

İki Parçalı Eşleştirme ile Maksimum Akış

Maximum Flow with Bipartite Matching

Furkan ÖZTEMİZ* 

Yazılım Mühendisliği Bölümü, İnönü Üniversitesi, Malatya, Turkey

(furkan.oztemiz@inonu.edu.tr)

Received:Nov.5, 2023

Accepted:Dec.1, 2023

Published:Dec.20, 2023

Özetçe— Bu çalışmada bipartite ağlar üzerinde modellenebilen tüm ağlardaki maksimum akış probleminin çözümü gerçekleştirilmiştir. Maksimum akış(flow) problemi bir ağ üzerindeki kaynak(source) ve hedef(sink) düğümleri arasında ulaşılan maksimum akış kapasitesini ifade etmektedir. Maksimum akış probleminin çözümü için farklı yaklaşım türleri mevcuttur. Bu popüler yöntemlerden bir tanesi eşleştirme(matching) yöntemleridir. Bu çalışmada özgün bir yaklaşım ile bipartite çizge türlerine yönelik maksimum akış değerleri hesaplanması hedeflenmiştir. Çözüm için bipartite çizgelerde optimum matching sonuçlarını veren Malatya Matching algoritması(MMA) kullanılmıştır. Bu çalışmada Erdos Renyi model ile üretilen ağırlıksız rastgele bipartite çizgelerde uygulama gerçekleştirilmiş ve optimum sonuçlara ulaşılmıştır. Algoritmanın uygulanması ve ağların tasarlanmasında R programlama dili ve igraph kütüphanesi kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Maksimum Bipartite Eşleştirme, Maksimum Akış, Malatya Eşleştirme Algoritması

Abstract— In this study, the solution of the maximum flow problem in all networks that can be modeled on bipartite graphs has been realized. The maximum flow problem refers to the maximum flow capacity reached between the source and sink nodes on a network. There are different types of approaches for solving the maximum flow problem. One of the popular methods is the matching approach. This study aims to calculate the maximum flow values for bipartite graph types with an original approach. For the solution, the Malatya Matching Algorithm (MMA), which gives optimum matching results in bipartite graphs, has been used. In this study, applications have been carried out on unweighted random bipartite graphs produced with the Erdos Renyi model, and optimum results have been achieved. The R programming language and the igraph library have been used in the implementation of the algorithm and the design of the networks.

Keywords : Maximum Bipartite Matching, Maximum Flow, Malatya Matching Algorithm

1. Giriş

Maksimum akış problemi çizge teorisinin önemli problemleri arasındadır. Literatürde herhangi bir çizgedeki optimum akış değerlerinin tespit edilmesi NP-Complete problem türü olarak tanımlanmıştır. Özel çizgelerde ise çözüme polinomal zamanlarda ulaşılabilir. Bu özel çizgeler arasında ilk sıralarda bipartite çizgeler gösterilebilir. Bipartite çizge yapısına sahip ağlarda maksimum flow probleminin çözümü için bipartite matching yöntemleri yoğun olarak tercih edilmektedir. Bu çözüm yöntemi literatürde kabul gören etkili bir yaklaşımdır. Bu çalışmada literatürde yeni olan etkili bir matching algoritması olan Malatya Matching algoritması(MMA) kullanılmıştır. MMA bipartite çizge türlerinde optimum eşleştirme sonuçlarını üreten bir algoritmadır. Bu çalışmada MMA'nın maksimum akış sonuçlarını üretmedeki başarısı araştırılmıştır. Erdos Renyi model ile üretilen çok sayıda rastgele bipartite ağ üzerinde testler gerçekleştirilmiştir.

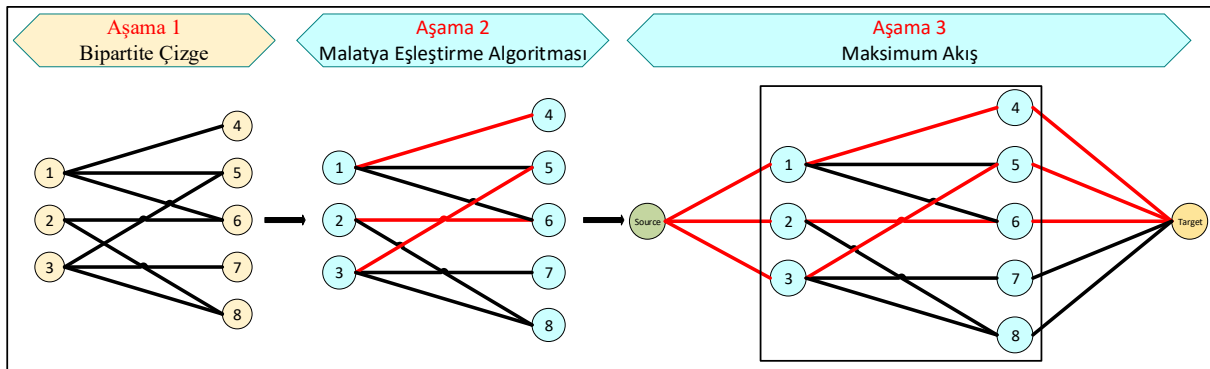
Maksimum akış problemi literatürde çok farklı alanlarda işlenmiş ve gerçek dünya problemlerine çözüm üretmiştir. Bipartite eşleştirme yaklaşımı ile Maksimum akış probleminin çözümüne dair bir çok çalışma mevcuttur. Literatürdeki çalışmalar maksimum akış ve bipartite eşleştirme başlıkları altında bağımsız olarak özetlenmiştir.

Özellikle ulaşım ağındaki maksimum akış değerinin belirlenmesi[1], maksimum güvenli akışın sağlanacağı hız oranlarının belirlenmesi[2] üzerine yapılan çalışmalar oldukça popülerdir. Ayrıca ulaşım ağında kesintilere neden olacak darboğaz noktalarının tespit edilmesi için geliştirilen etkili yöntemler mevcuttur [3,4]. Gerçek kentlere ait ulaşım ağları tasarlanarak darboğaz noktalarının tespit edilmesi ile seyahat hız verileri[5], tıkanıklık maliyeti[6] ve PMFA[7] ile hava kirliliğinin tespit edilmesi gibi analizler gerçekleştirilmiştir. Maksimum akış yüksek ölçekli ağlarda trafik sıklığının önemini vurgulamak için[8] ve trafik taşıma kapasitesiyle sinyal zamanlama parametreleri arasında ilişki kurmak için kullanılmıştır [9]. Yolcu taşımacılığı ağı üzerinde kapasite esnekliği belirlenerek bireylerin rota seçimine sahip olmalarına imkân sağlanmıştır [10]. Power networklerde her durum için ağın arızalara karşı dirençli davranış gösterdiği kritik kapasite değerleri belirlenmiştir[11]. Elektrik iletim hatlarındaki maksimum elektrik taşıma kapasitelerinin tespiti için Ford Fulkerson yöntemini uygulanmıştır [12]. Bir diğer çalışmada bilinen kenar kapasitesinde bir üretim akış ağı verildiğinde ağın ulaşabileceği maksimum üretim oranının belirlenmesi amaçlanmıştır [13]. TDMA tabanlı kablosuz ağlarında akış gecikme kontrolünü desteklemek için, iki aşamalı bağlantı zamanlaması (2SLS) [14] adı verilen esnek bir bant genişliği tahsisi ve koordinesiz zamanlama şeması önerilmiştir. Doğalgaz boru hattı ağının taşıma kapasitesinin kırılma analizi[15] gerçekleştirilmiş ve kapasite farklılıkları çizge teorisi perspektifi ile açıklanmıştır [16]. Literatürdeki bu çalışmalar özel olmayan gerçek dünya problemleri gözetilerek oluşturulan networklerde uygulanmıştır. Bu çalışmada kullanılan maximum akış yöntemi ise bipartite çizgeler ile modellenen ağlarda optimum sonuçları üretmektedir. Bipartite eşleştirme ile ilgili çalışmalar incelendiğinde bir çok problem türüne özgü kullanım senaryosu olduğu görülmektedir. İki parçalı[17, 18, 19] çizgeler üzerinde geliştirilen ve özellikle gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde kullanılan birçok eşleştirme yöntemi bulunmaktadır. İki parçalı grafikler başlığı altında hiperküp[20] ve dikdörtgen[21] çizgelerde polinomal zamanda çözüm üreten algoritmalar geliştirilmiştir. Bipartite eşleme maksimum akış tespiti için gerçekleştirilen özgün çalışmalar bulunmaktadır[22,23]. Bu çalışmalar bipartite olarak tasarlanan ağ yapılarında maksimum akış değerlerinin başarılı bir şekilde gerçekleştiğini göstermektedir.

Çalışmada kullanılan bipartite eşleme yöntemi iteratif ve robust çözüm sunan etkili bir yöntemdir. Malatya eşleştirme algoritması, maksimum akış değerlerinin tespit edilmesi için ilk defa bu çalışmada sunulmuştur. Elde edilen başarılı sonuçlar sayesinde literatüre önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

2. Materyal ve Metod

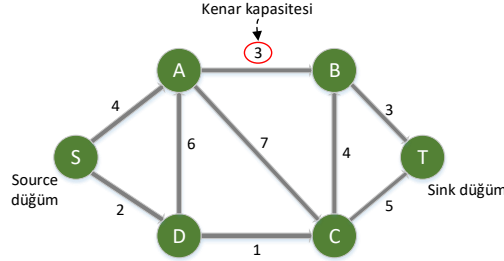
Çalışma 3 temel aşamada özetlenmiştir. Şekil 1’de gösterildiği üzere Aşama 1’de analizde kullanılacak bipartite ağ oluşturulmaktadır ve Malatya Matching algoritmasının uygulanacağı forma dönüştürülmektedir. Bipartite çizge bigraph olarak da adlandırılır. Bigraph aynı kümede bitişik olmayacak şekilde, iki ayrı kümeye ayrılmış bir dizi düğüm kümesidir. Aşama 2’de tasarlanan ağ üzerinde Malatya eşleştirme algoritması uygulanmıştır. MMA eşleştirme sürecinde Malatya merkezlilik değerlerini kullanmaktadır. Malatya merkezlilik yöntemi düğümler üzerinde uygulanmak üzere tasarlanmıştır. Bu nedenle kenar eşleştirmelerinde kullanabilmek için bipartite çizgenin bu aşamada line çizgesi oluşturulmaktadır. Daha sonrasında oluşturulan line çizge üzerinde malatya merkezlilik algoritması uygulanarak kenar bağlantılarının baskınlık değerleri hesaplanmaktadır. Elde edilen değerler neticesinde Malatya eşleştirme algoritması bu aşamada optimum maksimum eşlemeyi gerçekleştirmektedir. Aşama 3’de ise bipartite ağ üzerindeki kenar eşlemeleri tespit edilmiştir. Elde edilen sonuçlar bipartite ağlara özgü en uygun eşleştirme sonuçlarını ifade etmektedir. Bu noktadan kıyasla tespit edilen en uygun bipartite eşleştirme sonuçları ilgili ağ için maksimum akış ağını temsil etmektedir.



Şekil 1. Grafısel özet

2.1. Maksimum Akış

Maksimum akış probleminin amacı, verilen akış ağında tek bir kaynaktan tek bir hedefe maksimum akışı bulmaktır [24]. Bu problem çizge teorisinde polinomsal zamanda çözülemeyen NP-Complete problem türü olarak tanımlanmaktadır [25]. Şekil 2 deki S vertex'i kaynak noktasını, T ile belirtilen vertex ise hedef nokta olan sink noktasını ifade etmektedir. Çizge üzerindeki ayrıt ağırlıkları ise ilgili kenar noktalarının kapasite bilgilerini vermektedir [34]. Çizgeden'de anlaşıldığı üzere verilen çizge yönlü bir çizgedir. Belirtilen yönler çizgedeki akışın yönünü temsil etmektedir. Örnek çizgede S düğümünden, T düğümüne aktarılacak maksimum miktarı bulabilmek için darboğaz noktalarının tespit edilmesi önemlidir.



Şekil 2. Maximum akış ağı

$G=(V,E)$ yönlendirilmiş bir çizgedir. E çizgedeki kenarları ifade ederken V düğümleri ifade etmektedir. Akış ağındaki her e kenarı, negatif olmayan bir sayı olan bir c_e kapasitesine sahiptir. Ağ ayrıca $s \in V$ tek bir kaynak düğümü ve $t \in V$ tek bir sink düğümünden oluşmaktadır [26].

Her $e \in E$ için, $0 \leq f(e) \leq c_e$ dir.

s ve t dışındaki her v düğümü için,[27]

$$\sum_{e \text{ into } v} f(e) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e) \quad (1)$$

Flow conservation: her $v \in V \setminus \{s, t\}$ düğümünde gelen akışlar giden akışlar ile dengelenir. Yani tüm v den geçen akışlar denklem 1 deki gibi sınırlandırılmalıdır [28].

$$\left(\sum_{e_n \in N(v)} p(e_n) \right) - p_s(v) + p_t(v) = 0 \quad (2)$$

Denklem 2'de $N(v) \subset E$, v 'yi komşu düğümlere bağlayan kenarlar kümesidir. Maksimum akış problemi, kaynaktan izin verilen en büyük akış miktarını bulmayı çalışır.

$$\max_{p_s} \sum_{v \in V \setminus \{s, t\}} p_s(v) \quad (3)$$

Denklem 3'de verildiği üzere $e \in E$ kenarı üzerindeki bir $p(e)$ akışı, karşılık gelen $C(e)$ kapasitesine ulaştığında, bu duruma doymuş, aksi durumda doymamış denilmektedir [28].

2.2. Maksimum ve bipartite eşleştirme

Ağırlıklandırılmamış ve yönlendirilmemiş bir $G=(V, E)$ için, G çizgesindeki eşleşen M kümesi, hiçbir döngü içermeyen, bitişik olmayan kenar kümesini temsil eder [29]. Başka bir ifade ile, hiçbir kenarın ortak köşelerle kesişimi yoktur. Maksimum eşleştirme, mümkün olan en fazla sayıda kenara sahip olmasıdır [29]. Çizgede birden fazla maksimum eşleştirme olabilir. Bir G çizgesinin eşleştirme sayısı, $\nu(G)$, maksimum eşleştirmenin boyutudur. Eşleştirme ile maksimum eşleştirme arasındaki ilişkiyi şu şekilde ifade edebiliriz. M herhangi bir eşleşen küme ve M' maksimum boyuttaki eşleşen küme olsun. Bu ifadeler göre M kümesinin büyüklüğü eşleşen $|M|$ sayısından büyük veya ona eşit olmalıdır. $M \geq |M'|$. Eşleştirmeye ilgili bir diğer önemli ifade ise mükemmel eşleştirmedir. Mükemmel eşleştirme, çizgedeki tüm vertexlerin eşleştirilmesi durumudur. Yani, çizgenin her köşesi eşleşmenin bir kenarıyla çakışıyorsa eşleştirme mükemmeldir. Eğer $|E| = |V|/2$ ise uyum mükemmeldir [30].

İki parçalı çizgedeki eşleştirme, hiçbir iki kenarın bir düğümü paylaşmayacağı şekilde seçilen bir kenar kümesidir. Maksimum eşleştirme, maksimum boyutun (maksimum kenar sayısı) eşleştirilmesidir. Maksimum eşleştirmede, eğer buna herhangi bir kenar eklenirse, bu artık bir eşleştirme değildir. Belirli bir iki parçalı çizge için birden fazla maksimum eşleştirme olabilir.

2.3. Malatya eşleştirme(matching) algoritması

Malatya eşleştirme algoritması literatüre yeni kazandırılan malatya merkezlilik yöntemini kullanan, tüm çizge türlerinde başarılı eşleştirme sonuçları üreten etkili bir yöntemdir. Malatya merkezlilik algoritması düğümlerin baskınlık değerini tespit etmek için geliştirilmiştir [31]. Eşleştirme işlemleri ise kenar bazlı gerçekleştirildiği için malatya eşleştirme algoritması çizgelerin line çizgesi üzerinden gerçekleştirilmektedir. MMA algoritmasının matematiksel sözde kodu Tablo 1'de verilmiştir. MMA algoritmasının en özgün tarafı kendine has özellikleri ile

geliştirilen malatya merkezlilik algoritmasıdır. Bu yöntem kendine özgü yaklaşımıyla çizgedeki düğümlerin (vertex noktalarının) baskınlık değerini hesaplar. Bir düğümün merkezlilik değeri hesaplanırken, ilgili düğümün derecesinin, komşu düğümlerin derecesine oranı belirlenir. Daha sonra elde edilen bu oransal değerler toplanarak ilgili köşenin Malatya merkezlilik değeri hesaplanır. Malatya merkezlilik algoritması literatürde herhangi bir çizgedeki minimum köşe örtüsünü [32] ve maksimum bağımsız küme [33] üyelerini belirlemek için daha önce kullanılmıştı. Bir v_i köşesinin Malatya merkezlilik değeri $\Psi(v_i)$ sembolü ile gösterilir. Denklem 1 algoritmanın formülünü içermektedir. v_i , i düğüm noktasını temsil ederken, $N(v_i)$ i düğüm noktasının bitişik düğümlerini temsil eder. v_i düğüm noktasının düğüm derecesi $d(v_i)$ ile gösterilir. Algoritmanın sözde kodu aşağıda gösterilmiştir (Algoritma 1).

$$\Psi_1(v_i) = \sum_{\forall v_j \in N(v_i)} \frac{d(v_i)}{d(v_j)}, 1 \leq i \leq |V| \text{ and } 1 \leq j \leq |V|, i \neq j \quad (1)$$

Tablo 1. Malatya Eşleştirme Algoritmasının sözde kodu

Maximum Eşleştirme Algoritması(A, Ψ_1)	
Giriş: G bipartite çizgesinin komşuluk matrisi A dır. G = (V, E)	// G çizgesi
G = Line(Current Graph) G çizgesi mevcut çizgenin line çizgesini ifade etmektedir.	
Output: $V_{ind} \subseteq V$, V_{ind} düğüm kümesidir ve bağımsız vertex kümesinin çözümünü belirtir.	
1.	$V_{ind} \leftarrow \emptyset$
2.	While $E \neq \emptyset$ do
3.	$i \leftarrow 1, \dots, V $
4.	$\Psi_1(v_i) = \sum_{\forall v_j \in N(v_i)} \frac{d(v_i)}{d(v_j)}$
5.	$V_{ind} = V_{ind} \cup \{\arg \min(\Psi_1(v_i))\}$
6.	$V = V - \{v_i\}$, and $E = E - \forall (v_i, v_j) \in E$
7.	$V = V - \{N(v_i)\}$, and $E = E - \forall (N(v_i), v_j) \in E$
8.	Output = V_{ind}
9.	MatchingSet = Edge(Output _{id})

Bipartite çizgelerde maksimum eşleştirme ve maksimum akış problemlerinin matematiksel ispatları aşağıdaki bölümde açıklamalı olarak verilmiştir.

Teorem : Tam iki parçalı çizgeler için önerilen algoritma optimum çözümleri bulmaktadır.

Kanıt: İspat için herhangi bir bipartite çizgeden başlanabilir.

Adım: $G(V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, m : alt vertex kümesinin üye sayısı, n : üst vertex kümesinin üye sayısı, V_1 : Alt küme vertexleri, V_2 : Üst küme vertexleri.

$$\forall_v = m+n$$

$$\forall_{V_i} \in V_1, \Psi(V_i) = \frac{n}{m} \cdot n = \frac{n^2}{m}$$

$$\forall_{V_j} \in V_2, \Psi(V_j) = \frac{m}{n} \cdot m = \frac{m^2}{n}$$

$m > n$ için

$\frac{m^2}{n} > \frac{n^2}{m}$, $V_j > V_i$, Maksimum bağımsız küme(MIS) sayısı en düşük malatya merkezlilik değerinden seçilmektedir. MIS üyesi bu durumda V_i den seçilmiştir.

$$Komşu(V_i) = V_2 = n;$$

$\forall_v - V_i - n = m-1$ (Grafik tam iki parçalı olduğundan, silme işleminden sonra kalan düğümler izole edilmiş düğümlerdir.)

$m-1$ izole edilmiş MIS'in diğer üyelerini temsil etmektedir.

$$MIS = 1(\text{ilk üye}) + m-1(\text{izole vertex}) = m$$

* Bu ispatın sonucunda tam iki parçalı çizgelerde MIS kümesi alt ve üst köşe kümelerinden daha büyük olan küme olarak ifade edilir. Alt ve üst köşe kümeleri arasında en az köşe sayısına sahip kümeye kadar maksimum eşleştirme elde edilir. Başka bir deyişle eşleşen sayı, kümedeki daha az köşeye sahip eleman sayısına eşittir. Tam iki parçalı grafiklerde, MIS kümesinin komşu kümesi eşleşen sayıyı verir.

$$\text{Maksimum akış değeri} = \text{Eşleşme sayısı} = \text{Komşu}(m) = n$$

$m < n$ için

$\frac{n^2}{m} > \frac{m^2}{n}$, $V_j < V_i$, Maksimum bağımsız küme(MIS) sayısı en düşük malatya merkezlik değerinden seçilmektedir. MIS üyesi bu durumda V_j den seçilmiştir.

$$\text{Komşu}(V_j) = V_1 = m;$$

$\forall_v - V_j - m = n-1$ (Grafik tam iki parçalı olduğundan, silme işleminden sonra kalan düğümler izole edilmiş düğümlerdir.)

$n-1$ izole edilmiş düğüm MIS'in diğer üyelerini temsil etmektedir.

$$MIS = 1(\text{ilk üyeler}) + n-1(\text{izole vertexler}) = n$$

$$\text{Maksimum akış değeri} = \text{Eşleşme sayısı} = \text{Komşu}(n) = m$$

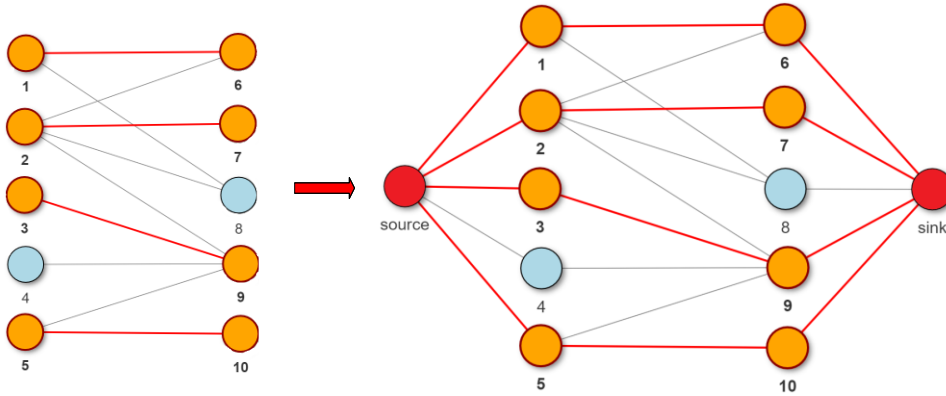
for $m = n$

$\frac{n^2}{m} = \frac{m^2}{n}$, $\Psi(V_i) = \Psi(V_j)$, Bu durumda, eğer ilk seçim (V_i) den ise, çözüm " **$m > n$** " deki gibidir, eğer (V_j) den ise , çözüm " **$m < n$** " olduğu gibidir.

$$\text{Maksimum akış değeri} = \text{Eşleşme sayısı} = m = n \blacksquare$$

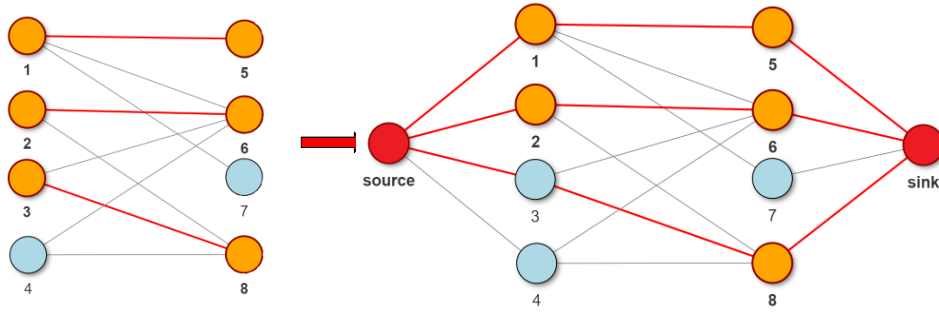
3. Uygulama

MMA algoritmasının bipartite çizgelerde ürettiği eşleştirme sonucu maksimum akış değerlerinde optimum sonucu vermektedir. Şekil 3'de verilen 10 düğüm ve 10 kenar bağıntısından oluşan örnek bipartite çizge incelendiğinde MMA tarafından 4 kenar eşleşmesi ile eşleştiği görülmektedir. Şekil 3 deki görselde belirtilen çizgenin kaynak ve hedef düğüm bağlantıları ile bir bütün olarak düzenlendiğinde, source noktasından sink noktasına maksimum 4 kenar üzerinden akış sağlayabilmektedir. Örnek olarak kullanılan ağırlıksız ve yönsüz çizge için bu sonuç optimum değer sağlamaktadır.



Şekil 3. Maksimum bipartite eşleştirme ve maksimum akış

Şekil 4'de verilen örnek çizge, 8 vertex ve 9 kenar bağıntısında sahiptir. MMA ile kaynak ve hedef düğümleri arasında sağlanan maksimum akış değeri 3 olarak tespit edilmiştir. Tespit edilen sonuç örnek çizge için optimum değerdir.



Şekil 4. Maksimum bipartite eşleştirme ve maksimum akış

Ayrıca çalışmada çok sayıda rastgele bipartite çizgeler oluşturularak yöntemin başarısı ve doğruluğu test edilmiştir. Rastgele bipartite çizgeler oluşturmak için Erdos Renyi model kullanılmıştır. Erdos Renyi model 3 farklı parametre değeri ile çizgeleri üretmektedir. Bu parametrelerden n_1 ve n_2 değerleri bipartite çizgenin alt ve üst vertex kümelerini ifade etmektedir. p değeri ise oluşturulan bipartite çizgedeki vertexlerin birbirleri ile bağlantı kurma ihtimallerini vermektedir. Tablo 2’deki değerler incelendiğinde n_1 - n_2 başlığı altındaki 3-6 ifadesi bipartite çizgenin alt vertex kümesinin 3, üst vertex kümesinin 6 olduğunu göstermektedir. V sütunu toplam vertex sayısını ifade eder. p değerinin 0.3 olması durumunda üretilen 3-6 bipartite çizgedeki kenar sayısı 5 ve bu değerler için üretilen çizgedeki maksimum akış değeri 3 olarak tespit edilmiştir. $p=1$ için çizge tam bağlı bipartite çizgeye dönüşmektedir. Tam bağlı çizge içinde maksimum akış değeri 3 olarak tespit edilmiştir. Bir diğer örnek olan 10-13 için analiz sonuçları incelendiğinde 23 vertex ve $p=0.3$ değeri için 36 kenara sahiptir. Maksimum bipartite matching yani akış değeri bu çizgede 9 olarak tespit edilmiştir. $p=0.9$ değeri için ise 121 kenar bağıntısı üretilmiştir ve maksimum akış değeri 10 olarak tespit edilmiştir.

Tablo 2. Rastgele üretilen bipartite çizgeler üzerindeki maksimum akış değerleri

n_1 - n_2	V	$p=0.3$ E	Max Akış	$p=0.6$ E	Max Akış	$p=0.9$ E	Max Akış	$p=1$ E	Max Akış
3-6	9	5	3	8	3	17	3	18	3
5-8	13	14	5	22	5	34	5	40	5
6-8	14	13	5	32	6	42	6	48	6
8-4	12	12	4	17	4	29	4	32	4
10-13	23	36	9	87	10	121	10	130	10
15-20	35	97	15	187	15	271	15	300	15
20-15	35	92	15	176	15	271	15	300	15
20-20	40	121	20	240	20	354	20	400	20
35-25	60	258	25	537	25	797	25	875	25
40-60	100	737	40	1482	40	2169	40	2400	40

Gerçekleştirilen test sonuçları analiz edildiğinde malatya matching algoritmasının bipartite çizgelerde optimum sonuç vermektedir. Bu durumda bipartite çizgeler üzerinde gerçekleştirilen maksimum akış değerinin optimum olarak tespit edilmesini garanti etmektedir. Diğer bir ifade ile rastgele olarak üretilen bipartite çizgelerde gerçekleştirilen test sonuçlarına göre MMA optimum maksimum akış değerini tespit etmektedir.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada bipartite ağlara özel maksimum akış değerlerinin tespit edilmesi üzerine bir uygulama gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen analiz işlemleri için literatüre yeni kazandırılan Malatya matching algoritması(MMA) kullanılmıştır. MMA bipartite ağlar üzerinde optimum eşleme sonuçları veren etkili bir algoritmadır. Maksimum akış değerinin tespit edilmesi için ilk defa bu çalışmada uygulanmıştır. Bipartite ağlarda maksimum akış değerleri bipartite eşleştirme olarak ifade edilebilir. MMA’nın optimum maksimum akış değerini sağladığını doğrulamak için 42 farklı test işlemi gerçekleştirilmiştir. Rastgele üretilen çizgeler için Erdos Renyi model çizge üretici kullanılmıştır. Çalışmada çok sayıda rastgele bipartite ağlar üretilmiştir. Tüm test işlemlerinde optimum maksimum akış değeri tespit edilmiştir.

Kaynakça

- [1] Akhmediyarova, A., Kassymova, D., Utegenova, A. & Utepbergenov, I. (2016). Development and research of the algorithm for determining the maximum flow at distribution in the network. *Open Computer Science*, 6(1), 213-218. <https://doi.org/10.1515/comp-2016-0017>.
- [2] Moore, E.J., Kichainukon, W., & Phalavonk, U. (2013). Maximum flow in road networks with speed-dependent capacities – application to Bangkok traffic. *Songklanakarin Journal of Science and Technology (SJST)*, 35, 489-499.
- [3] Xu Sun, Zixiu Bai, Kun Lin, Pengpeng Jiao and HuaPu Lu, "Optimization Model of Traffic Sensor Layout considering Traffic Big Data ", *Journal of Advanced Transportation*, Volume 2020, <https://doi.org/10.1155/2020/8845832>.
- [4] Michael G.H. Bell, Fumitaka Kurauchi, Supun Perera, Walter Wong, Investigating transport network vulnerability by capacity weighted spectral analysis, *Transportation Research Part B: Methodological*, Volume 99, 2017, Pages 251-266, <https://doi.org/10.1016/j.trb.2017.03.002>.
- [5] Vincenza Torrisi, Matteo Ignaccolo, Giuseppe Inturri, Analysis of road urban transport network capacity through a dynamic assignment model: validation of different measurement methods, *Transportation Research Procedia*, Volume 27, 2017, Pages 1026-1033, <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2017.12.135>.
- [6] C. Li, W. Yue, G. Mao and Z. Xu, "Congestion Propagation Based Bottleneck Identification in Urban Road Networks," in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 5, pp. 4827-4841, May 2020, doi: 10.1109/TVT.2020.2973404.
- [7] Sreeja Kamishetty, Soumya Vadlamannati, Praveen Paruchuri, Towards a better management of urban traffic pollution using a Pareto max flow approach, *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, Volume 79, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.trd.2019.11.023>.
- [8] Noraini Abdullah, Ting kien Hua. "Traffic Congestion Problem In Kota Kinabalu , Sabah Using Ford-Fulkerson Algorithm And Max Flow-Min Cut Theorem", April 2017, International Conference on Business, Tourism & Technology, AnCasa Residence, Port Dickson, Negeri Sembilan Volume: 2
- [9] Yuhong Gao, Zhaowei Qu, Xianmin Song, Zhenyu Yun, Modeling of urban road network traffic carrying capacity based on equivalent traffic flow, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Volume 115, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2021.102462>.
- [10] Anthony Chen, Panatda Kasikitwiwat, Modeling capacity flexibility of transportation networks, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Volume 45, Issue 2, 2011, Pages 105-117, <https://doi.org/10.1016/j.tra.2010.11.003>.
- [11] R. Ghanbari, M. Jalili and X. Yu, "Analysis of cascaded failures in power networks using maximum flow based complex network approach," *IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2016, pp. 4928-4932, doi: 10.1109/IECON.2016.7793826.
- [12] Merve Bulut, Evrencan Özcan, Optimization of electricity transmission by Ford–Fulkerson algorithm, *Sustainable Energy, Grids and Networks*, Volume 28, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.segan.2021.100544>.
- [13] Y.M. Omar, P. Plapper, Maximum Flow of Complex Manufacturing Networks, *Procedia CIRP*, Volume 86, 2019, Pages 245-250, <https://doi.org/10.1016/j.procir.2020.01.005>.
- [14] Y. -C. Tu, M. C. Chen and Y. S. Sun, "A Two-Stage Link Scheduling Scheme for Variable-Bit-Rate Traffic Flows in Wireless Mesh Networks," in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 13, no. 11, pp. 6232-6244, Nov. 2014, doi: 10.1109/TWC.2014.2358591.
- [15] WuChang Wang, Yi Zhang, YuXing Li, Chengsong Liu, Shiyong Han, Vulnerability analysis of a natural gas pipeline network based on network flow, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Volume 188, 2020, 104236, <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2020.104236>.
- [16] Huai Su, Enrico Zio, Jinjun Zhang, Xueyi Li, A systematic framework of vulnerability analysis of a natural gas pipeline network, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 175, 2018, Pages 79-91, <https://doi.org/10.1016/j.res.2018.03.006>.
- [17]- Zhang Y, Lin H (2021) Perfect matching and distance spectral radius in graphs and bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics* Volume 304 Pages 315-322. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.08.008>

- [18]- Datta S, Kulkarni R, Tewari R, Vinodchandran NV (2012) Space complexity of perfect matching in bounded genus bipartite graphs. *Journal of Computer and System Sciences* Volume 78 Issue 3 Pages 765-779. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2011.11.002>.
- [19]- Monnot J (2005) The labeled perfect matching in bipartite graphs. *Information Processing Letters* Volume 96 Issue 3 Pages 81-88. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2005.06.009>.
- [20]- Adams P, Mahdian M, Mahmoodian ES (2002) On the forced matching numbers of bipartite graphs. *Discrete Mathematics* Volume 281 Issues 1–3 Pages 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2002.10.002>.
- [21]- Kleinerman S (2006) Bounds on the forcing numbers of bipartite graphs. *Discrete Mathematics* Volume 306 Issue 1 Pages 66-73. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.001>.
- [22] Yong-Qing Cheng, Victor Wu, Robert Collins, Allen R. Hanson, and Edward M. Riseman "Maximum-weight bipartite matching technique and its application in image feature matching", *Proc. SPIE 2727, Visual Communications and Image Processing '96*, (27 February 1996); <https://doi.org/10.1117/12.233261>.
- [23] Cosmin Silvestru Negrușeri, Mircea BOGDAN Pacsoși, Barbara Stanley, Clifford Stein, and Cristian George Strat. 2008. Solving maximum flow problems on real-world bipartite graphs. *ACM J. Exp. Algorithmics* 16, Article 3.5 (2011), 25 pages. <https://doi.org/10.1145/1963190.2025381>.
- [24] Muqing Du, Xiaowei Jiang & Anthony Chen (2022) Identifying critical links using network capacity-based indicator in multi-modal transportation networks, *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, 10:1, 1126-1150, DOI: 10.1080/21680566.2021.2023371.
- [25] İbrahim Akgün, Barbaros Ç. Tansel, R. Kevin Wood, The multi-terminal maximum-flow network-interdiction problem, *European Journal of Operational Research*, Volume 211, Issue 2, 2011, Pages 241-251, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.12.011>.
- [26] J. Kleinberg and É. Tardos. *Algorithm Design*. Pearson Education, 2006, pp. 337–411. isbn: 0-321-29535-8.
- [27] STINA LÅNGSTRÖM, EMILIA FRIDSÄLL, Optimizing traffic flow on congested roads, STOCKHOLM, SWEDEN 2019, DEGREE PROJECT IN ELECTRONICS AND COMPUTER ENGINEERING, FIRST CYCLE
- [28] J. Yuan, E. Bae and X. -C. Tai, "A study on continuous max-flow and min-cut approaches," 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2010, pp. 2217-2224, doi: 10.1109/CVPR.2010.5539903.
- [29]- Carrabs F, Cerulli R, Gentili M (2009) The labeled maximum matching problem. *Computers & Operations Research* Volume 36 Issue 6 Pages 1859-1871. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.05.012>.
- [30]- Monnot J (2005) On Complexity and Approximability of the Labeled Maximum/Perfect Matching Problems. In: Deng X, Du DZ. (eds) *Algorithms and Computation ISAAC Lecture Notes in Computer Science* vol 3827 Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11602613_93.
- [31]- Yakut S, Öztemiz F & Karci A (2023) A new robust approach to solve minimum vertex cover problem: Malatya vertex-cover algorithm. *J Supercomput* (2023). <https://doi.org/10.1007/s11227-023-05397-8>.
- [32]- Karci A, Yakut S & Öztemiz F (2022) A New Approach Based on Centrality Value in Solving the Minimum Vertex Cover Problem: Malatya Centrality Algorithm. *Computer Science* Vol:7 (Issue:2) 81-88. <https://doi.org/10.53070/bbd.1195501>.
- [33]- Yakut S, Öztemiz F & Karci A (2023) A New Approach Based on Centrality Value in Solving the Maximum Independent Set Problem: Malatya Centrality Algorithm. *Computer Science* Vol:8 (Issue:1) 16-23. <https://doi.org/10.53070/bbd.1224520>.
- [34]- Cengiz Hark, Ali Karci, Karci summarization: A simple and effective approach for automatic text summarization using Karci entropy, *Information Processing & Management*, Volume 57, Issue 3, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.ipm.2019.102187>.