

KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ VE İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASI'NDA SEKTÖRLER ARASI BAĞIMLILIK YAPILARI ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Aslıhan ALHAN*

Salih ÇELEBİOĞLU**

ÖZET

Kapular, en genel ifade ile rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymak amacıyla kullanılmaktadır. Bu çalışmada kısaca kapula tahmin yöntemleri anlatılmıştır. Ayrıca, Kapula tahmin yöntemlerini örneklendirmek amacıyla, İstanbul Menkul Kıymet Borsası (İMKB) sektör endeks verileri kullanılarak sektörler arasındaki bağımlılık yapısı kapula tahmin yöntemleri ile ortaya konmaya çalışılmıştır. Minimum ki-kare tahmin edicileri ve optimizasyondaki arama yöntemleri aracılığıyla sektörler arası kısa ve uzun dönemli bağımlılık yapıları haftalık ve aylık veriler üzerinden araştırılmıştır. Kısa dönemli, yani, haftalık verilerde asimetrik yapıyı yansıtan Asimetrik Lojistik Model (ALM) Kapulanın (Mendes, 2008) sektörler arası bağımlılık yapısını ortaya koyduğu görülmüştür. Uzun dönemli, yani, aylık verilerin gösterdiği simetrik yapı için Clayton, Gumbel ve Frank kapula ailelerinin (Nelsen, 2006) uygun olabileceği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kapula, Kapula tahmin yöntemleri, Clayton kapula, Gumbel kapula, Frank kapula, Sektörler arası bağımlılık.

1. GİRİŞ

Kapular, tek değişkenli marjinalleri $[0;1]$ üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları bu tek değişkenli marjinallere bağlayan fonksiyonlardır. Kapula fonksiyonları rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını ortaya koyar.

Tanım (İki boyutlu kapula (veya kısaca kapula))

$C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanmış $C(u, v)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa *iki boyutlu kapula* adını alır:

- Her $u, v \in [0;1]$ için
 $C(u,0) = C(0,v) = 0$
ve
 $C(u,1) = u$ ve $C(1,v) = v$
dir;
- Her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0;1]$ için $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ iken
 $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$
dır (Nelsen, 2006, 10).

*Yrd. Doç. Dr., Ufuk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: aalhan@ufuk.edu.tr

**Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: scelebi@gazi.edu.tr

Aşağıdaki temel teorem 1959 yılında A. Sklar tarafından ispatlanmıştır ve kapulanın varlığını ortaya koyar.

Teorem (Sklar Teoremi):

H , marjinalleri F ve G olan iki değişkenli bir dağılım fonksiyonu olsun. O zaman her $x, y \in \bar{R}$ için

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

olacak şekilde bir C kapulası vardır. Eğer F ve G sürekli ise, C tektir; aksi halde, C , F ve G 'nin değer kümelerinin kartezyen çarpımı (yani, $Dom C = R_F \times R_G$) üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Tersine, eğer C bir kapula ve F ile G marjinal dağılım fonksiyonlarıysa, o zaman H fonksiyonu marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonu tanımlar (Nelsen, 2006, 18).

Kapulaların, finasta, aktüeryada, portföy analizlerinde, risk analizlerinde, zaman serilerinde, hidrolojide, durdurma işlemlerinin kullanıldığı sağkalım analizlerinde ve tıp istatistiklerinde gittikçe artan sayıda uygulandığı görülmektedir.

Kapulaların özellikleri:

1. Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını yansıtmaması.
2. Bir değişkenli marjinal rastgele değişkenlerin azalmayan dönüştürmeleri altında değişmez kalması.
3. Eş monotonluk (comonotonicity), yani değişkenlerin aynı yönde değişimini yansıtmaması.
4. Aynı aile içindeki çok değişkenli dağılımların aynı veya ters yönde sıralanmasını yansıtmamasıdır.

2. KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ

Problemi tahmin içeren bir araştırmacı genelde, araştırdığı konu ile ilgili elde ettiği verileri kullanarak, en küçük hata ile gerçeğe en yakın tahmini elde etmeyi amaçlar. Bu amaca yönelik olarak İstatistik'te ve ondan yararlanan bilimlerde çok çeşitli tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Bir kapula fonksiyonu da temel olarak çok değişkenli bir dağılım modelinin bağımlılık yapısının bir ifadesi olduğundan, bu bölümde kapula tahmin yöntemleri tanıtılacaktır. Kapula tahmin yöntemleri parametrik, yarı-parametrik ve parametrik olmayan olmak üzere üç ana başlık altında incelenebilir.

2.1 Parametrik Tahmin Yöntemleri

Bu kısım bu yöntemlerden En Çok Olabilirlik (MLE) (ya da Tam En Çok Olabilirlik (EMLE)) ve Marjinallere İlişkin Çıkarsama (IFM) yöntemleri tanıtılacaktır.

2.1.1 En çok olabilirlik yöntemi (MLE)

Bu yöntemle tahmin edilen çok değişkenli dağılımın marjinal dağılımlarına ait parametrelerle, bağımlılık yapısını yansıtan kapulaya ilişkin parametrelerin tamamı

birlikte tahmin edilir. Bu yöntemde kapula yoğunluk fonksiyonu ile tek değişkenli marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları en azından hipotetik olarak bilinmelidir (Cherubini et al., 2004).

2.1.2 Marjinallere ilişkin çıkarsama yöntemi (IFM)

En çok olabilirlik tahmini çok zaman aldığına ya da kullanılması mümkün olmadığına, çok değişkenli kapula tahmin yöntemlerinde iki aşamalı IFM tahmin yöntemi tercih edilir; bu aşamaların ilki bir değişkenli marjinallerin en çok olabilirlik tahminini ve ikincisi, birinci aşamada elde edilen ve sabit tutulan parametrelere sahip bağımlılık parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerini içerir. Teorik olarak bu yöntemde verilen analiz bağımsız ve aynı dağılımlı (i.i.d.) gözlemler içindir, ancak ortak değişkenler (covariates) olduğunda da IFM yöntemi kullanılabilir.

İki aşamalı tahmini temel alan bu yöntem, çıkarsama ya da tahmin fonksiyonlarını olabilirlik skor fonksiyonlarına (tek değişkenli veya çok değişkenli) karşı getirmesi nedeniyle, *marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonu (yöntemi)* (IFM) adını almaktadır (Joe, 1997; Joe, 2005).

Tahmin edicilerin hesaplanabilirliği ve asimptotik görelilik etkinliği arasında önceliğe göre yer değiştirme vardır; bir başka deyişle bazı tahmin edicilerde hesaplanabilirlik, bazılarında da asimptotik görelilik ilk sırada yer almaktadır. Genelde, Fréchet-Hoeffding sınırları civarındaki uç bağımlılık haricinde IFM iyi bir etkinliğe sahiptir. Birkaç kategoriye sahip kesikli marjinal veriler için IFM yüksek derecede etkin olurken, kategoriler fazlaştıkça IFM'nin etkinliği düşmeye başlar. Marjinallerin sürekli olması durumunda, güçlü bağımlılık varsa IFM'nin etkinliği kaybolabilir. Hesaplama, özellikle toplam parametre sayısı 15-20 civarını aştığında IFM tahmini diğerlerine göre daha kolaydır. Parametrelerin (veya fonksiyonlarının) standart hataları genelde Jackknife ile veya bazı durumlarda asimptotik kovaryans matrisinden tahmin edilebilir. En çok olabilirlik tahmini hesaplama olarak mümkün olduğunda, IFM iyi bir başlangıç noktası olarak kullanılabilir.

İki aşamalı yöntem, özellikle tek değişkenli marjinaller aynı olduğunda, farklı kapulaların karşılaştırılması için uygundur. Pratikte bu tür bir karşılaştırma çok değişkenli modelin duyarlık analizi sonuçlandırması bakımından önemlidir. IFM tahmininin güçlü birliktelik yüzünden etkisiz olduğu hissedildiğinde, bir ve iki değişkenli log-olabilirliklerinin kombinasyonuna dayalı tahmin/çıkarsama denklemlerinin bir biçimi çok değişkenli log-olabilirliğe alternatif olarak düşünülebilir. Birleşik olabilirliği bir örnek olarak içeren bu yöntemlerle ilgili ayrıntılı referanslar için bkz. Joe (2005). Joe, iki aşamalı IFM yönteminin boyut sayısı arttıkça, birleşik olabilirlik ve benzeri tahmin yöntemlerinde olasılıkları hesaplamayı kolaylaştıracağını ummaktadır (Joe, 2005).

2.2 Yarı-Parametrik Tahmin Yöntemleri

Bu kısımda Sözde En Çok Olabilirlik Fonksiyonu (Pseudo Maximum Likelihood Estimator-PMLE) tahmin edicisi tanıtılacaktır. Bu tahmin yöntemi ile bulunan tahmin edici, sözde olabilirlik denkleminin bir çözümü olarak bulunur.

Sözde en çok olabilirlik yöntemi, daha çok sayısal işlem içerdiği ve c_θ yoğunluğunun var olmasını gerektirdiği için, parametrik olmayan tahmin yöntemlerine göre daha az çekiciliğe sahiptir. Bununla birlikte bu yöntem bağımlılık parametresi θ 'nin gerçek sayı olmasını gerektirmediğinden, genelde diğer yöntemlere göre daha fazla uygulanabilir (Genest et al., 1995; Genest and Favre, 2007).

2.3 Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri

Marjinal dağılımların önceden bilindiği veya örnekten elde edilebildiği durumlardaki tahmin yöntemleri önceki kesimlerde incelendi. Bu kısımda da, dağılımdan bağımsız veya parametrik olmayan tahmin yöntemleri ele alınacaktır. Gözlem birim değerlerinden veri kümesinin bağımlılık derecesinin bir örnekten tahmin edilmesinden sonra, bu değer(ler)i kullanarak kapula ailesinin tahmin edilme yöntemine değinilecektir.

2.3.1 Kendall τ değerine dayanan yöntem

Genel olarak parametre ile Kendall τ değeri arasında $\theta = a(\tau)$ ilişkisi varsa, τ_n örnekten tahmin edilen Kendall τ değeri olmak üzere, $\hat{\theta}_n = a(\tau_n)$ şeklinde tanımlanan $\hat{\theta}_n$ 'nin θ için Kendall τ değerine dayalı bir tahmin edici olduğu söylenebilir (Genest and Rivest, 1993).

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ji} = \frac{1}{n} \# \{j : X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j\} \quad \text{ve} \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$\sqrt{n} \frac{\tau_n - \tau}{4S}$ 'nin yaklaşık standart normal dağılıma sahip olduğu görülmüştür; burada

$\bar{W} = (W_1 + W_2 + \dots + W_n)/n$ 'dir. Delta yöntemi uygulandığında, $n \rightarrow \infty$ ise,

$\hat{\theta}_n \approx N\left(\theta, \frac{1}{n} \{4S a'(\tau_n)\}^2\right)$ olur. Böylece, θ için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı

$$\hat{\theta}_n \pm Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} 4S |a'(\tau_n)|$$

biçiminde ifade edilir (Genest nad Favre, 2007).

Bu yöntemle benzer şekilde Spearman ρ değerine dayanan yöntem de kullanılmaktadır.

Kapula tahmin yöntemleri için uygulamada karşılaşılan problemler ve tahmin yöntemlerindeki gelişmelere paralel olarak yeni tahmin yöntemleri geliştirilmektedir.

Tahmin edilen kapula ailesinin (ya da çok değişkenli modelin) gerçekte veriye uygun olup olmadığını test etmek için kullanılan Ki-kare, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Kolmogorov-Smirnov Anderson-Darling ve Cramér-von Mises testleri en sık kullanılanlar arasındadır (Berg and Bakken, 2006).

2.4 Tahmin Yöntemlerinin Özellikleri

Kim, Silvapulle ve Silvapulle 2007'de yayınlanan makalelerinde parametrik ve yarı parametrik tahmin yöntemlerini karşılaştırmışlar ve bazı sonuçlara ulaşmışlardır. Bu çalışmalarının sonucu olarak, Kim ve arkadaşları, PMLE yönteminin MLE ve IFM yöntemine tercih edilmesi gerektiği sonucunu vurgulamaktadırlar (Kim et al., 2007).

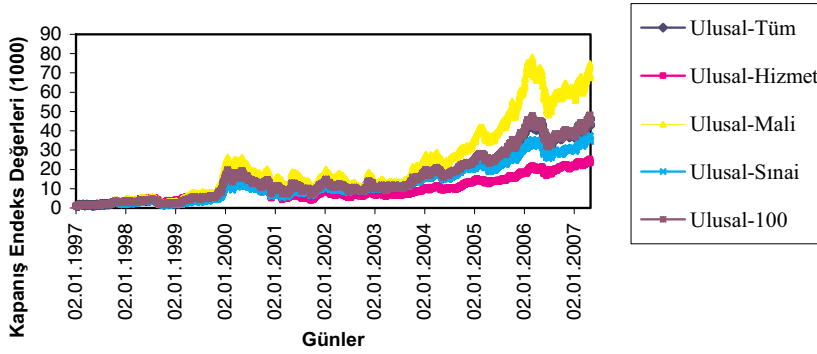
Bilindiği gibi, parametrik olmayan tahmin yöntemleri marjinal dağılımlar ve parametrelerle ilgili herhangi bir bilgi elde edilemediği durumlarda kullanılan tahmin yöntemleridir. Genellikle, parametrik olmayan tahmin yöntemlerinden doğrusallık ve normal dağılım varsayımına ihtiyaç olmadan hesaplanabilen ve cebirsel yapısı daha basit, hesaplanması daha pratik olduğundan, Kendall τ değeri kullanılması tercih edilmektedir. Parametrik olmayan tahminde, uç değerler (extreme values) önemli olduğunda, üst ve alt kuyruk bağımlılık katsayıları kullanılarak kapula ailesini tahmin eden bir başka yöntem karşımıza çıkmaktadır.

Finans teorisine göre getirilerin normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmektedir. Ancak piyasada bilginin simetrik paylaşıldığı varsayımları günümüz karmaşık finansal piyasalarının davranış dinamiklerine uymamaktadır. Getirilerin normal dağıldığı varsayımı altında kurulan modeller gelişmiş piyasalarda kısmen başarılı performans sergilerken, zaman içerisinde değişen varyans ile yüksek oynaklık (volatility) sergileyen veri yapılarında modellerin tahminini zorlaştırmaktadır. Kapula yöntemi, marjinal dağılımları temel aldığından değişen varyans ve dağılımın normal olmamasından etkilenmemektedir (Çifter ve Özün, 2007). Dolayısıyla, ülkemizin en önemli finansal piyasası olarak kabul edilen İMKB'ndeki hareketliliği izlemek için borsadaki genel değişimi yansıtan İMKB Ulusal-Tüm endeksi ve borsadaki değişimin önemli bir kısmını yansıtan İMKB Ulusal-100 endeksi ile sektör endeksleri arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymada kapula yönteminden yararlanılabilir. Bu anlamda bağımlılık yapılarına parametrik olmayan yöntemlerle uygun kapula ailesini bularak ulaşılmaya çalışılacaktır.

3.BULGULAR

3.1 Veri Kümesi

Elde edilen ham veri, 02.01.1997 tarihinden, 30.04.2007 tarihine kadar olan zaman aralığında, İMKB'de işlem yapılan günler seçilerek oluşturulan, İMKB Ulusal-Tüm, İMKB Ulusal-100, İMKB Ulusal-Hizmetler, İMKB Ulusal-Mali ve İMKB Ulusal-Sınai günlük seans kapanış endekslerini içermektedir.



Şekil 1. İMKB sektör endekslerinin günlere göre değişimi (İMKB, 2007)

Şekil 1, İMKB’de işlem gören hisse senetleri endekslerinin 2 Ocak 1997’den 30 Nisan 2007’ye kadar olan performansını günlük seans kapanış fiyatlarıyla göstermektedir (İMKB, 2007a; İMKB 2007b). Buna göre, kapanış endekslerinin zamana göre değişen dinamik bir yapıda (zaman içerisinde değişen varyans ile değişkenlik sergilediği) olduğu görülmektedir. Genel olarak endeks değerleri artan bir eğilim göstererek inişli-çıkışlı hareket sergilemektedir.

Çalışmada kullanılan veriler, 02.01.1997 tarihinden 30.04.2007 tarihine kadar olan zaman aralığında, İMKB’de işlem yapılan günler seçilerek oluşturulan, İMKB Ulusal-Tüm, İMKB Ulusal-100, İMKB Ulusal-Hizmetler, İMKB Ulusal-Mali ve İMKB Ulusal-Sınai seans kapanış endekslerinin aylık ortalamalarının % değişiminden oluşan 123 birimi ve seans kapanış endekslerinin haftalık ortalamalarının % değişiminden 529 birimi kapsamaktadır (Alhan, 2008).

Çalışmada uygulanması daha pratik olduğundan, özellikle uzun dönemli (aylık) veriler için parametrik olmayan tahmin yöntemi ve kısa dönemli (haftalık) veriler için uygun düşen kapula ailesinin parametre sayısı fazla olduğundan, arama yöntemi kullanılmıştır. Parametrik olmayan yöntemde, Kendall τ değerinden yararlanılmıştır. Örnekten elde edilen Kendall τ değeri aracılığıyla kapulanın parametresi ve dolayısıyla veri kümesine uygun olan kapula ailesi tahmin edilmiştir.¹

¹ En uygun kapulanın seçimi, AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion) ve KLIC (Kullback-Leibler Information Criterion) gibi çoğunlukla zaman serilerinde kullanılan bilgi ölçütleri yanında, doğrudan uyum iyiliğini göz önüne alan χ^2 analizine dayandırılarak yapılabilir. Bunun yanında kapulanın seçimi uygulama yapılan özel alana göre, haklı nedenlere dayandırılarak da yapılabilir. Bkz [Kole et al., 2007]. Ayrıca bu çalışmada yer verilen kapula modellerinin matematiksel ifadesi için Ek 1’e bakınız.

Tablo 1. Ulusal-tüm ve ulusal-hizmetler sektörleri için kapula ailelerine ait parametre tahminleri ve beklenen frekans değerleri

Gözlenen Frekanslar	$\hat{\tau}^*$	Kapula Ailesi	$\hat{\theta}$	Beklenen Frekanslar	Hesaplanan Ki-kare Değerleri
26 5 0 0 4 18 7 2 0 8 14 8 1 0 9 21	0,742	Clayton	5,70	27 3 0 0 3 20 6 1 0 6 16 8 0 1 8 22	3,491
		Gumbel	4,00	24 6 1 0 6 17 7 1 1 7 19 4 0 1 4 26	13,896
		Frank	11,40	24 7 1 0 7 17 6 1 1 6 17 6 0 1 6 24	6,130

* Sınıflanmamış örnek Kendall τ değeri 0,692'dir.

Burada Ki-kare hesaplanırken beklenen frekansı 5'ten küçük olan hücreler %20'yi aşmayacak biçimde birleştirilmiştir. Böylece; 1 serbestlik derecesinde 0,05 anlam düzeyinde Ki-kare çizelge değeri 3,841 olduğundan, bu veri kümesinin Clayton Kapula ailesine uygun olduğunu ifade eden H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez. Ulusal-Tüm ve Ulusal-Hizmetler sektörlerinin bağımlılık yapısının Clayton Kapula ailesine uygun olduğu sonucu çıkarılabilir.

Tablo 2. Ulusal-hizmetler ve ulusal-mali sektörleri için kapula ailelerine ait parametre tahminleri ve beklenen frekans değerleri

Gözlenen Frekanslar	$\hat{\tau}^*$	Kapula Ailesi	$\hat{\theta}$	Beklenen Frekanslar	Hesaplanan Ki-kare Değerleri
24 6 0 1 5 17 8 1 1 6 14 9 1 2 8 20	0,683	Clayton	4,00	26 4 0 0 4 18 7 2 0 7 14 8 0 2 8 20	2,676
		Gumbel	3,00	21 8 2 0 8 15 8 1 2 8 16 5 0 1 5 25	8,588
		Frank	10,00	23 7 1 0 7 16 7 1 1 7 16 6 0 1 6 23	3,343

* Sınıflanmamış örnek Kendall τ değeri 0,620'dir.

Burada Ki-kare hesaplanırken beklenen frekansı 5'ten küçük olan hücreler %20'yi aşmayacak biçimde birleştirilmiştir. Böylece; 2 serbestlik derecesinde 0,05 anlam düzeyinde Ki-kare çizelge değeri 5,991 olduğundan, bu veri kümesinin Clayton ve Frank Kapula ailesine uygun olduğunu ifade eden H_0 hipotezleri istatistiksel olarak reddedilemez. En küçük Ki-kare değeri Clayton Kapula ailesine ait olduğundan, Ulusal-Hizmetler ve Ulusal-Mali sektörlerinin bağımlılık yapısının Clayton Kapula ailesine uygun olduğu sonucu çıkarılabilir.

Tablo 3. İMKB endeksleri haftalık yüzde değişimine ilişkin gözlenen frekanslar, tahmin edilen Asimetrik Lojistik Model Kapula ailesine ait beklenen frekanslar ve Ki-kare analiz sonuçları

Sektörler	Gözlenmiş (Haftalık) Frekanslar				Beklenen (Haftalık) Frekanslar				Parametre Değerleri*	Ki-kare Değerleri
Ulusal- Tüm Ve Ulusal- Hizmetler	90	25	13	3	81	36	11	4	$\delta=3,04$ $p_1=0,84$ $p_2=0,91$ $\tau_G=0,613$ $\tau_O=0,692$	$\chi^2 = 14,28$ $\chi^2_{9;0,05} = 16,919$
Ulusal- Hizmetler Ve Ulusal- Mali	70	34	19	9	61	37	22	13	$\delta=2,3$ $p_1=0,68$ $p_2=0,67$ $\tau_G=0,397$ $\tau_O=0,620$	$\chi^2 = 14,41$ $\chi^2_{9;0,05} = 16,919$

τ_G : Sınıflanmış değerlerden hesaplanan Kendall τ değeri

τ_O : Orijinal örnek veriden hesaplanan Kendall τ değeri

Tablo 3 incelendiğinde; Ki-kare değerleri hesaplanırken beklenen frekansı 5'ten küçük olan hücreler %20'yi aşmayacak biçimde birleştirilmiştir. Diğer sektörler dikkate alındığında ise 9 serbestlik derecesinde 0,05 anlam düzeyinde Ki-kare çizelge değeri 16,919 olduğundan, bu veri kümesinin Asimetrik Lojistik Model (ALM) kapula ailesine uygun olduğunu ifade eden H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemediği ve dolayısıyla Asimetrik Lojistik Model (ALM) kapula ailesine uygun olduğu söylenebilir.²

4. SONUÇ

Bu çalışmada İMKB'nda hesaplanan Ulusal-Tüm-Ulusal Hizmetler ve Ulusal Hizmetler-Ulusal Mali endeks değerleri arasındaki bağımlılık yapısı araştırılmış ve sektörler arası ikişerli bağımlılık yapısını ortaya koyan kapulalar kısa ve uzun dönemli veriler üzerinden tahmin edilmiştir.

Ele alınan bu endeks değerlerinin uzun dönemli bağımlılık yapısının Clayton kapulasına, kısa dönemli bağımlılık yapısının Asimetrik Lojistik Model (ALM) kapulasına uygun düştüğü sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca bu endeks seans kapanış değerlerinin -tüm veri türleri üzerinden- asimetrik ve aşırı basıklık/sivrilik yüzünden normal dağıldığı varsayımının sağlanmadığı görülmüştür.

Uygulama kesiminde de örneklendirildiği gibi, kapula yöntemi değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını tahmin etmede etkin bir biçimde kullanılmakta ve özellikle parametrik yöntemlerin varsayımlarının -normallik, değişkenler arası bağımsızlık,...vb.- sağlanmadığı durumlarda günlük hayatta karşılaşılan problemlerde uygun bir biçimde devreye girmektedir. Ayrıca kapulaların bu anlamda İstatistiksel problemlere uygulanabilirliğinin artması, tahmin yöntemlerinin çeşitlenmesine,

² Daha ayrıntılı bilgi için ve diğer sektörler arası ikili bağımlılık yapıları için bakınız Alhan, 2008.

kolaylaşmasına³, sözcülemi, çok değişkenli dağılım tahminlerinde “boyut sorunu”nun azaltılmasına yardımcı olabileceği söylenmektedir (Scott, 1992).

5. KAYNAKLAR

Alhan, A., 2008. Bağımsızlık Kapulasını İçeren Kapula Aileleri, Kapula Tahmin Yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektörler Arası Bağımlılık Yapısı. 4-15, 81-140. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye (yayımlanmamış).

Berg, D., Bakken, H., 2006. A Goodness-of-fit Tests: A Comparative Study. Working Paper, Norwegian Computing Centre, grant number 154079/420, 1-23.

Çifter, A., Özün, A., 2007. Koşullu Copula ve Dinamik Koşullu Korelasyon ile Portföy Riskinin Hesaplanması: Türkiye Verileri Üzerine Bir Uygulama. Bankacılar Dergisi, 61: 12-27.

Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiado, W., 2004. Copula Methods In Finance. 154-180, John Wiley and Sons, England.

Genest, C., Rivest, L. P., 1993. Statistical İnference Procedures For Bivariate Archimedean Copulas. Jour. Am. Stat. Assoc., 88 (3): 1034-1043.

Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.P. 1995. A Semiparametric Estimation Procedure Of Dependence Parameters İn Multivariate Families Of Distribution. Biometrika, 82 (3): 543-552.

Genest C., Favre, A. C., 2007. Everything You Always Wanted To Know About Copula Modelling But Were Afraid To Ask. Journal of Hydrologic Engineering, 12 (4): 347-368.

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, 2007a, “Sermaye Piyasası Kılavuzu”, <http://www.imkb.gov.tr/yayinlar.htm>.

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, 2007b, “Sorularla Borsa ve Sermaye Piyasası”, <http://www.imkb.gov.tr/yayinlar.htm>.

Joe, H., 1997. Multivariate Models and Dependence Concepts, 12-35, 139-169, Chapman&Hall, London.

Joe, H., 2005. Asymptotic Efficiency Of The Two-Stage Estimation Method For Copula-Based Models. Journal of Multivariate Analysis, 94: 401-419.

Kim, G., Silvapulle, M. J., Silvapulle, P., 2007. Comparison Of Semiparametric And Parametric Methods For Estimating Copulas. Comp. Stat. Data Anal., 51 (6): 2836-2850.

³Kapula tahmin yöntemlerinin genelinde de görüldüğü gibi, çok değişkenli bir dağılımın tahmini problemi, marjinal dağılımların bireysel olarak tahmini ve değişkenler arası bağımlılık yapısının tahmini olarak ikiye ayrılarak çözümlenmektedir.

Kole, E., Koedijk, K., Verbeek, M., 2007. Selecting Copulas For Risk Management. Journal Of Banking And Finance. 31: 2405-2423.

Mendes, B. V. M., Kolev, N., 2008. How Long Memory In Volatility Affects True Dependence Structure. International Review of Financial Analysis. 17, 1070-1086.

Nelsen, R. B., 2006. An Introduction To Copulas. 5-43, 89-121,125-179. Springer-Verlag, New York.

Scott, D. W., 1992. Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization. 192-217, John Wiley&Sons Inc., Canada.

COPULA ESTIMATION METHODS AND AN APPLICATION TO THE INTER-SECTORAL DEPENDENCE OF ISTANBUL STOCK EXCHANGE

ABSTRACT

In the most common expression, copulas are used to determine the dependence structure between random variables. In this study copula estimation methods are introduced briefly. In addition, to illustrate the copula estimation methods it is tried to put forth the dependence structure between sectors by using the sector index data of Istanbul Stock Exchange (ISE). By means of the minimum chi-square estimators and optimization search methods, the short and long-term dependence structure between sectors are investigated over weekly and monthly index data. In the short-term, that is, in weekly data which reflects the asymmetric structure was revealed by the Asymmetric Logistic Model (ALM) Copula (Mendes, 2008). For the long-term, i.e., the monthly data showing a symmetrical structure it was concluded that Clayton, Gumbel and Frank copula families (Nelsen, 2006) can be appropriate.

Keywords: Copula, Copula estimation methods, Clayton copula, Gumbel copula, Frank copula, Inter-sectoral dependence.

EK: Kapula Modellerinin Matematiksel İfadeleri

Gumbel kapula ailesi

$$C_{\theta}(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty.$$

Clayton kapula ailesi

$$C_{\theta}(u, v) = \max\left(\left[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right]^{-1/\theta}, 0\right), \quad \theta \in [-1; \infty) \setminus \{0\}.$$

Frank kapula ailesi

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \quad \theta \in (-\infty; \infty) \setminus \{0\}.$$

Asimetrik Lojistik Model (ALM) kapula ailesi

$$C(u, v, \delta, p_1, p_2) = \exp\left[-(p_1^{\delta} \tilde{u}^{\delta} + p_2^{\delta} \tilde{v}^{\delta})^{1/\delta} - (1-p_1)\tilde{u} - (1-p_2)\tilde{v}\right];$$

$p_1, p_2 \in [0, 1]^2, \delta \geq 1, \tilde{u} = -\ln u$ ve $\tilde{v} = -\ln v$ dir.