# Matematiksel Finans

Ömer ÖNALAN*

## ÖZET

*Hisse senedi , döviz, faiz oranı, vb. gibi mallar üzerine futures ve options gibi finansal türevlerin oluşturulması, finansal risklerin düşürülmesine imkan vermektedir. Bir finansal türev oluşturmanın altında yatan temel fikir; Belirsizliğin hakim olduğu piyasada gelecekteki gelişmelere bağlı olarak ortaya çıkacak, risk ve kazancı, paylaşmaya istekli piyasa katılımcılarını bulmaktır. Bu finansal enstrümanların fiyatlandırılması , ito stokastik analizi olarak adlandırılan bir teoriye dayanmaktadır. Rassal fiyat süreci için temel model Brownian hareket ve onunla ilişkili diferansiyel denklemlerle tanımlanmaktadır. Avrupa alım opsiyonunun fiyatlandırılması için Black- Scholes (1973) ve Merton (1973) tarafından bir analitik formül verilmiştir. Onların yaklaşımı, türev menkul kıymetlerin fiyatlamasına uygun çözümler bulmak için martingale teori , ito analizi ve stokastik kontrol gibi ileri düzeydeki araçları kullanan, modern finansal matematik için sağlam bir zemin oluşturmuştur.*

***Anahtar Kelimeler:*** *Finansal türev, Brownian hareket, Black-Scholes formülü, Opsiyon , Ito stokastik analizi, Ölçümün değişimi, Girsinov dönüşümü, Martingale, Denk martingale ölçümü , arbitraj , faiz oranı, Semimartingale modelleri.*

## 1. GİRİŞ

Matematiksel finans'ın orijini , Louis Bachelier' in 29 Mart 1900' de Paris Fen Fakültesi'nde sunmuş olduğu "Theory de la Speculation " adlı doktora tezine kadar geriye gitmektedir. Finansal piyasalarda, komplex finansal ürünlerin sürekli olarak artması , hisse senedi fiyatları, faiz oranları ve döviz kurlarındaki belirsizlikler "Matematiksel Finans" olarak adlandırılan yeni bir araştırma alanının doğmasına neden olmuştur. Bu alan stokastik süreçlerin genel teorisi, kısmi türevli diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz, yatırım ve finans teorilerini içermektedir.(Black–Scholes 1973) ve (Merton 1973)'un çalışmalarından sonra, matematiksel finans alanında deyim yerinde ise tam bir devrim yaşanmıştır. Matematiksel finans, özellikle olasılık teorisi ve matematiğin en yeni başarılarından bir tanesidir.

* Yrd.Doç.Dr. Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı, İstanbul, Türkiye

Birçok matematiksel gelişme sadece o konu ile ilgili uzmanlarca bilinmekte iken , buna karşılık , Black- Scholes opsiyon fiyatlama formülü sadece finans alanındaki uygulamacılar arasında popüler olmakla kalmamış, ünü ekonomistler, ekonometriciler, istatistikçiler vb. arasında da yayılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, modern finans teorisinde kullanılan yeni matematiksel modelleri araştırmak ve teorinin finans mühendisliğinin pratiği ile nasıl bir ilişki içerisinde olduğunu göstermektir. Bu nedenle çalışmada esas olarak Black-Scholes ve Merton'un çalışmaları üzerinde odaklanacaktır. Çünkü bu çalışmalar, matematiksel finansın gelişme çizgisi içerisinde bir sıçrama noktası olmuşlardır. Bir avrupa alım opsiyonu, bir riskli malın (örneğin hisse senedi ) bir hissesini, önceden belirlenmiş bir tarihte (vade tarihi) ve önceden belirlenmiş bir fiyattan (kullanım fiyatı) alma hakkıdır (zorunluluk değil). Hemen şu soru akla gelebilir: Alıcı opsiyonu almak için ne kadar ödenmelidir? İşte Black-Scholes formülünü bu denli önemli kılan nedenlerden bir tanesi, böyle bir alım opsiyonunun fiyatını belirlemek için, analitik bir formül vermiş olmasıdır.

Black -Scholes ve Merton opsiyon fiyatlama problemine, riskli malın fiyatı için makul bir modeli kabul etmekle başlamışlardır. Böyle bir model için araştırmalar ise uzun bir geçmişe sahiptir. Mal fiyatları rassal bir şekilde değişmekte olup , büyük ölçüde kestirilemezdir.Bu gerçek rassal yürüyüş olarak adlandırılmaktadır. Rassal yürüyüş kesikli zamanlarda tanımlanmış en basit stokastik süreçtir. Buna karşılık finansta esas olarak, zamanın herhangi bir anındaki modellemesi ile ilgilenilir. Bachelier fiyat hareketlerini modellemek için Brownian hareketi kullanmıştır. Brownian hareket rassal yürüyüşün sürekli zamanlardaki karşılığıdır. Brownian hareket bir sıvı içerisinde salınan bir partikülün hareketleri için fiziksel bir modeldir (Karatzas ve Shreve, 1998).

Hisse senedi fiyatları için Bachelier' in Aritmetik Brownian hareket modelinin şöyle bir sakıncası vardır: hisse sendi fiyatları pozitif büyüklüklerle tanımlanırlar, B(t) normal dağılmış olduğundan, pozitif olasılıklarla negatif değerler alabilmektedirler. Model uzun bir süre unutulmuştur. 1965' de Samuelson, belirsizlik ortamındaki fiyatları modellemek için Brownian hareketin üstelini yani Geometrik brownian hareketi kullanmıştır. Bu durumda S(t) fiyat süreci aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi sağlar.

$$dS(t) = \mu S(t)d + \sigma S(t)dB(t) \qquad (1)$$

İto lemma kullanılarak bu denklemin çözümünün aşağıdaki şekilde olduğu gösterilebilir:

$$S(t) = S(0)e^{\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) + \sigma B(t)\right)} \qquad (2)$$

$Es(t) = S(0)e^{\mu t}$ ( $B(t) \sim N(0,t)$ ' dir.) olduğundan (2) denklemi kesinlikle S(t)>0 olduğunu gösterir. Black – Scholes ve Merton' un çalışmalarında, *Geometrik brownian hareket* , fiyat hareketleri için temel matematiksel modeldir (Pliska, 1997).

Onlar derin bir matematiksel teori olan , *Ito analizi* ile Brownian Hareketin yakın ilişkisi olduğunun da farkına varmışlardır. Teoriye *Ito Analizi* ismi 1940' lı yıllarda bu teoriyi geliştirmiş olan Japon matematikçi Kiyosi Ito' nun adına izafeten verilmiştir. Klasik analiz, düzgün fonksiyonların diferansiyeli ve integrasyonu hakkındadır. Buna karşılık Brownian hareketin eğrileri, oldukça düzensiz ,üstelik diferansiyellenemez fonksiyonlardır ve bu nedenle, Brownian hareket için klasik analiz , uygun bir araç değildir (Roger ve Williams, 2000). Opsiyon fiyatlandırma formülünün esas katkısı, ekonomik alanda yeni bir fikir olmasıdır.

Opsiyonun vade zamanındaki değerini karşılayan bir ticaret stratejisine *korunma* (hedge) denir. Böyle bir korunmanın varlığı opsiyonun fiyatı için haklı bir nedendir. Fakat o, finansın pratiği için kendi içinde önemlidir. Bir opsiyon satıcısının , onun korunması için yatırmak zorunda olduğu para miktarı, opsiyon için adil bir fiyat olmalıdır. Ayrıca Black-Scholes ve Merton şu fikirdedir; Eğer opsiyon Black-Scholes fiyatından başka bir fiyatta satılmış olursa, rasyonel bir kişi bu gerçeği riske girmeksizin (arbitraj) sınırsız kar yapabilmek için kullanabilmelidir. Baz matematiksel modelin çeşitli eksiklerine rağmen Black-Scholes yaklaşımı, finansal türevlerin diğer türlerinide fiyatlamak için bir başlangıç olmuştur(Shimpi, 1999).

Bir finansal türevin esas amacı ; "***Riskin menkul kıymetleştirilmesi***"dir. Black- Scholes yaklaşımı, özel olarak fiyatlandırılmış bir türevin satıcısının ve alıcısının, fiyat hareketlerinin belirsizliği yüzünden ortaya çıkacak olan gelecek riskleri hedge etmelerine müsaade eder. Finansal ürünlerin gittikçe büyüyen yelpazesi özellikle 1970' lerin sonundan itibaren matematiksel finansın en gelişmiş kavramsal araçlarla donanmasını sağlamıştır. Martingale Teori , Stokastik Kontrol, Kısmi Diferansiyel Denklemler bunlardan bir kaçıdır(Karatzas ve Shreve 1998), (Björk 1997).

Açıkça Black-Scholes dünyası; *Reel finansal dünyanın bir idealleştirmesidir*. Örneğin bir riskli malın fiyatı için Geometrik brownian hareketin matematiksel varsayımının reel dünyadaki fiyat verileri ile çeliştiği bilinmektedir. Çünkü hisse senedi piyasası şoklarla (politik olaylar, krizler vs.) sarsılmakta ve sonuçta beklenmeyen fiyat sıçramaları olmaktadır. Böyle bir davranış Black- Scholes dünyasında olmaz. Matematiksel formüller, finans alanındaki rasyonel kararlarda bize yardımcı olabilir(Hull, 1997) , (Baxter ve Rennie, 1996) , (Neftçi, 1996).
Çeşitli formlardaki finansal risklerin ölçümü ve tahmin edilmesi matematiksel finansta yeni gelişmelere yol açmıştır. Finansal riskleri sayısallaştırmak için çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Bunlar arasında (Value -At Risk (VAR) ) " Riskin Değeri" en popüler olanıdır(Stampi, 1999).

## 2. FİNANSAL TÜREVLERİN FİYATLANDIRILMASI

### 2.1. Black-Scholes ve Merton Yaklaşımı

$P_t$ bir riskli malın fiyatını göstersin . Bir hisse senedinin fiyatı Geometrik brownian hareketle tanımlanır.

$$P_t = P_0 \exp\{\sigma B_t + \mu t - 0{,}5\sigma^2 t\} \tag{3}$$

$\{B_t ; t > 0\}$ bir Brownian harekettir.( Sürekli örneklem eğrili, durağan bağımsız artmalı bir Stokastik süreçtir. Öyle ki, $B_t$ sıfır ortalamalı ve t varyansı ile bir normal dağılıma sahiptir.)

$\mu$ : Getirinin ortalaması

$\sigma > 0$: Oynaklık ( Volatilite)

Bilhassa, sabit t için $P_t$ bir lognormal dağılıma sahiptir, daha büyük $\sigma$, $P_t$' nin onun ortalama değeri olan $\exp\{\mu t\}$ civarında daha güçlü salınması demektir. Böylece $\sigma$, fiyatın değişkenliğinin derecesini belirler. Alternatif olarak, $P_t$ aşağıdaki Ito Stokastik Diferansiyel Denklemini (SDD) sağlar.

$$dP_t = P_t[\mu\, dt + \sigma\, dB_t] \tag{4}$$

Yukarıdaki SDD, *Ito İntegral Denklemi* olarak yorumlanmalıdır.

$$P_t = P_0 + \mu \int_0^t P_s\, ds + \sigma \int_0^t P_s dB_s \tag{5}$$

Yukarıdaki ilk integral Riemann integrali'dir. İkinci integral bir Ito integralidir. Bunun anlamı şudur: O toplamların limitini temsil eder:

$$\int_0^t P_s dB_s \approx \sum_i P_{t_{i-1}}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] \tag{6}$$

burada, toplam $n \to \infty$' da $\max_i(t_i - t_{i-1}) \to 0$ ile [0,t] aralığının herhangi bir $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_{n-1} < t_n = t$ parçalanması boyunca alınmıştır. Brownian hareketin eğrileri sınırsız varyasyona sahip olduğundan Riemann- Stiltjes integraline benzemez, limit sabit bir Brownian eğri boyunca alınmayabilir, fakat karelerin ortalaması durumunda bunu yapabiliriz. Ito integrallarinin tanımı için kritik nokta şudur; (6) ' in sağ tarafındaki toplam beklenilmeyen bir şekilde kurulmuş olmalıdır. Yani integrand zaman aralıklarının başında alınmalı ve onun geometrik brownian hareketin gelecek değerlerine bağlı olmadığı kabul edilmelidir. Yani fiyat gelecek değerlerine bağlı değildir.

$r > 0$ risksiz faiz oranı ile "*Risksiz Mal*" (Hazine Bonoları) ın değeri $\beta_t$ aşağıdaki gibi değişir.

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}$$

t- zamanında portföy $\mathbf{a_t}$ (pay) hisse senedi ve $\mathbf{b_t}$ miktar bonodan oluşmaktadır.($a_t$, $b_t$ herhangi bir reel değer olabilir; $a_t$ nin negatif değeri, hisse senedinin kısa satışına karşılık gelir, $b_t$ nin negatif değeri ise, risksiz faiz oranı r oranından borçlanmayı gösterir.)

Şuhalde portföyün değeri,

$$V_t = a_t P_t + b_t \beta_t$$

olur.Kritik varsayım şudur; $(\mathbf{a_t}, \mathbf{b_t})$ *ticaret stratejisi* **"kendini finanse eden"** dir:

$$dV_t = a_t dP_t + b_t d\beta_t \tag{7}$$

Yani servetteki değişimler , tamamen fiyatlardaki değişimler yüzündendir. Son denklem Ito anlamında yorumlanırsa,

$$V_t = V_0 + \int_0^t a_s \, dP_s + \int_0^t b_s \, d\beta_s$$

olur.Burada ilk integral (6)' e benzer şekilde tanımlanmıştır. T - vade zamanında, Avrupa alım opsiyonunun değeri, K kullanım fiyatı ile aşağıdaki şekilde verilir:

$$(P_T - K)^+ = \max(0, P_T - K)$$

Avrupa satım opsiyonu ise $(K - P_T)^+$ şeklinde tanımlanır. Bir opsiyonun nihai değeri, tam brownian eğri üzerine dayanabilir. Örneğin bir Asya alım opsiyonu $\left(T^{-1}\int_0^T P_s ds - K\right)^+$ , lık bir ödemeye sahiptir. Böyle bir kontrat tipik olarak petrol piyasasında kullanılabilir. Bir finansal türevin değeri vadeye kadarki $P_t$ fiyatının gelişimine bağlı olan bir H rassal değişkenidir. Bir finansal türevi değerlemek için klasik yol şunu kabul etmektir: $V_t$, $P_t$ ve t' nin düzgün bir fonksiyonu olarak gösterilebilir:

$$V_t = u(T - t, P_t) \quad \text{öyle ki,} \quad V_T = u(0, P_T) = H$$

Yani, türev menkul kıymet sadece vade zamanındaki fiyata bağlıdır. İto analizinin zincir kuralının bir uygulaması , Ito formülü veya Ito lemma (7) ile birleştirilirse aşağıdaki kısmi diferansiyel denkleme yol açar:

$$u_t(t,x)=0{,}5\sigma^2x^2u_{xx}(t,x)+rxu_x(t,x)-ru(t,x),\quad u(0,x)=H,\quad x>0\quad t\in[0,T]$$

Avrupa alım opsiyonu için yani $H=(P_T - K)^+$ için, sonraki denklem aşağıdaki çözüme sahiptir.

$$u(t,x)=x\Phi(g(t,x))-Ke^{-rt}\Phi(h(t,x)),$$

burada,

$$g(x,t)=\left[\sigma^2t\right]^{-0.5}\left[\log(x/K)+\left(r+0{,}5\sigma^2\right)t\right]$$

$$h(t,x)=g(t,x)-\sigma t^{0,5}\qquad \text{ve}\qquad \Phi(x)=[2\pi]^{-0,5}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

standart normal dağılımdır. $(P_T-K)^T$ finansal türevinin Black- Scholes fiyatı portföyün sıfır zamanındaki değeridir. Yani,

$$V_0=u(T,P_0)=P_0\Phi(g(T,P_0))-Ke^{-rT}\Phi(h(T,P_0))\tag{8}$$

Bir kendini finanse eden strateji $(a_t,b_t)$, bir korunma, u(t,x) fonksiyonundan türetilebilir.

### 2.2. Ölçümün Değişimi İle Fiyatlama

Yukarıdaki yaklaşım, belirli bir objenin hareketlerini, uygun diferansiyel denklemleri çözerek tanımlamak isteyen bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımın yeni boyutu, fiyat hareketinin yörüngesinin belirsizliğidir. Bununla birlikte, fiyatlama problemine pür bir probabilistik yaklaşım vardır. Bu yaklaşım ilk olarak (Harrison ve Pliska,(1981))' in çalışmalarında görülmüştür. Bu çalışmalarda , martingale ile olan ilişki ortaya konulmuştur.

Harrison ve Pliska yaklaşımı şu avantaja sahiptir ; H finansal türevi T zamanına kadarki tam fiyat hareketlerine bağlı olabilir. Onlar şunu gözlemişlerdir: Ito' nun gösterim teoremine göre, geometrik brownian hareketin "her " iskonto edilmiş türevi stokastik integral gösterimine sahiptir:

$$e^{-rT}.H=H_0+\int_0^T a_t^{(H)}d\left[e^{-rT}.P_t\right]\tag{9}$$

$H_0$: bir sabit ve, $a_t^{(H)}$ : t- zamanında , yanlızca t - zamanına kadarki fiyat hareketlerine bağlı süreçtir.

**Sonraki adım:** $\left(e^{-rt}.P_t\right)$ iskonto edilmiş fiyatı, denk bir martingale ölçümü altında, bir martingale dönüştürebilir. Martingale notasyonu , olasılık teorisinde , bir adil oyunu tanımlamak için kullanılır. Aşağıdaki anlama sahiptir;

Kabul edelim ki , oyun t- zamanında $M_t$ değeri ile sürekli oynanmaktadır. t- zamanına kadar ki informasyon $F_t$ ile gösteriliyor. (F-$\sigma$ cisimlerinin artan bir ailesi "filtrasyon" olarak adlandırılır.) Eğer $F_t$ informasyonu verilmiş olduğunda h>0 , $M_{t+h}$ gelecek değerlerin beklenen değeri t zamanındaki oyunun değeri ise oyuna *Adil Oyun* denir. Bunun anlamı şudur: Oyunun $M_{t+h}$ gelecek değerlerinin (karelerinin ortalaması anlamında) en iyi kestirimi, şu anki değer $M_t$ dir. Bunu olasılık teorisinin terimleriyle ,

$$E\left(M_{t+h} \middle| F_t\right) = M_t \tag{10}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu son beklenti, verilmiş olan P ihtimaline göre alınmıştır.Geometrik brownian hareket durumunda , P için doğal bir seçim **Weiner Ölçümü** dür. Bu ölçüm altında $\left(e^{-rt}.P_t\right)$, r , faiz oranı ve $\mu$ ortalama getiri oranı uygun bir şekilde seçilmedikçe $(F_t)$ filtrasyonuna göre, bir martingale değildir. Bununla birlikte, eğer P tek bir şekilde belirlenmiş P' ye denk bir ihtimal ölçümü olan Q ile değiştirilirse ,

$$\tilde{B}_t = B_t + [\mu - r]\sigma^{-1}t$$

"yoğunluklu" Brownian hareket, standart Brownian harekete dönüşür. Ölçümün bu değişimi teorik olarak **Girsinov dönüşümü** olarak adlandırılır. Q altında , $\left(e^{-rt}P_t\right)$ süreci $(\tilde{B}_t)$ brownian harekete göre bir Ito gösterimine sahiptir. Bilhassa o bir Martingale' dir ve Q Martingale ölçümü olarak adlandırılır. Q altında , (9) deki stokastik integral "sıfır" ortalamaya sahiptir ve böylece sıfır zamanındaki $H_0$ adil fiyatı için basit bir ifade elde edilebilir:

$$H_0 = E_Q\left(e^{-rT}.H\right) \tag{11}$$

$E_Q(X)$ : X rassal değişkeninin Q ihtimal ölçümüne göre beklentisidir. Black-Scholes durumunda : Her bir H fidansal türevin degeri için tek bir fiyat vardır. H mükemmel bir şekilde hedge edilebilir veya yenilenebilir. Realite ise çoğunlukla bu kadar güzel değildir: "işlem maliyetleri", "Portföy kısıtları" vardır. Fiyat süreçleri tipik olarak, rassal sıçramalar gösterirler. Bu durumda fiyatlama (yani Q) tek değildir ve H mükemmel bir biçimde Hedge edilmeyebilir. Minimum - varyans , quantile veya süper hedge gibi notasyonlar böyle piyasalarda H' ın mükemmel hedgesinin imkansız olduğuna işaret eder.

## 3. FAİZ ORANI MODELLERİ

Faiz oranı piyasası, bugünkü paranın değerinin, o paranın gelecekteki değeri ile nasıl ilişkili olduğunu bize söyler. Hisse senedi fiyatları , döviz kurları ve hisse senedi endeksinde olduğu gibi, faiz oranlarının da gelecek değerleri belirsizdir ve stokastik süreçlerle modellenirler. Bir hisse senedi fiyatına karşıt olarak, bir $r_t$ faiz oranının , üstel bir şekilde ortalamanın üstünde büyümesini bekleyemeyiz. Fakat bunun yerine; sabit bir değer etrafında makul bir aralıkta dalgalanmasını bekleriz.

Ayrıca geometrik brownian hareket, bu konuda kesinlikle iyi bir model değildir. $r_t$' nin t zamanındaki dalgalanmasına ***ani*** veya ***kısa oran*** denir. O doğrudan gözlenememesine rağmen onun ile çalışmak uygundur. (pratikte $r_t$' nin tahminleri profesyonel kurumlarca yapılır.) ($B_t$) Brownian hareketi tarafından idare edilen SDD' lerin çözümü olarak, $r_t$ için çeşitli modeller önerilmiştir. Standart Modeller aşağıdadır:

Ho- Lee Modeli : $d r_t = \sigma dB_t + \theta_t dt$

Vasicek Modeli : $d r_t = \sigma dB_t + (\theta - \alpha r_t)dt$

Cox-Ingersoll ve Ross Modeli : $dr_t = \sigma_t \sqrt{r_t}\, dB_t + (\theta - \alpha_t r_t)dt$

Burada $\sigma, \alpha, \theta$ sabitlerdir. $\theta_t, \sigma_t, \alpha_t$: Deterministik fonksiyonlardır.

Temel bir faiz yükümlülüğünü gösteren menkul kıymet iskonto veya 0 kuponlu tahvildir. 0 vadeye kadar herhangi bir ödeme yapmaz ama vadede 1 birimlik ödemeyi garanti eder. Temel soru şudur: Bu malın t<T zamanındaki değeri nedir?

Bir sıfır kuponlu tahvilin t<T zamanındaki fiyatını P(t,T) ile gösteriyoruz. Açıkça, P(T,T) = 1 birim dır. Böylece bir sıfır kuponlu tahvilin fiyatı, iki tarihe bağlıdır. Eğer $r_t$ faiz oranı bir sabit olmuş olsaydı, $r_t = r > 0$ , bir hazine bonosunun t<T zamanındaki fiyatı aşağıdaki şekilde olmalıydı:

$$P(t,T) = e^{-(T-t)r} = \exp\{-(T-t)R(t,T)\} \qquad (12)$$

burada,

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s\, ds \qquad (13)$$

Sabit olmayan $r_t$ için , R(t,T) ***ortalama faiz oranı*** dır. Sabit T vadesi için t' nin bir fonksiyonu olarak düşündüğünüz zaman ona verim (Yield) denir. Değişken T vadeler ve sabit t ise *verim eğrisi* olarak adlandırılır. Verim eğrisi bize, piyasanın vade yapısı hakkında birşeyler söyler. Yani, T'nin bir fonksiyonu olarak, tahvillerin ortalama getirisi hakkında birşeyler söyler. Tahviller ve tahvil opsiyonlarını fiyatlamak için P(t,T)' nin başka bir gösterimini kullanmak kullanışlı olabilir:

$$P(t,T)=\exp\left\{-\int_t^T f(t,u)du\right\} \tag{14}$$

f(t,u) : Forward oran' dır. O aşağıdaki eşitliği sağlayan , u , zamanındaki ani borçlanmanın forward fiyatıdır.

$$f(t,T)=R(t,T)+(T-t)R_T(t,T) \quad \text{ve} \quad f(t,t)=r_t \tag{15}$$

f(t,T) forward oranları verilmiş olduğunda, birisi P(t,T) fiyatlarını ve R(t,T) verimlerini geri elde edebilir. Güçlü bir faiz oranı modeli, Heath, Jarrow ve Merton Modelidir:

$$\text{Heath-Jarrow-Morton Modeli : } df(t,T)=\sigma(s,T)dB_t+\alpha(s,T)dt \tag{16}$$

$\sigma(t,T)$ ve $\alpha(t,T)$ oynaklıklar olup, t- zamanına kadarki oranlara ve Brownian hareketin geçmişine bağlı olabilir. Faiz oranını fiyatlamak için birçok model, hisse senedi modellerinden alınmıştır. Kendini finanse eden bir H finansal türevin değerinide hedge etmek için bir "riskli" bir de "risksiz" maldan oluşan bir portföy oluşturma fikrinde olduğu gibi "risksiz mal" "nakit bono" ile gösterilsin ve aşağıdaki değere sahip olsun.

$$B_t=B_0\exp\left\{\int_0^t r_s\,ds\right\} \tag{17}$$

$(r_t)$ bir stokastik süreç olduğunda, $B_t$' de bir belirsizlik söz konusudur ve $B_t$ risksiz değildir. Riskli mallar, $\theta \leq T$ vadeler ile sıfır kuponlu tahvillerdir. Bir sıfır kuponlu tahville ilişkilendirilmiş H finansal türev değerinin fiyatlandırılması nakit ve sıfır kuponlu tahvillerin portföyü için $(a_t, b_t)$ kendini finanse eden bir stratejiye dayanmaktadır.

$$V_t=a_tP(t,T)+b_tB_t \;,\quad t\leq\theta \quad \text{ve} \quad \forall\,\theta=H,\;\; \theta<T \tag{18}$$

Hisse senedi modellerinde olduğu gibi , bir Q denk martingale ölçümü bulunabilir. Öyleki Q altında $\theta<T$ vadeli H finansal türevin değeri için adil fiyat $B_0\,E_Q\left[B_\theta^{-1}H\right]$ ile verilir. Bununla birlikte, bir denk martingale ölçümünün bulunması problemi çok komplekstir. Çünkü $\theta \leq T$ vadelerinin sayısı sonsuzdur ve Q, $\theta$' ya bağlı olmamalıdır. Bu nedenle her $\theta \leq T$ için P' ye denk bir Q ihtimal ölçümünün varlığı için uygun varsayımlara ihtiyaç vardır. Öyle ki, Q ölçümü altında $B_t^{-1}P(t,\theta)$ , $t\leq\theta$ bir martingale' dir.

## 4. FİNANSAL ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

Türevleri fiyatlandırmak için, sürekli zamanlı modelleri kullanmak kullanışlıdır. Ayrıca teorik argümanlar şunu söyler, bir portföy , eğer sadece kesikli zaman anlarındaki fiyatlar biliniyorsa, hedge edilemeyebilir.

Bununla birlikte "finansal zaman serisi modellerini düşünmek için birçok başka neden vardır. $X_0$ , $X_1$,....... (zaman birimlerinin seçimi serbesttir: saniye, dakika, ay, hafta,... vb.)

Gerçek hayattaki veriler sürekli toplanmazlar, bunun yerine kesikli zaman noktalarında toplanırlar ve bir istatistiksel modele uydurularak, verilerin mekanizması anlaşılmaya çalışılır. Bir teorik modelin, gerçek hayat verisine iyi uygunluğu , serinin gelecek değerlerini kestirmemize imkan verir. Finansal zaman serisinin analizinde, $P_t$ , t=0,1,2,...........(öyle ki, hisse senedinin günlük fiyatları, günlük kurlar vb.) gibi fiyat serileri "log – getiri" lere dönüştürülürler.

$$X_t = \log(P_t/P_{t-1}) = \log\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right), \quad t = 1,2,........ \tag{19}$$

Bu dönüşümün esas amacı; fiyatları , onların birimlerinden bağımsız kılmak ve onların birini diğeri ile kıyaslamaktır. Ayrıca şuna inanılır, $P_t$ fiyatlarına karşılık olarak Log- getiri $X_t$ bir "Durağan süreçle" modellenebilir (Yani, durağan süreç, zaman değişse bile karakteristikleri değişmeyen bir süreçtir.). Durağanlık, klasik zaman serisi analizinde temel varsayımdır. Deneysel araştırmalar şunu göstermiştir ki, döviz kuraları, hisse senedi fiyatları,hisse senedi endeksleri vb.' nin Log- getiri serileri bir takım ortak özelliklere sahiptirler. Bunları aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

•$X_t$ 'nin çok küçük ve çok büyük değerleri, bir Gaussian beyaz gürültü dizisinden çok daha sık ortaya çıkar. Bunun anlamı şudur; Log-getirilerin dağılımı "Kalın kuyruklu" dur. Yani, $P(X_t \leq -x)$ ve $P(X_t > x)$ kuyrukları x' in büyük değerleri için, normal dağılımın değerleri ile kıyaslandığı zaman ondan daha şişmandır. Bu özellik şunu gösterir kayıplar ( kazançlar) normal dağılım varsayımı altında beklenenden çok daha fazla olabilir.

•$X_t$' lerin örneklem otokorelasyonları, birkaç yıllık zaman serileri için bile, hemen hemen tüm gecikmelerde önemsizdir. Daha uzun zaman serileri için $|X_t|$ mutlak değerler ve $X_t^2$' lerin örneklem otokorelasyonları ,sıfıra' a doğru yavaşça bozulur. Bu şunu gösterir: $X_t$ değerlerinin biri diğeri ile ilişkisizdir.( beyaz gürültü) bundan başka ($|X_t|$) ve ($X_t^2$)' nin ağır bir şekilde bağımlı olduğunu gösterir. Bu durumda, zaman serisinde ***Uzun vadeli bağımlılık*** veya ***Uzun hafıza*** ' nın varlığı söz konusudur.

•$X_t$' nin büyük ve küçük değerleri, bağımsız rassal değişkenlerin bir dizisi için beklenildiği gibi, zamanla ayrı ayrı oluşmaz (ortaya çıkmaz). Fakat bunun yerine Clurters (kümelenmeler, kümeler) halinde ortaya çıkar. Yani, $X_t$' nin olağan olmayan büyük/ küçük bir değeri ortaya çıkarsa, bununla kıyaslanabilir büyüklükte çeşitli değerleri kısa bir zaman sonra ortaya çıkar.

Finansal zaman serilerinin analizinin amacı : Log- getirilerin yukarıda ifade edilmiş olan ve diğer özelliklerini, fiziksel bir modelle açıklamaktır. Fakat aşağıda tanımlanmış olan standart modellerin hiçbiri tüm gerçekleri kapsamamaktadır. Log-getiriler için standart bir model aşağıdaki formda verilebilir:

$$X_t = \mu + \sigma_t z_t \quad , \quad t = 0,1,2,......... \tag{20}$$

$\mu$ : Bir sabit

$\sigma_t$ : Geçmiş $X_s$ log- getirilerin bir fonksiyonu

$z_s$ : Geçmiş gürültü (noise) değişkeni

$\sigma_s$ : Geçmiş oynaklıklar

Notasyonu basitleştirmek için $\mu = 0$ olduğunu kabul ediyoruz. $\sigma_t$ oynaklığının $z_t$' den bağımsız olduğu ve $(z_t)$' noise' sinin 1 varyansı ile bağımsız aynı dağılmış simetrik rassal değişkenlerinin bir dizisi olduğunu kabul ediyoruz. Simetri şu düşünceyi ifade eder; Bir kişi gelecek fiyat dönüşümlerinin pozitif veya negetif olduğunu kestiremez. $\sigma_t$ için birçok model arasından iki tanesi popüler olmuştur (Taylor, 1986).

a) Genelleştirilmiş otoregresif şartlı hetereskedostite (GARCH)
b) Stokastik volatilite süreci

GARCH modelleri (5) ile verilirler ve rekürans denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{21}$$

$\alpha_i$ ve $\beta_j$'ler negatif olmayan parametreler $z_t$ standart normal dağılım için, $X_t$' nin şartlı dağılımıdır.

## 5. FİNANSAL GETİRİLERİN SEMIMARTINGALE MODELLERİ

Arbitrajsız fiyat süreçleri özel semimartingaleler sınıfına aittir. Bu süreçler, getirinin, bir lokal martingale "kestirilemez" değişimi gösterirken, sonlu varyasyonlu süreç, ani ortalama getiriyi ifade eden deterministik yoğunluğa sahiptir. (Black 1991) Formal olarak pozetif bir T tamsayısı ve $t \in [0,T]$ için, $F_t$, $F_s \subseteq F_t$ , $0 \leq S \leq t \leq T$ olacak şekilde, t- zamanı kadarki informasyonu ifade eden bir $\sigma$ cismi olsun . P ise $(\Omega, P, F)$ üzerindeki olasılık ölçümünü gösterir.Burada $\Omega$ çalışılan evrendeki tüm mümkün durumlardır ve $F \equiv F_T$ ,$T$ zamanında ayrıştırılabilir olayların kümesidir.

Ayrıca $(F_t)_{t\in[0,T]}$ enformasyon süzgecinin, P' nin tamlığı ve sağ süreklilik gibi olağan şartları sağladığını kabul ediyoruz.

Herhangi bir arbitrajsız logaritmik fiyat süreci $P_k$ ve onun [0,t] aralığındaki bileşik getirisi aşağıdakişekilde gösterilebilir;

$$P_k(t) - P_k(0) = M_k(t) + A_k(t) \tag{22}$$

Burada, $M_k(0) = A_k(0) = 0$, $M_k$ bir lokal martingale ve $A_k$ lokal olarak integrallenebilir ve sonlu varyasyonun kestirilebilir bir sürecidir. (22) formülasyonu çok genel olup, standart mal fiyatlama teorisinde kullanılan tüm spesifikasyonları içerir. Örneğin Ito , Sıçrama, Karma Sıçrama- Diffüzyon süreçleri gibi tüm süreç leri içerir ve Markov varsayımınıda gerektirmez (Rogers, Williams,2000), (Comte ve Renault, 1998). (22) denklemindeki herhangi bir bileşenin *cadlag* (sol limitlerle sağ sürekli) olduğunu kabul edebiliriz. Bunu $P_k$ ile gösterip,

$$P_{k^-}(t) \cong \lim_{s\to t} P_k(s) \quad , \quad \forall t \in [0,T] \text{ ve sıçramaları , } \Delta P_k(t) \equiv P_k - P_{k-} \text{ veya}$$

$$\Delta P_k(t) \equiv P_k(t) - \lim_{s\to t} P_k(s) \tag{23}$$

şeklinde tanımlarız. Arbitrajın yokluğundan dolayı sıçramaların oluşumu ve büyüklüğü kestirilemezdir, böylece $M_k$ herhangi bir sonsuz varyasyon bileşeni boyunca $P_k$' nin sıçrama bileşenini içerir. Ayrıca $A_k$ sürekli örneklem eğrilerine sahiptir. $M_k$ yi de bir çift, lokal martingale olarak ayrıştırabiliriz. Öyle ki bunlardan biri sürekli ve sonsuz varyasyonlu kısım $M^C$, diğeri de sonlu varyasyonlu kısım $\Delta M$ dir (Jacod Shiryaev,1988). Sıçrama bileşenini $M_k = M_k^c + \Delta M_k$ ile gösterirsek, (22) denklemi şu hali alır.

$$P_k(t) - P_k(0) = M_k^c(t) + \Delta M_k(t) + A_k(t) \tag{24}$$

Son olarak, getiri için formal bir notasyon veriyoruz. Birim aralığı 1 ticaret gününe normalleştirelim . Bir M.T. pozitif tamsayı için, örneklenmiş fiyatlarla elde edilen getirilerin sayısı, m çarpı gündür. Bu durumda k- malının [t-1/m , t] aralığındaki getirisi ;

$$r_{k,(m)}(t) \equiv P_k(t) - P_k(t - 1/m) \quad , \quad t = 1/m, 2/m, \ldots, T \tag{25}$$

olur. Böylece , m>1 olması yüksek sıklıktaki gün içi getiriye karşılık gelir. m<1 olması gün içindeki getiriyi gösterir.

## 6. SONUÇ

Bu çalışmada esas olarak, piyasaların globalleşmesi sonucu artan finansal riskler ve menkul kıymet fiyatlarının rassal davranışının modellenmesi konusu araştırılmaktadır. Riskleri azaltmak amacıyla hisse senedi , döviz, faiz oranı vb. mallar üzerine opsiyon , forward, future, swap ve egzotik opsiyonlar gibi finansal türevler kullanılmaktadır. Bir türev menkul kıymet oluşturmanın temel mantığı, rassal koşulların hakim olduğu menkul kıymet piyasasında , gelecekte ortaya çıkacak gelişmelere bağlı olarak, risk ve kazancı paylaşmaya istekli yatırımcıları karşı karşıya getirmektir. Finansal menkul kıymetlerin fiyat davranışları , genel olarak bir semimartingale çatısı altında analiz edilebilmektedir.Faiz oranlarının da stokastik süreç olarak analizi oldukça genel bir yaklaşım sunmaktadır.

## KAYNAKLAR


BACHELIER, L.(1900), *Theorie de la Speculation*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. III- 17,21-86, Translated In : COOTNER P. H. (Ed.) (1964). The Random Character of Stock Market Prices p.p. 17-78 .MIT Press, Cambridge , Mass.

BAXTER, M. and RENNİE, A. (1996), Financial Calculus*: An Introduction to Derivative Pricing* , Cambridge University Press, Cambridge.

BJÖRK, T.(1997), *Interest Rate Theory, In : Brais*, B. (Ed.) Financial Mathematics Lecture Notes in Math. 1656. p.p. 53- 122, Springer, Berlin.

BLACK, F. and SCHOLES, M.(1973*), The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Political Economics, 81, 384 – 404.

BOLLERSLEV, T. CHOU, R.Y. and KRONER, K.F., (1992), ARCH Models in Finance: *A Review of The Theory and Evidence*, J. Econometric, 52, 5- 59.

EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. and MIKOSCH, T. (1997*), Modelling External Events for Insurance and Finance, Springer*, Berlin .

HARRISON, M.J. and PLISKA, S. R. (1981), *Martingales and Stochastic Integrals in The Theory of Continuous Trading*, Stoc. Proc. Appl. , 11, 215- 260.

HEADH, D., JARROW, R. and MORTON, A.(1992), *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates* ; A New Methodology for Contingent Claims Valvation, Econometrica 60, 77-105.

HULL, J. (1997), *Options, Futures and Other Derivatives, 3rd Ed.* Printice Hall, Englewood Cliffs.

JACOD, J. and SHIRYAEV, A.N.(1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

KARATZAS, I. and SHEREVE, S.E. (1998) *Methods of Mathematical Finance, Springer ,Newyork* .

MERTON, R.C.(1973), *Theory of Rational Options Pricing*, Bell J. Econ. Manag.Sci. 4, 141-183

PLISKA, S.R. (1997), Introduction to Mathematical Finance: *Discrete Time Models*, Blackwell, Malden (MA).

ROGERS, L.C.G. and WILLIAMS, D. (2000), Diffusions, Markov Processes and Martingales: *Foundations*, Cambridge (UK).

SAMUELSON, P.A.(1965), *Rational Theory of Warrant Pricing*, Industrial Management Rewiev, 6, 13-31.

SHIMPI, P.A. (Ed.) (1999) , *Integrating Corporate Risk Management.*, Swiss Re Markets, Zurich.

TAYLOR, S.J. (1986). *Modelling Financial Time Series*, Wiley, Chichester.

## Mathematical Finance

### ABSTRACT

*The introduction of financial derivatives such as futures and options on underlying as stock , currencies ,interest rate etc. makes possible to decreasing of financial risks. The basic idea of a financial derivative production ; to find participants in the market who are willing to share the risks and profits of future developments in the market which are subject to uncertainty. The pricing of these financial enstruments is based on an advenced mathematical theory , called Ito stochastics calculus . The basic model for a random price processes is described by Brownian motion and releted differential equations . An analitical formula for pricing of European call option was given by Black - Scholes (1973) and Merton (1973). Their approach has become the firm basis for modern financial mathematics which uses advenced tools such as martingale theory , Ito calculus and stochastics control , to find adequate solutions to the pricing of derivative securities*

***Key Words:*** *Financial derivatives, Brownian Motion, Black-Scholes Formula, Option, Ito Stochastic Analysis, Change of Measure, Girsanov Transformation, Martingale, Equvalent Martingale Measure, Arbitrage, Interest Rate, Semimartingale Models.*