Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
Ondokuz Mayis University Journal of Education Faculty
http://omu.dergipark.gov.tr/omuefd

Araştırma/Research
DOI: 10.7822/omuefd.310076

OMÜ Eğitim Fakültesi Dergisi /
OMU Journal of Education Faculty
2018, 37(1), 97-115

Matematik Öğretmeni Adaylarının Ters Örnek Üretme Becerileri[1]

Muhammet DORUK[2], Abdullah KAPLAN[3]

Çalışmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının ters örnek üretme becerilerini ortaya çıkarmaktır. Nitel araştırma yaklaşımının benimsendiği çalışma, bir durum çalışmasıdır. Çalışmanın katılımcıları Türkiye'de bulunan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfında öğrenim gören sekiz öğretmen adayıdır. Katılımcıların seçiminde ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınmıştır. Çalışma, farklı akademik başarı düzeyinden iki grup öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Çalışmanın verileri etkinlik temelli klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Öğretmen adayları ile fonksiyonlar, diziler, limit-süreklilik ve türev konularında hazırlanan mülakat formları kullanılarak dört kez görüşülmüştür. Mülakatlarda öğretmen adaylarına doğruluklarını değerlendirmeleri ve verdikleri kararların doğruluğunu göstermeleri için dört adet yanlış önerme sunulmuştur. Öğretmen adaylarının önermeler için ürettikleri ürünler içerik analizi ile incelenmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının yanlış önermeleri seçmede zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bir kısmının yanlış önermelere yönelik geçerli ters örnek üretme konusunda da güçlük yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Bu öğretmen adayları önermeyi çürütecek uygun bir ters örnek bulamamış ya da geçersiz ters örnekler üretmişlerdir. Öğretmen adaylarının bir kısmı da önermenin yanlış olduğunu göstermek için ispatları kullanmak veya açıklama yapmak gibi matematiksel olmayan yollara başvurmuşlardır. Önermelerin doğru olduğunu düşünen öğretmen adayları genellikle ispat yapmaya ya da bir örnek üzerinden önermenin doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır.

Anahtar Sözcükler: *Matematik öğretmeni adayı, Ters örnekler, Analiz, Matematik eğitimi.*

GİRİŞ

Matematik, kavramları arasında anlamlı ilişkiler bulunan, kendine özgü sembolleri ve terminolojisi bulunan evrensel bir dildir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013). Matematiksel kavramlar arasında bulunan ilişkileri araştırıp genellemelere ulaşmak, matematik yapmanın bir parçasıdır. Genellemelerin üretilmesinde izlenen yol matematiğe hastır ve ispatlama olarak adlandırılır (Altun, 2013a). Bir matematikçi geneli ilgilendiren düşünceyi kanıtlamaya çalışır ve bu düşünce tüm örnekler için geçerli olur (Altun, 2014). Elde edilen genellemeler ile yeni matematiksel bilgilere ulaşılır. Matematikçiler bir matematiksel ifadenin doğru olduğuna ispat yardımıyla karar verirler. Matematiksel sonuçlar ancak

[1] Bu çalışma birinci yazarın, ikinci yazarın danışmanlığında hazırladığı doktora tezinden üretilmiştir.

[2] Hakkari Üniversitesi, mdoruk20@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3085-1706

[3] Atatürk Üniversitesi, akaplan@atauni.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6743-6368

dikkatli bir şekilde ispatlandıktan sonra geçerli kabul edilir (Ross, 1998). Çünkü matematikçinin gözünde doğruluğun ölçütü olgusal kanıtta değil mantıksal ispatta aranmalıdır (Yıldırım, 2014).

Matematiksel bilgilerin doğruluklarının sınanmasında ispatlar ve ters örnekler önemli aktörlerdir. Gelbaum ve Olmsted'e (2003) göre matematik, ispat ve ters örneklerden oluşmaktadır ve matematiksel keşiflerin iki büyük hedefidir. Bu konuda Ko (2010), matematikte ispatların ve ters örneklerin birincil amacının bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek olduğunu belirtmiştir. Ko ve Knuth'a (2009) göre ispatlama ve çürütme, önermelerin doğru ya da yanlış olup olmadığını ve nedeninin gösterilmesine yardımcı olduğundan dolayı ileri matematiksel düşüncede önemli becerilerdir. Buradan da anlaşılacağı gibi matematikte bir önermenin doğrulanması kadar çürütülmesi de önemli bir etkinliktir. Matematiğin gelişmesinde önemli bir yere sahiptir (Lakatos, 1976). Matematiksel önermelerin yanlışlığının gösterilmesi genellikle ters örnekler yardımıyla olur (Altun, 2014; Lampert, 1990; Yasuhiro, 1991). Diğer bilim dallarından farklı olarak matematikte ters örnekler, bir netliğe ve statüye sahiptir (Whiteley, 2009). Yeni ve bilinmeyen bir varsayımın geçerliği test edilirken matematikçiler genellikle sadece ispat yapmaya çalışmazlar, aynı zamanda gizlenmiş çelişkileri, hataları ya da belirtilmemiş kabulleri ortaya çıkarması için ters örnek oluşturmaya çalışırlar. Bu şekilde matematikçiler ters örnekler yardımıyla eski ispatları düzenlerler ve yeni ispatları oluştururlar (De Villiers, 1999).

Ters örneklerle yapılan çürütme ya da yanlışlama birçok kaynakta ispatlama yöntemleri arasında gösterilmektedir (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1998; Altun, 2014; Irmak, 2008). Peled ve Zaslavsky (1997) ters örneklerin başlıca amacının önermeyi yanlışlamak olsa da, onların matematiksel kavramların hatırlanmasında ve önermelerdeki mantıksal hataların görülmesinde öğrencilere yardımcı olduğunu ifade etmişlerdir (Akt., Ko, 2010). Ters örnekler varsayımların yeniden düzenlenmesini sağlar ve muhakemenin gelişmesine yardımcı olurlar (Whiteley, 2009). Bir matematiksel ispat tüm durumlar için önermenin doğruluğunu gösterirken (Stylianides ve Stylianides, 2009), bir ters örnek mevcut önermenin yanlış olduğunu gösterir (Akkaş vd., 1998; Irmak, 2008). Benzer şekilde Zaslavsky ve Ron (1998), ters örneklerin diğer örneklerden daha güçlü bir konuma sahip olduğunu belirtmiş, tek bir ters örneğin genel sonuçları bozmak için yeterli iken destekleyici ve doğrulayıcı olarak sunulan birçok örneğin yeterli olmadığını ifade etmişlerdir. Akkaş vd. (1998) matematikte yapılan en önemli işlerden birinin teoremleri ispatlamak olduğunu belirtmişlerdir. Varlık bildiren teoremler ispatlanırken teoremin doğru olduğunu göstermede bir tek örnek vermek yeterli değildir. Çünkü teorem bu örnek için doğrulandığı halde başka bir örnek için doğrulanmış olmayabilir (Akkaş vd., 1998). Tıpkı ispatlar gibi, ters örnekler de matematiksel tartışma sürecinin sosyal bir ürünüdür (Yasuhiro, 1991).

İlgili literatür incelendiğinde araştırmacıların daha çok önermelerin doğrulanmasına odaklandıkları, önermelerinin çürütülmesine yönelik çalışmaların ise sınırlı sayıda olduğu görülmüştür. Yapılan araştırmalarda üniversite düzeyinde birçok ispat ağırlıklı ders alınmasına rağmen üniversite öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin önermelerin yanlışlığını göstermek için ters örnek üretme konusunda güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir (Riley, 2003; Zaslavsky ve Peled, 1996; Zaslavsky ve Ron, 1998). Bununla birlikte, öğrencilerin kendilerine sunulan önermelerin doğruluklarını belirlemede bile zorluk yaşadıklarını ortaya çıkmıştır (Gibson, 1998; Goetting, 1995; Ko ve Knuth, 2009; Riley, 2003). Öğrencilerin bir kısmının, bir önerme için üretilen geçerli ters örneği, önermenin istisnası olarak gördükleri ve önermenin hala doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir (Williams, 1979; Zaslavsky ve Ron, 1998). Benzer şekilde Galbraith (1981), öğrencilerin tek bir ters örneğin, yanlış olan önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu bilmediklerini ifade etmiştir.

Doğru matematiksel bilgilere ulaşmak, matematik öğrenimi için de önemli bir durumdur. Matematik öğretimi üzerine etkin iki kuram olan Yapılandırmacı Öğrenme Kuramı ve Gerçekçi Matematik Eğitimi, bilgiyi bireyin kendisinin oluşturduğu düşüncesini benimsemiştir (Altun ve Yılmaz, 2010). Bilişsel Yapısalcı Kuram'a göre bilgi bir adaptasyon süreci sonucunda elde edilir ve bu bilgi edinimi bireyin kendisi tarafından gerçekleştirilir (Altun, 2014). Buna göre, öğrencilerin yeni matematiksel bilgilerini önceki öğrenmeleri ile yapılandırarak elde ettikleri söylenebilir. Çünkü birey yeni öğrendiği bilgiyi zihnindeki şemalara uyarlamakta (özümseme), uyarlayamıyorsa şemaları yenileyip (düzenleme) geliştirmektedir (Altun, 2014). Öğrenciler kendilerine yöneltilen matematiksel iddiaları sorgulamadan doğru kabul ederlerse, yanlış matematiksel bilgileri geçerli bilgiler olarak kabul etmeleri ve zihinlerinde yapılandırmaları muhtemeldir. Yanlış matematiksel bilgilerin üzerine inşa edilecek yeni bilgilerin de sağlıklı bilgiler olamayacağı açıktır. Bu yüzden öğrencilerin doğru matematiksel bilgiye ulaşmak adına matematiksel bilgilerin doğruluğunun nasıl sorgulanacağı konusunda bilgili olmaları gerekmektedir. Çünkü matematik bilme ihtiyacının ürünü, bir düşünme ve doğruyu arama uğraşıdır (Altun, 2013b).

Araştırmacılar öğrencilerin ortaokul son sınıf itibariyle bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için bir ters örneğin yeterli olduğunu, önermenin birkaç durum için doğrulanmasının önermenin tüm durumlar için doğru olduğu sonucuna ulaşılamayacağını fark etmelerini tavsiye etmektedir (Ross, 1998). Benzer şekilde ülkemizde ortaokul matematik dersi kapsamında yapılan öğretim ile öğrencilerinin matematiksel çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunma becerisine sahip olmaları istenmektedir (MEB, 2013). Ortaokul öğrencilerinin bu becerileri kazanabilmeleri için matematik öğretmenlerinin de doğru olduklarını düşündükleri matematiksel çıkarımların nasıl savunulacağı konusunda bilgili olmaları gerekmektedir. Matematik öğretmeni adaylarının da öğretmen yetiştiren kurumlarda matematiksel bilgilerin doğruluğunun ya da yanlışlığının nasıl gösterileceği konusunda beceri kazanmaları adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında ters örnek üretme becerileri ortaya çıkarılmak istenmiştir. Bu amaçla öğretmen adaylarının yanlış önermeler için ürettikleri ürünler incelenmiştir. Çalışmada ilgili literatürle uyumlu olarak ters örnek yardımıyla yapılan yanlışlama, bir ispat yöntemi olarak değerlendirilmiştir.

YÖNTEM

Araştırmanın modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Çalışma nitel araştırma desenlerinden bir durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Durum çalışması, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam, 2013).

Araştırma grubu

Çalışmanın katılımcıları 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Türkiye'nin Doğu Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz matematik öğretmeni adayıdır. Ayrıca çalışmanın pilot uygulaması 2013-2014 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, yine aynı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören toplam 10 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Araştırma grubu ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınarak seçilmiştir. Ölçüt örnekleme yönteminde temel anlayış önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan durumların çalışılmasıdır. Burada sözü edilen ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Çalışmada öğretmen adaylarının analiz alanında kendilerine sunulan yanlış önermelere yönelik ters örnek üretme süreçleri incelenmiştir. Bu bakımdan araştırma grubu seçiminde, öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu, nasıl yapıldığı, bir argümanın nasıl savunulması gerektiği ya da matematikte "çürüten" yani ters örneklerin varlığı ve kullanımı hakkında bilgi sahibi oldukları Soyut Matematik dersi ile analiz konularının öğretiminin yapıldığı Genel Matematik, Analiz-I, Analiz-II ve Analiz-III derslerini almış ve başarı ile geçmiş olmaları dikkate alınmıştır. Analizin temel konuları olarak fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev kavramları dikkate alınmıştır. Araştırma grubunun seçilmesinde daha ayrıntılı bilgi elde edebilmek için öğrencilerin hazırlanan etkinliklerin ilgili olduğu derslerdeki başarıları (Analiz-I, Analiz-III, Soyut Matematik) ve ağırlıklı genel not ortalamaları (AGNO) incelenmiştir.

Yapılan değerlendirmeler sonucunda öğrenciler ilgili derslerdeki başarıları ve AGNO'larına göre iki gruba ayrılmıştır. İlk grup ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerdir. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin arasından gönüllülük esasına ve kolay ulaşılabilme olanağı olan dört öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerin AGNO'ları 2.5/4 ile 3.0/4 arasındadır. İlk grup olan ortalama düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Barış, Belma, Bilge ve Buse'dir. Çalışmanın yürütüldüğü diğer grup başarı düzeyi yüksek öğrencilerden oluşmuştur. Bu gruptaki öğrencilerin AGNO'ları 3.0/4 ile 4.0/4 arasında ve ilgili dersleri ilk seferinde yüksek bir başarı ile geçmişlerdir. Bu grup arasından da gönüllü olmaları ve kolay ulaşılabilmeleri göz önünde tutularak dört öğrenci araştırma grubuna dâhil edilmiştir. Bu gruptaki öğretmen adaylarının başarı sıralamalarına göre takma isimleri Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'dir.

Çalışmada başarı düzeyi farklı iki grubun incelenmesinin sebebi yanlış önermelere yönelik olabildiğince farklı ürünlerin üretilmesini sağlamaktır. Bu sayede öğretmen adaylarının yanlış önermeler için ürettikleri ürünlere yönelik kapsamlı bir sınıflama elde edilebileceği düşünülmüştür. Çalışmada başarı düzeyi düşük öğretmen adaylarının araştırmaya dâhil edilmemesinin sebeplerinden biri de pilot uygulamada bu tarz öğretmen adaylarının analizi kolay olmayan ifadeler kullanma eğiliminde olmalarıdır.

Veri toplama aracı

Öğretmen adaylarının analiz alanında ters örnek üretme becerilerini ortaya çıkarabilmek için etkinlik temelli klinik mülakatlardan yararlanılmıştır. Öğretmen adayları ile hazırlanan mülakat formları yardımıyla dört kez görüşülmüştür. Mülakatlar formlarında sırasıyla fonksiyonlar, diziler, limit-süreklilik ve türev konularında dört adet yanlış önerme yer almaktadır. Ayrıca formlarda önermelerin ispatlanması için kendilerine gerekli olan tüm formel tanımlar sunulmuştur. Öğretmen adaylarından bu önermeleri doğru veya yanlış olarak belirtmeleri ardından verdikleri kararların doğruluğunu göstermeleri istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının matematiksel çıkarımlarını nasıl savundukları ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Veri toplama araçlarının geliştirilmesinde geçerlik çalışmaları kapsamında altı uzman akademisyenin görüşüne başvurulmuş ve pilot uygulama yapılmıştır. Bu uzmanlar bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik ve ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi alanında doçent ve yardımcı doçent olarak görev yapmaktadırlar. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda formda bulunan yazım hataları ve matematiksel hatalar düzeltilmiştir. Tablo 1'de çalışmada kullanılan yanlış önermeler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 1. Çalışmada Kullanılan Yanlış Önermeler

Mülakat konuları	**Önermeler**
Fonksiyonlar	*Herhangi çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon da birebirdir*
Diziler	(s_n) *yakınsak ve* (t_n) *ıraksak reel sayı dizisi olmak üzere* $(s_n.t_n)$ *çarpım dizisi ıraksaktır*
Limit-süreklilik	*Bir küme üzerinde monoton artan her fonksiyon, aynı küme üzerinde süreklidir*
Türev	*Herhangi bir noktada sürekli her fonksiyon, o noktada türevlidir*

Verilerin toplanması

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış klinik mülakatlar yardımıyla dört haftada toplanmıştır. Öğretmen adaylarına görüşmelere başlamadan önce çalışma hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Çalışmanın gönüllülük esasına göre yürütüleceği ve istedikleri zaman çalışmadan ayrılabilecekleri ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının isimlerinin gizli tutulacağı ve takma isimlerin kullanılacağı belirtilmiştir. Görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır.

Görüşmeler araştırmacı ile öğretmen adaylarının dışsal faktörlerden etkilenmeyeceğine inanılan bir ortamda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarından görüşmeler sırasında sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Öğretmen adayları da genellikle düşüncelerini sesli olarak ifade etmişlerdir. Görüşmeler sırasında araştırmacı, öğretmen adaylarını yönlendirici davranışlardan kaçınmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının düşüncelerini anlamak için sıklıkla sorular sorulmuştur. Görüşmelere başlamadan önce araştırmacı tarafından sorulacak olan soruların onların ne düşündüklerini anlamak için olduğu, kesinlikle yönlendirici bir nitelik taşımadığı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarına da araştırmacıdan bir onay beklememeleri ve buna yönelik soru sormamaları istenmiştir.

Verilerin analizi

Öğretmen adaylarının önermelerin doğruluğuna yönelik verdikleri kararlarının ardından verdikleri kararların doğruluğunu göstermek için ürettikleri ürünlere içerik analiz uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının yazılı ve sözlü beyanları ortak olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının bir kısmı önermenin yanlış olduğunu belirtirken, bir kısmı da doğru olduğunu belirterek verdikleri kararların doğrultusunda ürünler üretmişlerdir. İçerik analizi sonucunda öğretmen adaylarının ürettikleri ürünlerin sekiz farklı özellikte olduğu tespit edilmiştir. Çalışmada elde edilen kategoriler iki uzman akademisyenin kontrolünden geçmiştir. Uzmanlar çalışmada elde edilen kategorilerin öğrencilerin ispatlarının özelliklerini yansıttığı yönünde görüş bildirmişlerdir. Tablo 2'de öğretmen adaylarının yanlış önermeler için ürettikleri ürünlerin özellikleri sunulmuştur.

Tablo 2. Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Ters örnekler	*Göstergeler*
Doğru ters örnek	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlayan geçerli bir ters örnek üretmişlerdir. Ters örneğin neden önermeyi yanlışladığını doğru bir şekilde açıklamışlardır.*
Geçersiz ters örnek	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlayan ters örnek bulmaya çalışmışlar fakat başarılı olamamışlardır. Ters örnek olarak öne sürdükleri örnekler önermeyi yanlışlamak için gerekli özellikleri taşımamaktadır.*
Ters örnek yok	*Öğretmen adayları söz konusu önermelerin yanlış olduğunu düşünerek ters örnek bulmaya çalışmışlar fakat başarılı olamamışlardır.*
İspatla yanlışlama	*Öğretmen adayları önermeyi doğrulamak için ispat yapmaya çalışmışlardır. İspatlarında mantıksal olarak bir eksiklik görmüşlerdir. Önermeyi yanlışlamak için ispatın neden yapılamayacağını izah etmeye çalışmışlardır. İspatlarındaki çelişkili durumun önermenin yanlış olduğunu göstermek için yeterli olduğunu ifade etmişlerdir.*

İspat kullanma	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlamak için önermenin ilgili olduğu farklı bir teoremin ispatını yapmışlardır. Bu teoremin ispatına dayanarak söz konusu önermenin yanlış olduğunu ifade etmişlerdir.*
Açıklama yapma	*Öğretmen adayları önermeyi yanlışlamak için ters örnek bulmaya çalışmak yerine önermenin neden yanlış olduğunu açıklamaya çalışmışlardır.*
İspat	*Öğretmen adayları yanlış olan önermenin doğru olduğunu düşünerek ispat yapmaya çalışmışlardır. İspatlarını kendilerine göre tamamlayarak ya da ispatlarını yarım bırakarak önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşmışlardır.*
Örnekle doğrulama	*Öğretmen adayları yanlış olan önermenin doğru olduğunu düşünerek doğrulamaya çalışmışlardır. Önermeyi doğrulamak için bir ya da birkaç örnek ile önermenin doğru olduğunu göstermişlerdir.*

BULGULAR VE YORUM

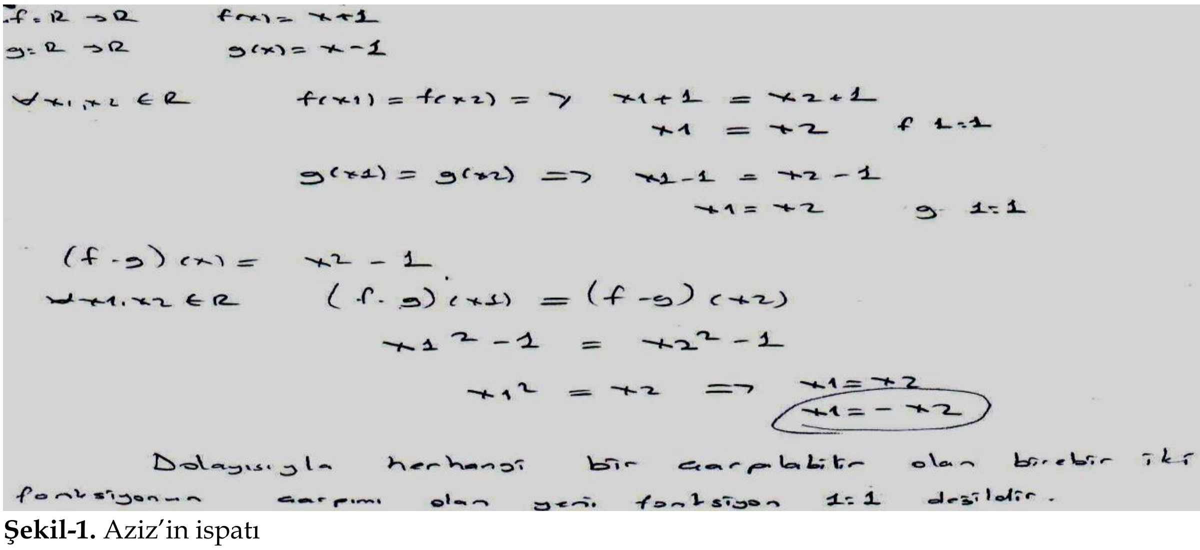
Öğretmen adaylarının ters örnek üretme süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla fonksiyonlar konusunda yanlış bir önerme olan "*Herhangi çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon da birebirdir.*" önermesi için oluşturdukları ürünler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ters örnek üretme durumları üç kategori altında toplanmıştır. Bu kategoriler hakkında bilgiler Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ters örnek	✓		✓		✓	✓		
Örnekle doğrulama							✓	
İspat		✓		✓				✓

Tablo 3'e göre öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Aziz, Barış, Bilge) verdikleri karara uygun olarak geçerli ters örnekler üretmişlerdir. Diğer öğretmen adayları ise önermenin doğru olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından üçü (Adem, Aysun, Belma) ispat yapmaya çalışırken, Buse ise özel bir örnek kullanarak doğrulama yapmıştır.

Ahu, Aziz, Barış ve Bilge verdikleri kararlara uygun olarak doğru ters örnekler üretmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarına örnek olarak Aziz'in ispatı sunulmuştur. Aziz, ispatında reel sayılar üzerinde tanımladığı $f(x) = x + 1$ ve $g(x) = x - 1$ fonksiyonlarını önermeyi çürüten ters örnek olarak kullanmıştır.


$f: R \to R \quad f(x) = x+1$

$g: R \to R \quad g(x) = x-1$

$\forall x_1, x_2 \in R \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$

$x_1 = x_2 \quad f\ 1{:}1$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

$x_1 = x_2 \quad g\ 1{:}1$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 1$

$\forall x_1, x_2 \in R \quad (f \cdot g)(x_1) = (f \cdot g)(x_2)$

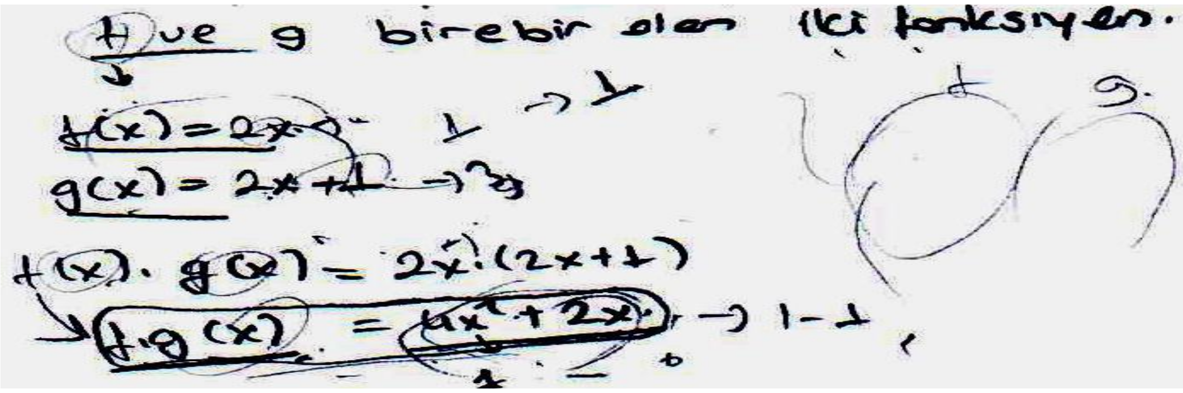
$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$

$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2, \ x_1 = -x_2$

Dolayısıyla herhangi bir çarpılabilir olan birebir iki fonksiyonun çarpımı olan yeni fonksiyon 1:1 değildir.

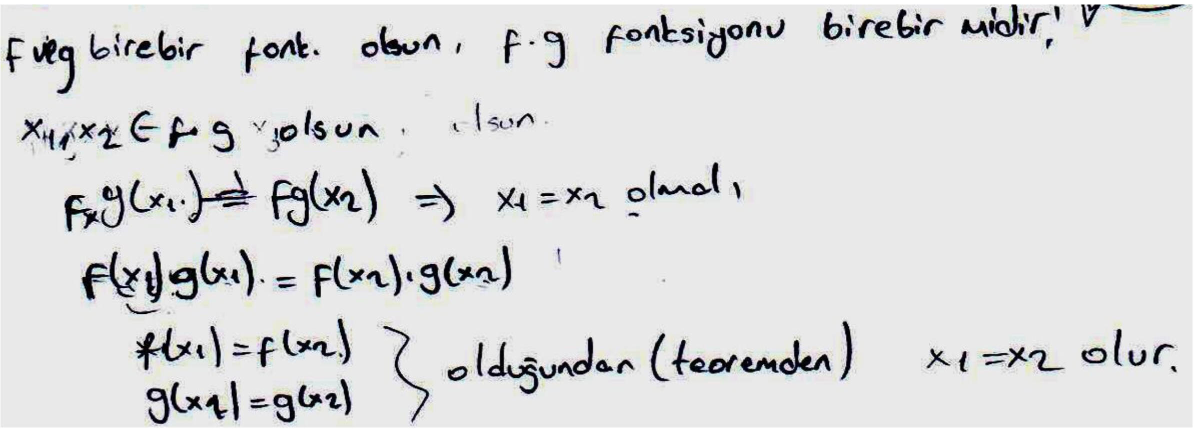
Şekil-1. Aziz'in ispatı

Diğer öğretmen adayları ise bu önermenin doğru olduğunu belirterek doğrulamaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Buse reel sayılar kümesi üzerinde tanımladığı iki fonksiyonu çarparak bulduğu sonuca göre doğrulama yapmıştır. Reel sayılar üzerinde tanımladığı $f(x) = 2x$ ve $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Çarpım fonksiyonunun birebir bir fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Buse'nin bulduğu çarpım fonksiyonu gerçekte birebir olmayan bir fonksiyondur. Buse önermeyi çürüten bir örnek bulmuş fakat yeterli inceleme yapmadığı için fark edememiştir. Buse'nin bulduğu örneği hatalı değerlendirmesinde birebir fonksiyon kavramına yönelik geliştirdiği "$x_1 = x_2$ *ise* $f(x_1) = f(x_2)$" imajı etkili olmuştur. Aşağıda Buse'nin yaptığı ispata yer verilmiştir.



Şekil-2. Buse'nin ispatı

Adem, Aysun ve Belma doğru olarak değerlendirdikleri önerme için ispat yapmaya çalışmışlar ve başarısız olmuşlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Belma'nın ispatına yer verilmiştir.



Şekil-3. Belma'nın ispatı

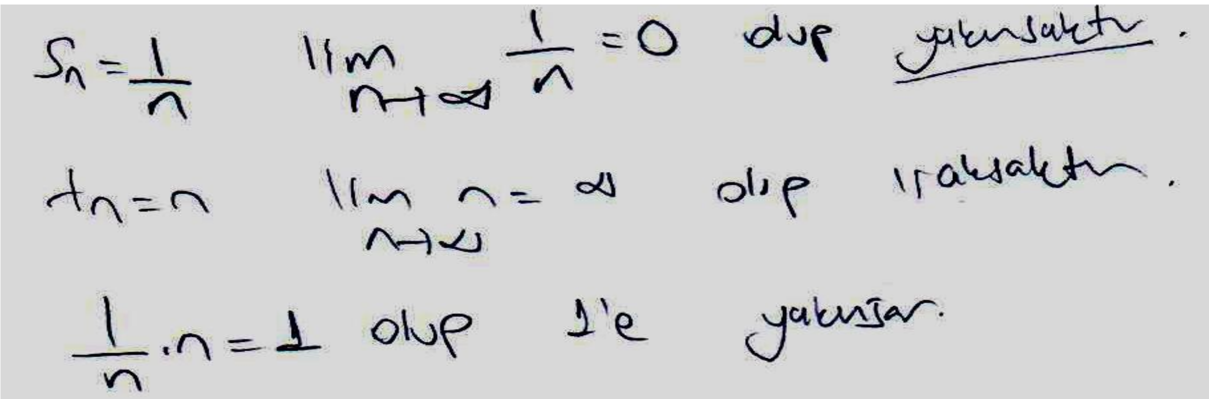
Öğretmen adaylarının diziler konusunda yanlış olan matematiksel bir önerme için ne tür ürünler ortaya çıkaracaklarını belirleyebilmek için "*(s_n) yakınsak ve (t_n) ıraksak reel sayı dizisi olmak üzere $(s_n . t_n)$ çarpım dizisi ıraksaktır*" önermesi için oluşturdukları ürünler incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının ürünlerinin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler hakkındaki bilgilere Tablo 4'te yer verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ters örnek	✓	✓	✓					
Açıklama yapma							✓	
Örnekle doğrulama					✓	✓		
İspat				✓				✓

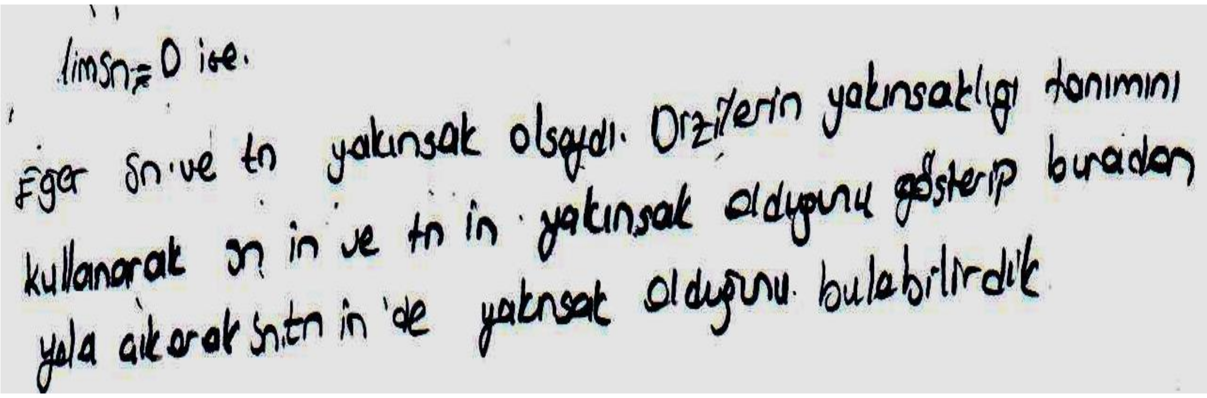
Tablo 4 incelendiğinde önermenin yanlış olduğunu belirten dört öğretmen adayından üçünün (Ahu, Adem, Aziz) doğru ters örnek ürettikleri belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayı (Buse) ters örnek üretme yerine açıklama yaparak önermenin yanlış olduğunu göstermeye çalışmıştır. Öğretmen adaylarının yarısı (Aysun, Barış, Belge, Belma) önermenin doğru olduğunu düşünerek doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından ikisi (Aysun, Belma) önermeyi ispatlamaya çalışırken diğer ikisi (Barış, Bilge) özel örnekler kullanarak önermenin doğruluğunu göstermek istemiştir.

Ahu, Aziz ve Adem önermenin yanlışlığını doğru bir ters örnek üreterek göstermişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Ahu'nun ispatına yer verilmiştir.



Şekil-4. Ahu'nun ispatı

Buse önermenin yanlış olduğunu belirtmiştir. Önermenin yanlış olduğunu göstermek için ters örnek ile ispat yapmak yerine önermenin yanlış olduğunu açıklamaya çalışmıştır. Aşağıda Buse'nin ispatına yer verilmiştir.



Şekil-5. Buse'nin ispatı

Bilge ve Barış önermenin doğru olduğunu düşünerek ispat yapmaya çalışmıştır. İspatlarında önermeyi doğrulayan örnekler kullanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının ispatlarında tümevarımsal bir yaklaşım sergiledikleri söylenebilir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ispatı sunulmuştur.

$s_n = \frac{2n-1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} \Rightarrow \lim s_n = 2$

$t_n = 2n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} 2n = \lim t_n = \infty$

$\lim (s_n . t_n) = \lim s_n . \lim t_n$

$= \infty . 2 = \infty$ olup ıraksak

Şekil-6. Barış'ın ispatı

Aysun ve Belma ise doğru olduğunu düşündükleri önermenin doğruluğunu göstermek için ispat yapmaya çalışmıştır. İspatlarında ortak olarak limit işleminin çarpma işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Belma'nın ispatı örnek olarak sunulmuştur.

s_n dizisi yakınsak

$n > n_0$ için $|s_n - a| < \varepsilon$ old. ε bağlı bir n_0 sayısı vardır,

t_n dizisi ıraksak

$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ 'dur.

$\lim_{n\to\infty} s_n = a$ | $\lim_{n\to\infty} (t_n . s_n) = \infty . a = \infty$ olup

$(t_n).(s_n)$ ıraksaktır.

Şekil-7. Belma'nın ispatı

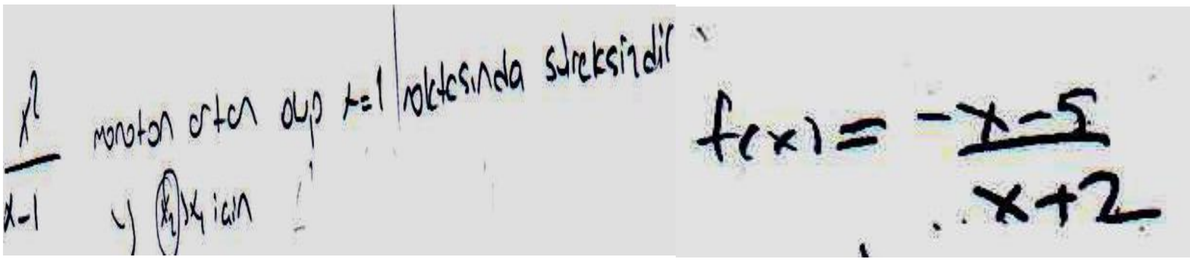
Öğretmen adaylarının limit-süreklilik konusunda ters örnek üretme becerilerini ortaya çıkarmak için *"Bir küme üzerinde monoton artan her fonksiyon, aynı küme üzerinde süreklidir."* yanlış önermesine yönelik ürettikleri matematiksel ürünler incelenmiştir. Yapılan inceleme sonucunda öğretmen adaylarının oluşturdukları ürünlerin dört kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 5'te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Geçersiz ters örnek			✓	✓				
Örnekle doğrulama					✓			
İspat							✓	✓
Tamamlanmamış ispat	✓	✓				✓		

Tablo 5'e göre, önermenin yanlış olduğunu belirten öğretmen adaylarının (Aziz, Aysun) önerme için uygun bir ters örnek üretemedikleri belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayları önermenin doğru bir önerme olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları çoğunlukla ispat yapmaya çalışmışlardır. İki öğretmen adayı (Buse, Belma) ispatını tamamlarken üç öğretmen adayı (Ahu, Adem, Bilge) tamamlayamamıştır. Bir öğretmen adayı (Barış) önermenin doğru olduğunu özel bir örnek kullanarak göstermeye çalışmıştır.

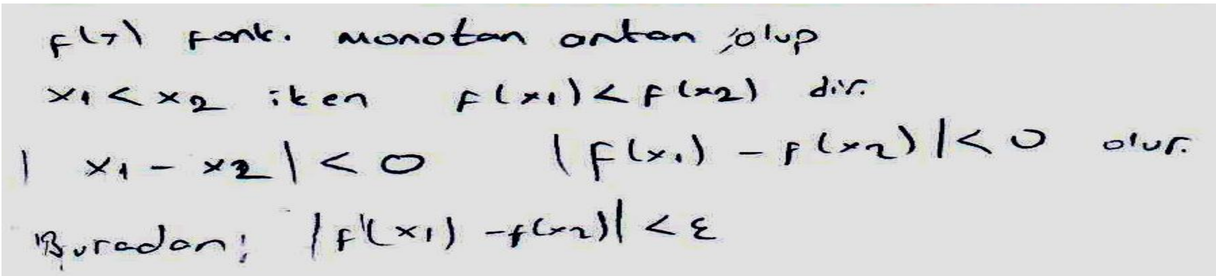
Önermenin yanlış olduğunu belirten Aziz ve Aysun, geçerli bir ters örnek bulamamışlardır. Buna göre, bu öğretmen adaylarının doğru bir ters örnek üretmede başarısız oldukları söylenebilir. Aşağıda sırasıyla Aysun ve Aziz'in reel sayılar üzerinde tanımladıkları örnekler sunulmuştur.



Şekil-8. Aysun ve Aziz'in ters örnekleri

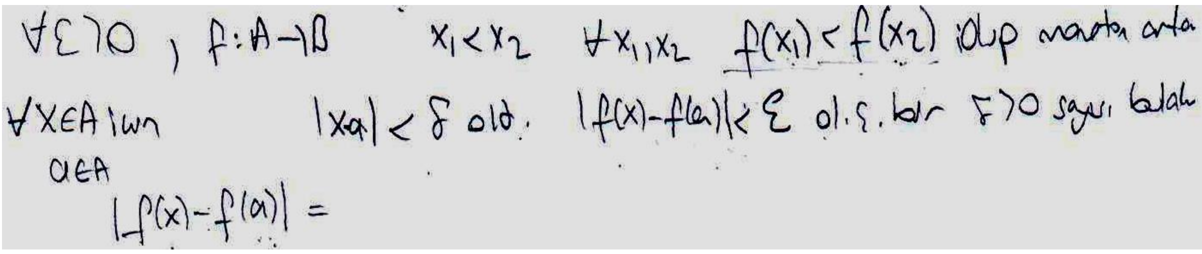
Öncelikle Aysun'un $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ örneği incelendiğinde, bu fonksiyonun reel sayılar üzerinde monoton artan bir fonksiyon olmadığı dikkat çekmiştir. Bu fonksiyon $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ kümesi üzerinde monoton artandır. Bu bakımdan, Aysun'un fonksiyonun reel sayılar kümesi üzerinde monoton artan olduğu iddiası yanlıştır. Ayrıca, fonksiyon monoton artan olduğu aralık olan $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ kümesi üzerinde aynı zamanda süreklidir. Aziz'in örneği incelendiğinde öne sürdüğü $f(x) = \frac{-x-5}{x+2}$ fonksiyonu da, Aziz'ın iddia ettiği gibi reel sayılar üzerinde monoton artan bir fonksiyon değildir. Söz konusu fonksiyonun monoton artan olduğu küme $R - \{-2\}$ kümesidir. Bu fonksiyon da monoton artan olduğu küme üzerinde aynı zamanda süreklidir. Buna göre Aysun ve Aziz'in öne sürdükleri örneklerin önermeye ters örnek olacak özellikleri taşımadığı belirlenmiştir.

Aysun ve Aziz'in dışındaki öğretmen adayları, önermenin doğru olduğunu belirterek önermeyi doğrulamaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarının çoğu önermeyi ispatlama yoluna gitmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından Buse ve Belma ispatlarını tamamlamış fakat ispatlarından memnun olmadıklarını belirtmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Belma'nın ispatına yer verilmiştir.



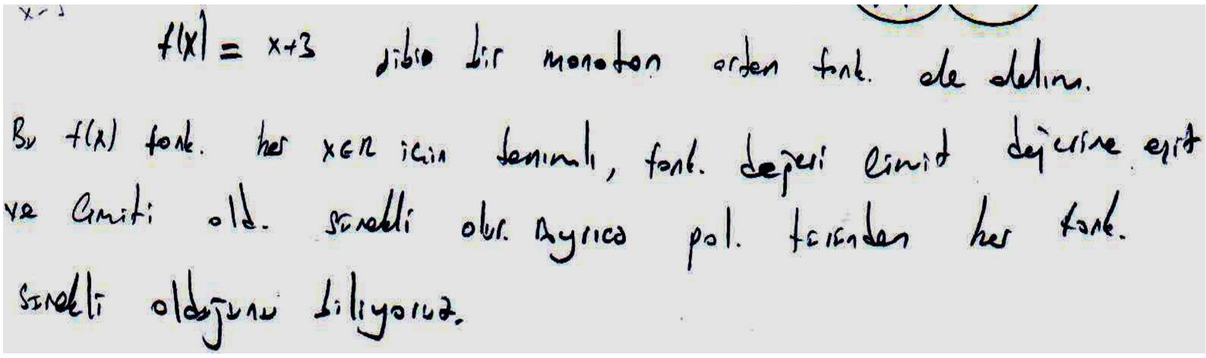
Şekil-9. Belma'nın ispatı

Ahu, Adem ve Bilge ispatlarına başlamış fakat tanımları yazdıktan sonra başka bir işlem yapamamışlardır. İspatını ilerletemeyen öğretmen adayları ispatlarını bu şekilde bırakmışlardır. Aşağıda Ahu'nun ispatı sunulmuştur.



Şekil-10. Ahu'nun ispatı

Son olarak Barış önermenin doğru olduğunu bir örnek üzerinden göstermeye çalışmıştır. Bu bakımdan Barış'ın bu ispatında da tümevarımsal ispat şemasını koruduğu söylenebilir. Aşağıda Barış'ın ispatına yer verilmiştir.



Şekil-11. Barış'ın ispatı

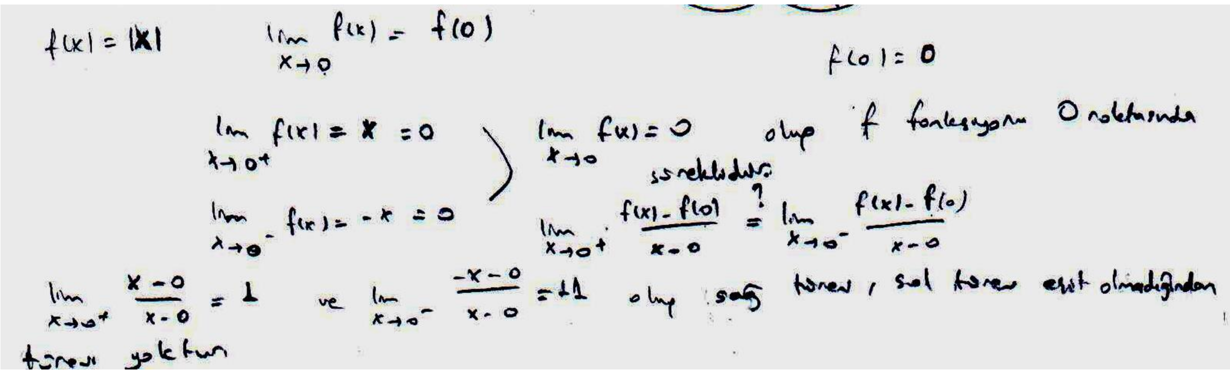
Öğretmen adaylarına son mülakatta türev konusu ile ilgili *"Herhangi bir noktada sürekli her fonksiyon, o noktada türevlidir."* yanlış önermesi için ürettikleri ürünler incelenmiştir. Öğretmen adaylarının önermenin doğruluğu ya da yanlışlığını göstermek için ürettikleri ürünlerin altı kategoriye ayrıldığı belirlenmiştir. Tablo 6'de bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 6. Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Üretme Durumları

Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Doğru ters örnek	✓	✓						
İspatla yanlışlama			✓					
Ters örnek yok				✓				
İspat kullanma							✓	
Örnekle doğrulama					✓			✓
Tamamlanmamış ispat						✓		

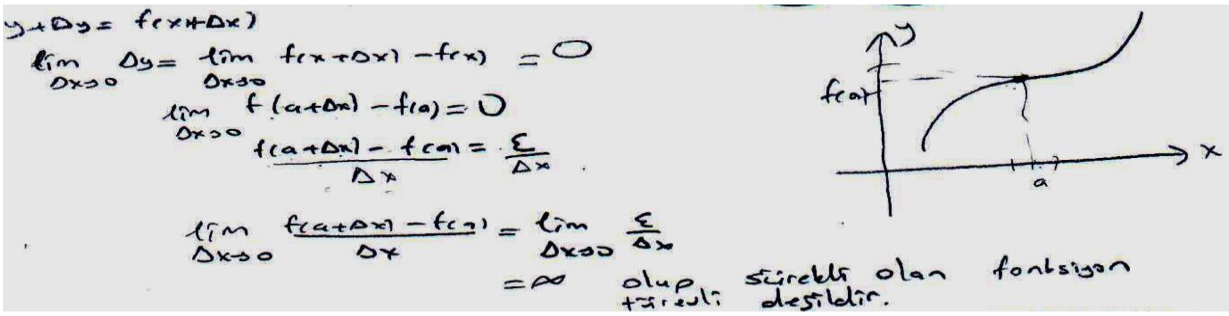
Tablo 6'ya göre, önermenin yanlış olduğunu belirten beş öğretmen adayından sadece ikisinin (Ahu, Adem) doğru bir ters örnek üretebildiği belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayları (Aziz, Aysun) ya ters bir örnek bulamamış ya da bu önermenin yanlış olduğunu göstermek için önermenin ispatında eksiklik olduğunu ifade etmişlerdir. Bir öğretmen adayı (Buse) da önermenin yanlış olduğunu önermedeki kavramlarla ilgili başka bir teoremin ispatına yer vererek göstermeye çalışmıştır. Bu önermenin doğru olduğunu düşünen öğretmen adayları, örnek kullanarak önermenin doğru olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bir öğretmen adayı (Bilge) ise ispat yapmaya çalışmış fakat ispatını tamamlayamamıştır.

Ahu, Adem ve Aysun önermenin yanlış olduğunu gösterebilmek için ters örnek bulmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Aysun ters örnek bulamazken Ahu ve Adem önermenin yanlış olduğunu ispatlamak için doğru bir ters örnek üretebilmişlerdir. Bu öğretmen adayları $f(x) = |x|$ fonksiyonunun sıfır noktasında sürekli fakat türevli olmadığını belirtmişlerdir. Bu örneğin önermeyi çürüten bir ters örnek olduğunu belirterek ispatlarından emin olduklarını ifade etmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Adem'in ters örneği yer almıştır.



Şekil 12. Adem'in ispatı

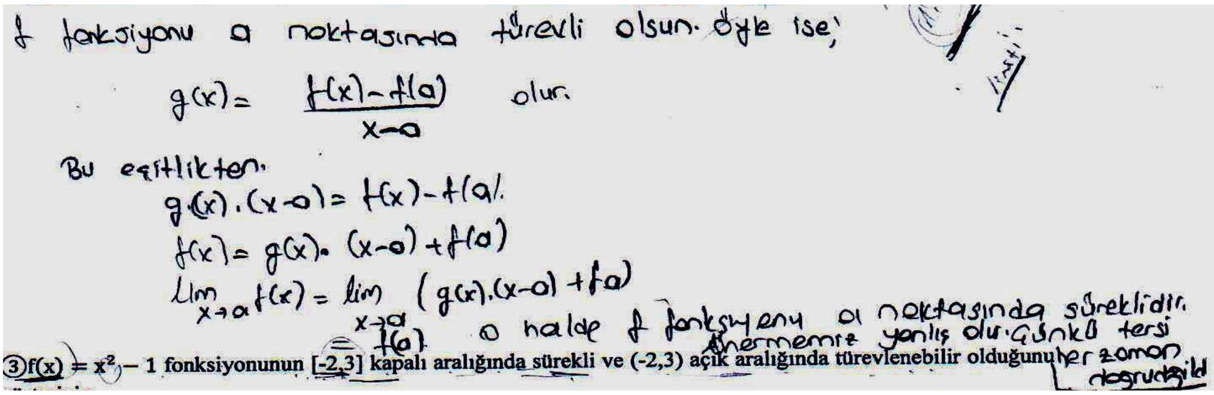
Aziz önermenin yanlış olduğunu göstermek için farklı bir yol tercih etmiştir. Aziz önermenin ispatını yapmaya çalışmıştır. İspatında süreklilik tanımından hareket ederek türev tanımındaki limit ifadesine ulaşmaya çalışmıştır. Aşağıda Aziz'in ispatı sunulmuştur.



Şekil-13. Aziz'in ispatı

Aziz'in ispatındaki adımlar incelendiğinde, yapılan işlemler ilk bakışta doğru gibi görünmektedir. Fakat ispat dikkatli bir şekilde irdelendiğinde yanlışlıkların olduğu ortaya çıkmaktadır. Aziz, fonksiyonun sürekli olduğunu kabul ederek türevli olup olmadığını bulmaya çalışmıştır. Fonksiyonun herhangi bir noktada sürekli olmasını $\lim_{\Delta x \to o} f(a+\Delta x) - f(a) = 0$ şeklinde belirtmiştir. Bir fonksiyon ile limiti arasındaki farkın sonsuz küçük olmasından dolayı $f(a+\Delta x) - f(a) = \varepsilon$ şeklinde bir gösterim yapmıştır. Bu gösterim, yanlış bir gösterim değildir fakat önemli bir ayrıntıyı içermemektedir. Bu ayrıntı ispatın sonunda, Aziz'in ispatı hakkında yanlış bir karar vermesine yol açmıştır. İlgili gösterimde $\lim_{\Delta x \to o} \varepsilon = 0$ dır. Aziz ispatın son basamağında $\lim_{\Delta x \to o} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = \infty$ olduğunu iddia etmiştir. Aziz burada ε sayısını sonlu bir sayı olarak dikkate almıştır. Söz konusu limit $\frac{0}{0}$ belirsizliğine neden olur. Bu limitin değeri sonlu bir sayı da çıkabilir. Kesinlikle ∞ çıkacağının bir garantisi yoktur. Aziz, ε sayısının hangi özellikte olduğunu düşünmemiştir ya da bilmemektedir. Kaldı ki Aziz'in yaptığı ispat geçerli olsaydı, sürekli olan tüm fonksiyonların türevli olmaması gerekirdi.

Buse önermenin yanlış olduğunu göstermek için daha önceki mülakatlarda kendilerine sunulan bir noktada türevlenebilen fonksiyonların aynı noktada sürekli olduğuna yönelik teoremin ispatını kopyalamıştır. Bu teoremin tersinin doğru olmadığını ifade etmiştir. Aşağıda Buse'nin ispatı yer almıştır.


f fonksiyonu a noktasında türevli olsun. öyle ise;

$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ olur.

Bu eşitlikten

$g(x).(x-a) = f(x)-f(a)$

$f(x) = g(x).(x-a)+f(a)$

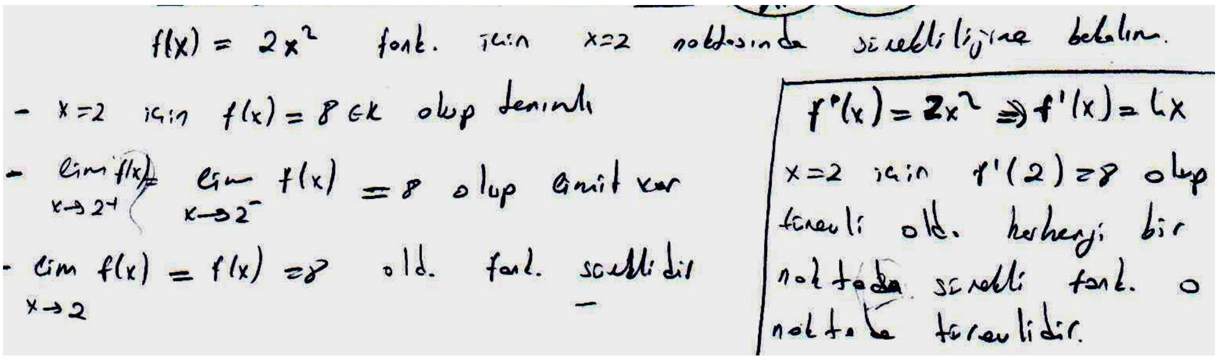
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (g(x).(x-a)+f(a)) = f(a)$ o halde f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

Önermemiz yanlış olur. Çünkü tersi her zaman doğrudur.

3) $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun [-2,3] kapalı aralığında sürekli ve (-2,3) açık aralığında türevlenebilir olduğunu

Şekil-14. Buse'nin ispatı

Barış ve Belma önermenin doğru olduğunu bir örnek üzerinden göstermişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın ispatı sunulmuştur.


$f(x) = 2x^2$ fonk. için $x=2$ noktasında sürekliliğine bakalım.

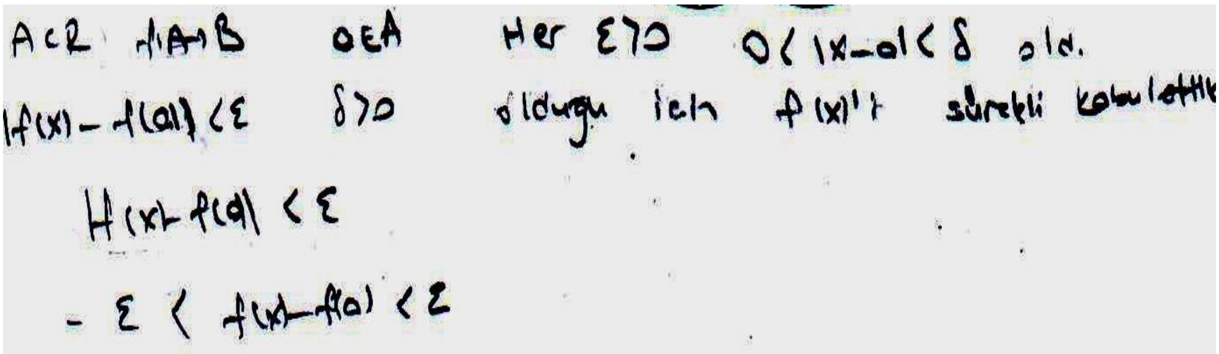
- $x=2$ için $f(x)=8$ ek olup tanımlı
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 8$ olup limit var
- $\lim_{x\to 2} f(x) = f(x) = 8$ old. fonk. süreklidir

$f'(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x$

$x=2$ için $f'(2)=8$ olup türevli old. herhangi bir noktada sürekli fonk. o noktada türevlidir.

Şekil-15. Barış'ın ispatı

Bilge ise önermenin doğru olduğunu göstermek için ispat yapmaya çalışmıştır. Sadece teoremin hipotezini ifade edebilen Bilge, ispatına devam edememiştir. Aşağıda Bilge'nin ispatı sunulmuştur.


$A \subset R$ $f: A \to B$ $a \in A$ Her $\varepsilon > 0$ $0 < |x-a| < \delta$ old. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ $\delta > 0$ olduğu için $f(x)$'i sürekli kabul ettik

$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x)-f(a) < \varepsilon$

Şekil-16. Bilge'nin ispatı

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Öğretmen adaylarının ters örnek üretme becerilerini ortaya çıkarabilmek için analizin temel konularında dört yanlış önerme kullanılmıştır. Öğretmen adaylarından önce önermelerin doğru olup olmadığına yönelik bir karar vermeleri, daha sonra verdikleri kararları matematiksel olarak savunmaları istenmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının önermelerin yanlış olduğunu belirlemede dahi zorlandıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarına sunulan yanlış önermeler için yapılan değerlendirmeler incelendiğinde, verilen toplam kararların 15'inin önermenin yanlış olduğu yönünde iken 17 kararda ise önermenin doğru olduğunun belirtildiği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarından verdikleri kararların doğruluğunu göstermeleri istendiğinde önermenin yanlış ve doğru olduğunu göstermek için ürünler üretildiği görülmüştür. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin yanlış önermeleri seçme konusunda güçlük yaşadıklarının tespit edildiği çalışmalarla uyumludur (Goetting, 1995; Ko, 2010; Riley, 2003).

Önermenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarının ürettikleri ürünlerin yarısından fazlasının (%60) geçerli ters örnekler olduğu tespit edilmiştir. Buna göre önermenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarının ürettikleri ürünlerin yarısından fazlasının önermeyi çürütecek nitelikte olduğu söylenebilir. Ko ve Knuth (2009) da benzer sonuçlara ulaşmıştır. Ko ve Knuth (2009) çalışmalarında lisans matematik öğrencilerine sürekli fonksiyonlar ile ilgili iki yanlış önerme sunmuştur. İlk önerme için 36 öğrenciden 14'ünün, ikinci önerme için ise altı öğrencinin önermenin doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Öğrencilerin önermenin yanlış olduğunu göstermek için ürettikleri ters örneklerin sadece dokuzu ve yedisi yeterli ters örnek olarak değerlendirilmiştir. Riley (2003) de öğretmen adaylarının %44'ünün yanlış matematiksel önermeleri seçebilirken, sadece %39'unun bu önermelere yönelik geçerli ters örnekler üretebildiklerini belirtmiştir. Whiteley (2009) ispat yapmadaki en yaygın yöntemin, ispatın hiçbir ters örnek barındırmadığının gösterilmesi olduğunu ifade etmiştir. Bu tarz ters örneklerde bulunması gereken özellikleri düşünmeye yönelik zorlukların, ters örnek üretme ve önemli ya da önemsiz özellikleri bilme yeteneklerine dayandığını belirtmiştir. Sonuçları yanlışlayan örnekleri kullanmada rahat olmadıkları sürece öğrencilerin, bu muhakemelerinin gelişme olasılığının çok az olduğunu vurgulamıştır. Bu bağlamda öğrencilerin ilgili derslerde ters örnekler üretebilecekleri öğrenme ortamlarının sağlanması önerilebilir.

Öğretmen adaylarının yanlış önermeye yönelik ürettikleri ürünlerin doğru ters örnek, yanlış ters örnek, ters örnek yok, ispatla yanlışlama, ispat kullanma, açıklama yapma, ispat ve örnekle doğrulama kategorileri altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarından Ahu ve Adem yanlış olduğunu düşündükleri önermeler için doğru ters örnekler üreterek ters örnek üretme becerisi en yüksek öğretmen adayları olmuşlardır. Aziz ise dört yanlış önerme için iki doğru ters örnek üreterek ortalama bir başarı yakalamıştır. Buna göre önermenin yanlış olduğunu düşünen öğretmen adaylarının çoğunlukla önermeler için ters örnekler üretebildikleri söylenebilir. İki öğretmen adayının (Aziz, Aysun) bir yanlış önerme için ürettikleri ters örneklerin geçersiz örnekler olduğu belirlenmiştir. İki öğretmen adayı da (Aziz, Buse) önermenin yanlış olduğunu göstermek için önermenin ispatını yapmaya çalışmışlar ya da önerme ile ilgili farklı bir ispatı kullanmaya çalışmışlardır. Buna göre başarı düzeyi yüksek olan öğretmen adaylarının ters örnek üretmede diğer öğretmen adaylarına göre daha başarılı oldukları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen kategoriler Ko ve Knuth'un (2009) çalışmalarından elde ettikleri kategorilerle benzerlik göstermiştir.

Yanlış önermeler için üretilen ürünlerin çoğunun önermeleri doğrulamaya yönelik olduğu belirlenmiştir. Önermelerin doğru olduğunu düşünen öğretmen adaylarının çoğu (%65) ispat yapmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bazıları ilgili ispatları yaptıklarını iddia etmiş, bir kısmı ise ispatlarını tamamlayamamışlardır. Önermelerin doğru olduğunu düşünen diğer öğretmen adayları, özel örnekler kullanarak gösterim yapmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Barış önermeleri doğrulamak için çoğunlukla özel örnekler kullanmıştır. Buna göre Barış'ın tümevarımsal ispat şeması doğrultusunda hareket ettiği söylenebilir. Harel ve Sowder'e (1998, 2007) göre, tümevarımsal ispat şemasındaki bir öğrenci iddianın doğru olduğunu bir ya da birkaç örneğin sonuçlarını değerlendirerek karar verir ya da cebirsel bir ifadenin doğruluğunu birkaç özel sayıyı ifadede yerine yazarak elde edilen sonuçlara göre ikna olur.

Ko ve Knuth (2009) üniversite öğrencilerinin yanlış önerme için ürettikleri ürünlerin yeterli (doğru ters örnekler), tamamlanmamış (mantıksal hatalı, doğru ters örnekler), yetersiz (yanlış ters örnekler), doğrulama (yanlış önermeyi çürütmek için ters örnek vermek yerine açıklama yapma) ve ispat (yanlış önermenin doğru olduğunu ispatlamaya çalışma) kategorileri altında toplandığını tespit etmiştir. Çalışmada elde edilen doğru ters örnek, yanlış ters örnek, açıklama ve ispat kategorileri literatürde mevcut olan kategoriler ile örtüşmektedir. Ayrıca çalışmada literatüre ek olarak ispatla yanlışlama (önermenin yanlış olduğunu ispattaki çelişkiyi ifade ederek gösterme), ispat kullanma (önermenin yanlış olduğunu farklı bir teoremi ispatlayarak göstermeye çalışma) ve örnekle doğrulama kategorileri tespit edilmiştir. İspatla yanlışlama kategorisinde ürün veren tek öğretmen adayı Aziz olmuştur. Aziz önermenin doğru olduğunu varsayıp ispatına başlamış, ispatında bir çelişki tespit edince elde edilen bu çelişmeye dayanarak önermenin yanlış olduğunu gösterdiğini ifade etmiştir. Aziz'in yaptığını iddia ettiği yanlışlama literatürde bir önermenin yanlışlığını göstermek için aksine örnek bulma yöntemi ile birlikte yer alan çelişme bulma yöntemine benzemektedir. Çelişme bulma yönteminde bir önermenin yanlış mı yoksa doğru mu olduğu bilinmiyorsa, bu önerme doğru varsayılarak önermeden bazı sonuçlar elde edilir. Elde edilen sonuçlar bilinenlerle ya da birbiri ile çelişirse önermenin yanlış olduğu sonucuna varılır (Akkaş vd., 1998). Aziz de çelişme yönteminde olduğu gibi önermeyi doğru varsayarak ispatına başlamış çelişki bularak değil ispat yaparak önermenin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Bu anlamda ilgili derslerde öğrencilerin çelişme bulma yöntemini kavrayabilmesi adına gerekli çalışmalar yapılabilir.

Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının yanlış örnekleri seçmede ve ters örnek üretmede güçlük yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin sahip oldukları güçlüklerin sebeplerinden bir tanesi ispat ağırlıklı derslerin öğretiminde uygulanan öğretim yöntemleri olabilir. Çünkü lisans matematik derslerinde birçok öğrenci, kendileri ispat ve ters örnek üretmek yerine gözlem yaparak pasif bir şekilde not almaktadır (Weber, 2004). Böylece öğrenciler son ürünü kopyaladıkları için ispat ve ters örnekleri değerlendirmek ve üretmek için gerekli anlayıştan uzak olmaktadırlar (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 1995). İspat ağırlıklı matematik lisans derslerinde yanlış önermelerin çürütülmesine yönelik bir tartışma yapılmadığı, öğrencilere çoğunlukla doğru önermelerin ispatları sunulduğu için (Buchbinder ve Zaslavsky, 2007) öğrencilerin çoğunun, önermeleri ve başkası tarafından yapılan ispatları doğru olduğunu değerlendirme eğiliminde oldukları belirlenmiştir (Smith, 2006). Bu çalışmada da öğrenciler genel olarak verdikleri kararların çoğunda önermelerin doğru oldukları yönünde görüş bildirmişlerdir. Bu anlamda ilgili derslerin öğretiminden sorumlu olan öğretim elemanları ve öğretmenlerin derslerinde yanlış önermelere yer vererek önermelerin doğruluk değerleri üzerine tartışma yapmaları yararlı olabilir. Bu tartışma sürecinde yer alacak olan ters örnek üretme aktiviteleri ile öğrencilerin ters örneklere değer vermeleri sağlanabilir ve ters örnek üretme becerileri geliştirilebilir. Ayrıca öğrencilerin ters örnek üretme becerileri farklı araştırma grupları ve matematiğin farklı alanları kullanılarak incelenebilir. Yapılacak araştırmalarda bu çalışmadan elde edilen sınıflamanın kullanılmasının veri analizinde kolaylık sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z., & Sabuncuoğlu, A. (1998). *Soyut matematik.* Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125-134.

Altun, M. (2013a). *Ortaokullarda (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi.* (9. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M. (2013b). *Eğitim fakülteleri ve sınıf öğretmenleri için matematik öğretimi.* (18. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M. (2014). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için liselerde matematik öğretimi.* (5. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M., & Yılmaz, A. (2010). Lise öğrencilerinin parçalı fonksiyon bilgisini oluşturma ve pekiştirme süreci. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(1), 311-337.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2007). How to decide? Students' ways of determining the validity of mathematical statements. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 561–570). Larnaca, Cyprus.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In M. De Villiers (ed.) *Rethinking Proof with Sketchpad*, pp. 3-10.

Galbraith, P.L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 1-28.

Gelbaum, B.R., & Olmsted, J. M. (2003). *Counterexamples in analysis*. Mineola: Dover Publications.

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. InA. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. Ill* (pp. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof.* Unpublished Doctoral Dissertation. Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9539653).

Harel, G, & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. InA. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol. 2). NCTM.

Irmak, H. (2008). *Soyut matematik.* Ankara: Pegem Akademi.

Ko, Y.Y. (2010). *Proofs and Counterexamples: Undergraduate Students' Strategies for Validating Arguments, Evaluating Statements, and Constructing Productions*. Unpublished Doctoral Dissertation, Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3437186)

Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68-77.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic ofmathematical discovery.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Merriam, S.B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. Ed. S. Turan). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaokul Matematik Dersi 5-8 Sınıflar Öğretim Programı.* Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.

Riley, K.J. (2003). *An investigate of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proofand refutations.* Unpublished Doctoral Dissertation, Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3083484)

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(2)*, 295–319.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

Smith, J.C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 73-90.

Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237-253.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-1 19.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 431-459.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2-3), 200-208.

Whiteley, W. (2009). Refutations: the role of counter-examples in developing proof. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, vol. 2* Taipei, Taiwan (pp. 257-262).

Williams, E. (1979). *An investigation ofsenior high school students ' understanding ofthe nature of mathematical proof.* Unpublished Doctoral Dissertation, University of Alberta, Edmonton.

Yasuhiro, S. (1991). *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Atlanta.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme (10. Baskı).* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 67-78.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In Olivier A. & Newstead K. (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225-232). Stellenbosch, South Africa.

Preservice Mathematics Teachers' Skills of Constructing Counterexamples

Muhammet DORUK[4], Abdullah KAPLAN[5]

Extended Abstract: Mathematics is a universal language that has specific symbols and terminology, and whose concepts have meaningful relations among them (The Ministry of National Education [MEB], 2013). Studying the relations among mathematical concepts to reach general conclusions (generalities) is part of mathematical practice. The method in generating generalities is specific to mathematics and is referred to as proving. (Altun, 2013a). A mathematician tries to prove a notion concerning a generality, and this notion becomes applicable to all examples (Altun, 2014).

Proofs and counterexamples are important actors in questioning the truth of mathematical knowledge. According to Gelbaum and Olmsted (2003), mathematics consists of proofs and counterexamples and mathematical discovery is direct toward the formulation of proofs and construction of counterexamples as the two major goals In this regard Ko (2010) stated that the primary purpose of proofs and counterexamples is to show the correctness or falsehood of a statements in mathematics. According to Ko and Knuth (2009), proof and refutation are important skills in advanced mathematical thinking, since they are helpful in showing whether the statements are true or false and why. As it is understood from this, refuting of statements is as important activity as confirmation of statements in mathematics. Refuting a mathematical statements is as important as proving it, and it has an important place in development of mathematics (Lakatos, 1976). Refuting a mathematical statements is usually done through counterexamples (Altun, 2014; Lampert, 1990; Yasuhiro, 1991).

Literature review reveals that researchers mostly focus on validating the statements, and that studies on falsifying the statements are limited. Studies show that, although university students and mathematics teachers have many courses in their college level mathematics education on mathematical proving, they have difficulties in constructing counterexamples to falsify statements (Riley, 2003; Zaslavsky and Peled, 1996; Zaslavsky and Ron, 1998). It was reported that students regard a valid counterexamples for a statement as an exemption of the statement, and think that the statement still holds (Williams, 1979; Zaslavsky and Ron, 1998). Similarly, Galbraith (1981) stated that students don't know that a single counterexample is sufficient to invalidate a statement.

Mathematics education at secondary schools in Turkey aims to equip students with the skill to validity of the mathematical arguments (MEB, 2013). To teach students these skills require mathematics teachers having the knowledge how to defend valid mathematical arguments. There is a need for works at teacher education institutions to identify how preservice mathematics teachers may be equipped with the skill to demonstrate the validity or invalidity of mathematical arguments. Present study attempts to identify the constructing counterexamples skills of preservice primary school mathematics teachers.

Qualitative research approach is adopted in this study. The study is a sample of a case study, a design of qualitative research. Participants of the study are a total of eight junior preservice mathematics teachers studying at the primary mathematics education program of a state university in the East Anatolia Region during the spring semester of 2013-2014 academic year. Research group was selected by criterion sampling. Participating preservice teachers were represented in the research with an alias assigned to each one. Aliases of first group preservice teachers with average academic success are, in

[4] Hakkari University, mdoruk20@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3085-1706

[5] Atatürk University, akaplan@atauni.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6743-6368

order of success, Barış, Belma, Bilge and Buse. Aliases of the other group preservice teachers with higher academic success are, in order of success, Adem, Ahu, Aysun and Aziz.

To identify the constructing counterexample skills of preservice teachers, task-based clinical interviews were used. Preservice teachers were interviewed four times with the semi-structural interview forms. There were four incorrect statements in the interview forms, in the exact order of functions, series, limit-continuity and derivatives. All required formal definitions for proving the statements were also given in the forms. Preservice teachers were asked to identify these statements as true or false and then to prove their decisions were right.

Following the decisions given by the preservice teachers on their being true-false, their product of proofs to show the validity of their decisions were analyzed. Verbal and written expressions of preservice teachers were assessed together. Part of preservice teachers defended that the statements were wrong and the other part decided the otherwise and produced proofs on that direction.

It was found that preservice teachers had difficulties in identifying that the statements were false. After the examination of the assessments done by the preservice teachers on the false statements, 15 decisions were stated that the statement was false whereas 17 decisions were taken that the statement was true. More than half of the products of preservice teachers who think that statements were wrong had valid counterexamples. Products produced by preservice teachers on the false statements were grouped under "true counterexample, false counterexample, no counterexample, falsifying with proof, using proof, making explanation, validation by proof and example" categories. Most of the products produced for false statements were for validating the statements. Most of the preservice teachers who think that statements were true tried to prove statements. Other preservice teachers who think that statements were true used special examples to demonstrate that they were right. These categories generated in the research have the categories identified by Ko and Knuth (2009). The categories of invalidating with proof, using proof and validating with example were also determined in this study.

Key Words: *Preservice mathematics teachers, Counterexamples, Calculus, Mathematics education.*