g \ D_g cos(\theta + \theta_g)} \tag{29}$$

olur.

(27) ve (29) denklemleri düzlemde Euler-Savary formülüne benzedikleri için Euler-Savary benzeri geodezik olarak adlandırılır.

Γ_A’ nın $\vec{n}$ asli normali ani vida ekseni ile genelde kesişmez ancak düzlemsel harekette kesişir. A noktasında Γ_A’ nın eğrilik merkezi O_A dır.

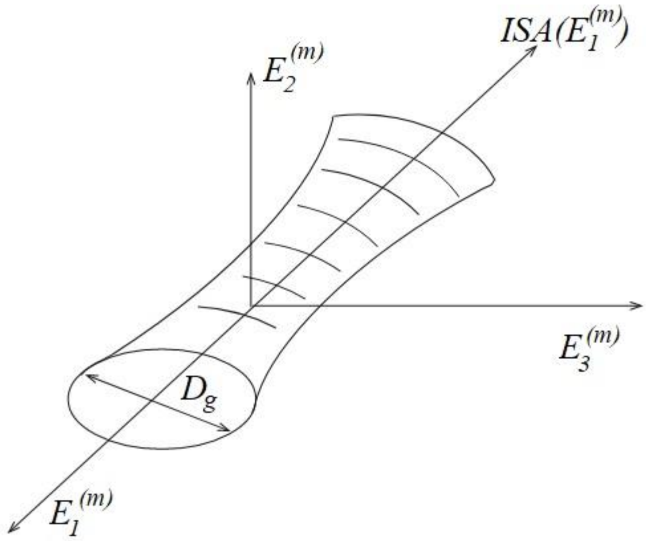


Şekil 7. Geodezik büküm noktası

Eğer hareketli cismin bir A noktasının çizdiği Γ_A yörünge eğrisinin geodezik eğriliği sıfır ise bu durumda A noktasına geodezik büküm noktası denir. Hareketli cismin bütün geodezik büküm noktalarının aşağıdaki denklemle tanımlanan yüzey üzerinde olduğunu (27) denklemi ile biliyoruz;

$$r - D_g cos(\theta + \theta_g) = 0 \quad (30)$$

Geodezik büküm yüzeyi olarak tanımlanan bu yüzey, (30) denklemini sağlayan noktalardan oluşur (Şekil 7). (26) denklemine göre (30) ile verilen D_g ve θ_g bir x_1 değeri için sabittir. Böylece (30) denklemi $E_1^{(f)}$ eksenine ortonormal $\left(E_2^{(f)}, E_3^{(f)}\right)$ düzleminde kalan ve $E_1^{(f)}$ ekseni boyunca geçen bir çember denklemidir. Bu çembere ise geodezik büküm çemberi adı verilir (Şekil 8).



Şekil 8. Geodezik büküm çemberi

Eğer $x_1 \in (-A, +A)$ alınırsa $E_1^{(f)}$ ekseninin konumundan (30) ifadesi geodezik büküm çemberlerinin bir ailesi veya geodezik büküm yüzeyi geodezik büküm çemberlerinin bir ailesi olarak düşünülebilir. Geodezik büküm yüzeylerinin ek iki özelliğini de aşağıdaki gibi bulabiliriz.

i) Geodezik büküm çemberlerinin merkezi striksiyon noktasında (ya da $x_1 = 0$) hareketli Σ_m aksoidinin normali üzerinde kalır.

ii) Bir koni olan geodezik büküm yüzeyinin üst kısmı $\alpha^* + \beta^*\gamma_m = 0$ iken Σ_m nin striksiyon noktasıdır. $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ denkleminde $k = k_g$ için $k_n = 0$ dir. Buna göre (25) denklemini tekrar

$$r^2\left(\alpha^{*'}\beta^* - \alpha^*\beta^{*'} + \beta^{*2}x_3\right) + \alpha^*(\alpha^*x_3 + \beta^*\gamma_m x_3 + \beta^* x_1 x_2) = 0$$

$$k = \frac{-\alpha^* x_2 + \beta^{*2}r^2 + \beta^*(x_1x_3 - x_2\gamma_m)}{R^2 r}$$

olarak yazabiliriz. (26) denklemi yukardaki denklemlerde yerine yazılırsa

$$0 = r\left[r\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + r^2 sin\theta + \alpha^* D_g sin(\theta + \theta_g)\right] \tag{31}$$

$$k = \frac{r - D_g cos(\theta + \theta_g)}{r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2} \tag{32}$$

olur. k eğriliği yerine ρ eğrilik yarıçapı yazılırsa (32) denkleminin diğer iki açılımı

$$\rho\left[r - D_g cos(\theta + \theta_g)\right] = r^2 + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 \tag{33}$$

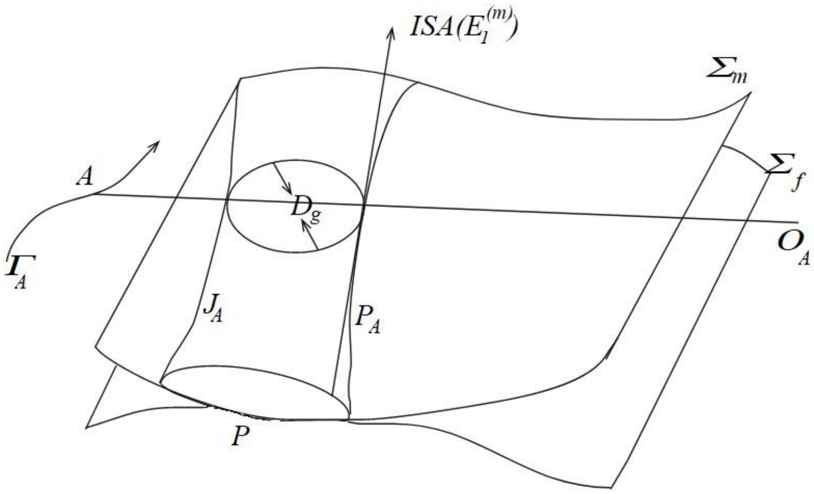
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p - r} = \frac{\rho}{\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 + \rho D_g cos(\theta + \theta_g)} \tag{34}$$

olarak yazılır.

(32)-(34) denklemlerine bir noktanın uzay hareketindeki yörüngesinin Euler-Savary benzeri formülü denir. (33) ifadesi

$$\overline{AO_A AJ_A} = \overline{AP_A^2} + \left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)^2 \tag{35}$$

olarak elde edilebilir. A, hareketli cisim üzerinde tracing point; O_A ise Γ_A yörüngesinin eğrilik merkezidir (Şekil9).



Şekil 9. Hareketli cisim üzerindeki A tracing pointi ve O_A eğrilik merkezi

$J_A; E_1^{(f)}$ eksenine dik düzlem üzerindedir ve yine bu nokta $A(x_1, x_2, x_3)$ noktasından geçer. Geodezik büküm çemberinin n ile kesişmesinin J_A' da olduğu aynı anda; P_A noktası ise Γ_A yörüngesinin asli normali ile $E_1^{(f)}$ ekseninin kesişme noktası olur.

Açık şekilde O hareketli cisim üzerinde herhangi bir nokta değildir. Bu noktanın bir anda hareketli cisim üzerinde (31) denklemiyle tanımlanan yüzey üzerinde olduğu durumda Euler-Savary benzeri formül korunur. Yani uzay hareketinde herhangi bir noktanın yörüngesi için geodezik bir Euler-Savary formülü mevcuttur. Ancak bazı noktaların yörüngeleri için Euler-Savary formülü bulunmamaktadır.

Eğer $\mathrm{k_n}$ normal eğriliği ve $\mathrm{k_g}$ geodezik eğriliği özdeş olarak sıfır ise hareketli bir cismin bir A noktası geodezik büküm yüzeyi ve (31) denklemi ile tanımlanan yüzeyin arakesit eğrisi üzerinde olmalıdır.

$\mathrm{k}^2 = \mathrm{k_n^2} + \mathrm{k_g^2}$ olduğu için A noktası aynı zamanda büküm noktası olarak tanımlanır. Eğer Γ_A eğrisi büküm noktalarından meydana geliyorsa (31), (32) denklemleri ve onların çözümleri birleştirilirse bulunan denklem (20) denklemi ile aynıdır.

Bilgi

Bu çalışma yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir [Aksakal (2008)].

Teşekkür

Yazarın yüksek lisans akademik danışmanı Sayın Prof. Dr. Rıfat Güneş' e yardımları, yönlendirmeleri dolayısıyla teşekkür ederiz.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yazar, makalenin tüm süreçlerinde "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, karşılaşılabilecek etik ihlallerden Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi ve yayın kurulunun herhangi bir sorumluluğunun bulunmadığını, bu çalışmanın Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi dışında herhangi bir akademik yayın ortamında değerlendirilmediğini beyan eder.

Kaynaklar

Bokelberg, E. H., Hunt, K. H. and Ridley,P.R., (1992). Spatial Motion-I: Points of İnflection and The Differential Geometry of Screws[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 27(1), 1-15.

McCarthy, J. and Roth, B., (1981). The Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics. *ASME Journal of Mechanical Design,* 103(4), 718-724.

Ridley, P. R., Bokelberg, E. H. and Hunt, K. H., (1992). Spatial Motion-II: Acceleration and The Differential Geometry of Screws[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 27(1), 17-35.

Sevinç, M. ve Samancı Kuşak, H., (2022). N-Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeylerin Bazı Karakterizasyonları. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi,* 12(1), 113-134.

Wang, D. L. and Xiao, D. Z., (1993). Distribution of Coupler Curves for Crank-Rocker Linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 28(5), 671-684.

Hacısalihoğlu, H. H., (1983). *Diferensiyel Geometri.* Malatya: I.Ü. Fen-Ed.Fak. Yayınları.

Sasaki, S., (1956). *Differential Geometry(in Japanese).* Tokyo: Kyolitsu Press.

Aksakal, S. Ş., (2008). *Uzay Hareketinin Diferensiyel Geometrisi Üzerine*. Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

Saçlı, G. Y., (2013). *Darboux Çatılı Regle Yüzeylerin Karakteristik Özellikleri*. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Wang, D. L., (1995). *Kinematic Diferential Geometry of Mechanisms*. Doctoral dissertation, Dalian University of Technology, Dalian.