Volume: 08 Number: 02 Category: 01 Page: 45-54 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 08 Sayı: 02 Kategori: 01 Sayfa: 45-54

İKİ DEĞİŞKENLİ GEOMETRİK DAĞILIM VE GENELLEŞTİRİLMESİ, BAĞIMLILIK ÖLÇÜLERİ VE DAĞILIM ÖZELLİKLERİ

Özge ELMASTAŞ GÜLTEKİN* **İsmihan BAYRAMOĞLU****

ÖZET

Bu çalışmada, Marshall ve Olkin'in iki değişkenli geometrik dağılımına ilişkin dağılım özellikleri araştırılmış ve uyumluluk ölçüsü Kendall Tau elde edilmiştir. Aynı zamanda, iki değişkenli geometrik dağılımın En Çok Olabilirlik tahmin edicisi elde edilmiş ve çok değişkenli duruma genelleştirilmesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernoulli dağılımı, Bernoulli marjinali, En çok olabilirlik, Geometrik dağılım, Uyumluluk ölçüsü, Yaşam fonksiyonu.

1. GİRİŞ

İki değişkenli geometrik dağılım literatürde farklı şekillerde ifade edilmiştir. Bu çalışmada, Marshall ve Olkin (1985)'in iki değişkenli Bernoulli dağılımından türetilen iki değişkenli geometrik dağılımı incelenmiştir. Birçok alanda uygulaması bulunan iki değişkenli geometrik dağılım, Cox(1972), Hawkes(1972), Azlarov ve Volodin (1982), Nair ve Nair (1988), Roy(1993), Asha, Sankaran ve Nair (2003), Mitov ve Nadarajah (2005), Dhar ve Balaji (2006) ve Nadarajah (2008) gibi birçok yazar tarafından incelenmiştir. Ayrıca bu dağılıma ilişkin ortak olasılık fonksiyonu ve yaşam fonksiyonu incelenmiştir. Bununla birlikte, üç değişkenli geometrik dağılım ve çok değişkenli duruma genelleştirilmesi ve ele alınan iki değişkenli geometrik dağılımın En Çok Olabilirlik tahmin edicisi ve uyumluluk ölçüsü Kendall Tau elde edilmiştir.

2. İKİ DEĞİŞKENLİ GEOMETRİK DAĞILIM

Literatürde bir çok yazar iki değişkenli geometrik dağılımı çok farklı şekillerde ifade etmişlerdir. Bu çalışmada esas ele alınan, Marshall ve Olkin (1985)'in iki değişkenli Bernoulli rasgele değişkenler dizisine dayanarak ortaya koydukları iki değişkenli geometrik dağılımdır. (U,V), Bernoulli marjinallerine sahip (U ve V'nin her biri tek değişkenli Bernoulli dağılımına sahip) bir vektör olsun. Bu vektör sırasıyla, p_{11}, p_{10}, p_{01} ve p_{00} olasılıklı, $(1,1),(1,0),(0,1)$ ve $(0,0)$ 4 mümkün değeri alabilir. Marjinal olasılıklar şu şekildedir:

$$P(U=1)=p_{1+}=p_{11}+p_{10}$$
$$P(U=0)=p_{0+}=p_{01}+p_{00}$$
$$P(V=1)=p_{+1}=p_{11}+p_{01}$$
$$P(V=0)=p_{+0}=p_{10}+p_{00}$$

*Dr, Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 35100, Bornova, İzmir, e-posta: ozge.elmastas@ege.edu.tr
**Prof. Dr, İzmir Ekonomi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 35330, Balçova, İzmir, e-posta: ismihan.bayramoglu@ieu.edu.tr

Birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip iki değişkenli Bernoulli rasgele vektör dizisi $(U_1,V_1),(U_2,V_2),...,(U_n,V_n),...$ için; X, $U_1,U_2,...,U_n,...$ dizisindeki ilk başarıdan (1) önceki başarısızlıkların (0) sayısını; Y de $V_1,V_2,...,V_n,...$ dizisindeki ilk başarıdan (1) önceki başarısızlıkların (0) sayısını göstersin. X ve Y'nin her biri bir geometrik dağılımına sahiptir ve genelde bağımsız olmayacaklardır. Ortak iki değişkenli dağılımları şöyle gösterilir:

$$P(X=l,Y=k)=\begin{cases} p_{00}^{l}p_{10}p_{+0}^{k-l-1}p_{+1}, & 0\le l<k \\ p_{00}^{l}p_{11}, & l=k \\ p_{00}^{k}p_{01}p_{0+}^{l-k-1}p_{1+}, & 0\le k<l \end{cases} \tag{1}$$

(Marshall ve Olkin, 1985) ve yaşam fonksiyonu

$$\overline{F}(l,k)=P(X\ge l,Y\ge k)=\begin{cases} p_{00}^{l}p_{+0}^{k-l}, & 0\le l<k \\ p_{00}^{l}, & l=k \\ p_{00}^{k}p_{0+}^{l-k}, & 0\le k<l \end{cases} \tag{2}$$

(Hawkes, 1972) olmaktadır.

X ve Y'nin marjinal olasılık fonksiyonları ve marjinal yaşam fonksiyonları ise şöyledir:

$$P(X=l)=p_{1+}p_{0+}^{l}, \qquad , \qquad P(Y=k)=p_{+1}p_{+0}^{k}$$

ve

$$\overline{F}_X(l)=P(X\ge l)=p_{0+}^{l}, \quad , \quad \overline{F}_Y(k)=P(Y\ge k)=p_{+0}^{k} \tag{3}$$

$l\ge 0$ ve $k\ge 0$. (2) ve (3)'ü kullanarak ortak kümülatif dağılım fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} F(x,y)&=P(X\le x,Y\le y)\\ &=1-P(X>x)-P(Y>y)+P(X>x,Y>y)\\ &=1-P(X\ge[x]+1)-P(Y\ge[y]+1)+P(X\ge[x]+1,Y\ge[y]+1)\\ &=1-\overline{F}_X([x]+1)-\overline{F}_Y([y]+1)+\overline{F}([x]+1,[y]+1)\\ &=\begin{cases} 1-p_{0+}^{[x]+1}-p_{+0}^{[y]+1}+p_{00}^{[x]+1}p_{+0}^{[y]-[x]}, & 0\le x<y \\ 1-p_{0+}^{[x]+1}-p_{+0}^{[y]+1}+p_{00}^{[x]+1}, & 0\le x=y \\ 1-p_{0+}^{[x]+1}-p_{+0}^{[y]+1}+p_{00}^{[y]+1}p_{0+}^{[x]-[y]}, & 0\le y<x \end{cases} \end{aligned}$$

Burada $[x]$ ve $[y]$, sırasıyla, x ve y'den büyük olmayan en büyük tamsayıyı ifade etmektedir (Marshall ve Olkin (1985)).

Farklı şekillerde ifade edilen iki değişkenli geometrik dağılımdan biri de, Nair ve Nair (1988)'in makalelerinde tanımladıkları yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibi olan iki değişkenli geometrik dağılımdır.

$$P\{X \geq l,\ Y \geq k\} = p_1^l p_2^k \theta^{lk}$$
$$l,\ k = 0,1,2,...;\ 0 \leq \theta \leq 1,\ 1-\theta \leq (1-p_1\theta)(1-p_2\theta)\ .$$

Diğer bir ifade şekli ise, Dhar (1998a, 1998b) tarafından ortaya atılan iki değişkenli kesikli Freund modelidir.

$$P\{X = l, Y = k\} = \begin{cases} \dfrac{q_2 q_3}{p_2 p_3}\left[\dfrac{p_1 p_2}{p_3}\right]^k p_3^l, & k < l \ ;\ l,k = 1,2,... \\ \dfrac{q_1 q_4}{p_1 p_4}\left[\dfrac{p_1 p_2}{p_4}\right]^l p_4^k, & l < k \ ;\ l,k = 1,2,... \\ \dfrac{q_1 q_2 q_{12}}{1-p_1 p_2}\, p_{12}^{l-1}, & l = k \ ;\ l,k = 1,2,... \end{cases}$$

Krishna ve Pundir (2009) ise, makalelerinde, Phatak ve Sreehari (1981) tarafından ortaya konan ve olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi olan iki değişkenli geometrik dağılımı ele almışlardır.

$$P(X = x, Y = y) = \binom{x+y}{x} p_0^x p_1^y p_2\ ,$$

burada $x, y = 0,1,...;\ 0 < p_0, p_1 < 1;\ p_2 = 1 - p_0 - p_1$ olmaktadır.

2.1 İki Değişkenli Geometrik Dağılım İçin Uyumluluk Ölçüsü Kendall Tau

Sıralı değişkenler için en genel ilişki ölçüsü, gözlem çiftlerinin uyumlu (concordant) ve uyumsuz (discordant) olarak sınıflandırılmasına dayanır. X 'in daha büyük değerli gözlemi için Y de daha büyük değer alıyorsa bu gözlem çifti uyumlu, diğer taraftan, X 'in daha büyük değerli gözlemi için Y daha küçük değer alıyorsa bu gözlem çifti uyumsuzdur.

Uyumluluk ve uyumsuzluk olasılıklarına bakıldığında (X_1,Y_1) ve (X_2,Y_2), (X, Y) sürekli rasgele değişken vektöründen alınan iki gözlem çifti için,

$P(uyumluluk) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$ ya da diğer bir ifadeyle
$P(uyumluluk) = P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) + P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2)$ olmaktadır.
$P(uyumsuzluk) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$ ya da diğer bir ifadeyle
$P(uyumsuzluk) = P(X_1 > X_2, Y_1 < Y_2) + P(X_1 < X_2, Y_1 > Y_2)$ olmaktadır.

Sürekli değişkenler için $P(uyumluluk) + P(uyumsuzluk) = 1$ olmaktadır. Fakat kesikli değişkenler, “eşitlik (tie)” olarak ifade edilen durumu da içermektedir.

$$P(eşitlik) = P(X_1 = X_2 \ \ veya \ \ Y_1 = Y_2)$$

Nelsen (1999)'in çalışmasında, Kendall Tau, uyumluluk olasılığı ile uyumsuzluk olasılığı arasındaki farka eşit olup şu şekilde ifade edilir:

$$\tau(X,Y) = P(uyumluluk) - P(uyumsuzluk) \tag{4}$$

X ve Y kesikli tamsayıları için, $P(uyumluluk) + P(uyumsuzluk) + P(eşitlik) = 1$ olduğundan, (4) numaralı formül yeniden düzenlendiğinde, Kendall Tau (τ) aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\tau(X,Y) = 2P(uyumluluk) - 1 + P(eşitlik)$$

veya

$$\tau(X,Y) = 1 - 2P(uyumsuzluk) - P(eşitlik)$$

Teorem 2.1: (1) numaralı formülde ifade edilen iki değişkenli geometrik dağılım için Kendall Tau, $l < k$ ve $t < z$ için, aşağıdaki gibidir.

$$\tau = 1 - \frac{p_{10}^2(1 + p_{00}p_{+0})}{(1 - p_{00}^2)(1 - p_{00}p_{+0})}$$

İspat: (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) her biri iki değişkenli geometrik dağılıma sahip iki vektör çifti olsun. Burada Kendall Tau hesaplanırken çok sayıdaki mümkün durumlar arasından $l < k$ ve $t < z$ için olan durum göz önüne alınmıştır.

$\tau = 1 - 2P(uyumsuzluk) - P(eşitlik)$ formülünde gerekli olasılıklar yerine konduğunda,

$$\tau = 1 - \frac{p_{10}^2(1 + p_{00}p_{+0})}{(1 - p_{00}^2)(1 - p_{00}p_{+0})}$$

olarak hesaplanır.

Örneğin, $p_{00} = \frac{1}{3}$ ve $p_{10} = \frac{1}{2}$ $(p_{+0} = p_{00} + p_{10})$ olasılıkları için bakıldığında, Kendall Tau $\tau = 0.502$ olmaktadır.

2.2 İki Değişkenli Geometrik Dağılımın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Parametreleri tahmin etmek için kullanılan yöntemlerden biri de En Çok Olabilirlik tahminidir. Krishna ve Pundir (2009), makalelerinde, Phatak ve Sreehari (1981) tarafından ortaya konan ve olasılık fonksiyonu

$$P(X = x, Y = y) = \binom{x+y}{x} p_0^x p_1^y p_2\ , \quad x, y = 0,1,...;\ 0 < p_0, p_1 < 1;\ p_2 = 1 - p_0 - p_1$$

olan iki değişkenli geometrik dağılıma ilişkin En Çok Olabilirlik Tahmin edicilerini aşağıdaki gibi hesaplamışlardır.

$$\hat{p}_0 = \frac{\bar{x}}{1+\bar{x}+\bar{y}}; \quad \hat{p}_1 = \frac{\bar{y}}{1+\bar{x}+\bar{y}}; \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{1+\bar{x}+\bar{y}}$$

Marshall ve Olkin (1985)'in iki değişkenli geometrik dağılımı için elde edilen En Çok Olabilirlik Tahmin edicileri aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 2.2: (1) nolu formülle ifade edilen iki değişkenli geometrik dağılıma ilişkin parametrelerin En Çok Olabilirlik tahmin edicileri $\hat{p}_{00} = 0$ için ve $n_1 > 0$, $n_3 > 0$ için aşağıdaki gibidir:

$$\hat{p}_{01} = \frac{[n_3 + n_1(\bar{y}_1 - \bar{x}_1)](\bar{y}_3 - \bar{x}_3)}{n_1[(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)+1]}$$

$$\hat{p}_{10} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)[n_1 + n_3(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)]}{n_3[(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)+1]}$$

$$\hat{p}_{11} = \frac{[n_1 + n_3(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)][n_3 + n_1(\bar{y}_1 - \bar{x}_1)]}{n_1 n_3[(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)+1]}$$

İspat: $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$'lerden her bir çift aşağıdaki gibi ifade edilen iki değişkenli geometrik dağılıma sahip olsun.

$$P\{X = x,\ Y = y\} = \begin{cases} p_{00}^{x} p_{10} p_{+0}^{y-x-1} p_{+1}, & x < y \\ p_{00}^{x} p_{11}, & x = y \\ p_{00}^{y} p_{01} p_{0+}^{x-y-1} p_{1+}, & x > y \end{cases}$$

$P\{X = x, Y = y\}$ olasılığı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$P\{X = x, Y = y\} = \begin{cases} P_1(x,y), & x < y \\ P_2(x,y), & x = y \\ P_3(x,y), & x > y \end{cases}$$

Buradan $P\{X,Y\} = P_1(x,y)I\{x<y\} + P_2(x,y)I\{x=y\} + P_3(x,y)I\{x>y\}$ olarak yazılabilir.

L, olabilirlik fonksiyonu olsun. Aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$L = P(X_1,Y_1)P(X_2,Y_2)...P(X_n,Y_n)$$

$$P(X_1,Y_1) = P_1(x_1,y_1)I\{x_1<y_1\} + P_2(x_1,y_1)I\{x_1=y_1\} + P_3(x_1,y_1)I\{x_1>y_1\}$$

$$\begin{aligned} L = {} & [P_1(x_1,y_1)I\{x_1<y_1\} + P_2(x_1,y_1)I\{x_1=y_1\} + P_3(x_1,y_1)I\{x_1>y_1\}]\times \\ & \times[P_1(x_2,y_2)I\{x_2<y_2\} + P_2(x_2,y_2)I\{x_2=y_2\} + P_3(x_2,y_2)I\{x_2>y_2\}]\times ... \\ & ...\times[P_1(x_n,y_n)I\{x_n<y_n\} + P_2(x_n,y_n)I\{x_n=y_n\} + P_3(x_n,y_n)I\{x_n>y_n\}] \end{aligned}$$

$n_1,\ n_2,\ n_3$ sırasıyla, $x<y,\ x=y$ ve $x>y$ durumlarını sağlayan gözlemlerin sayısını göstersin ve $n=n_1+n_2+n_3$ olsun.

$$\underbrace{x_1<y_1,\dots,x_{n_1}<y_{n_1}}_{n_1}\ ,\qquad \underbrace{x_{n_1+1}=y_{n_1+1},\dots,x_{n_1+n_2}=y_{n_1+n_2}}_{n_2}\ ,$$

$$\underbrace{x_{n_1+n_2+1}>y_{n_1+n_2+1},\dots,x_{n_1+n_2+n_3}>y_{n_1+n_2+n_3}}_{n_3}$$

Gözlemlerin verilen bir örneği için, olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$$L=p_{00}^{x_1}p_{10}p_{+0}^{y_1-x_1-1}p_{+1}\cdots p_{00}^{x_{n_1}}p_{10}p_{+0}^{y_{n_1}-x_{n_1}-1}p_{+1}p_{00}^{x_{n_1+1}}p_{11}\cdots p_{00}^{x_{n_1+n_2}}p_{11}\times$$
$$\times\, p_{00}^{y_{n_1+n_2+1}}p_{01}p_{0+}^{x_{n_1+n_2+1}-y_{n_1+n_2+1}-1}p_{1+}\cdots\cdots p_{00}^{y_{n_1+n_2+n_3}}p_{01}p_{0+}^{x_{n_1+n_2+n_3}-y_{n_1+n_2+n_3}-1}p_{1+}$$

Gerekli işlemler yapıldığında,

$$L=p_{10}^{n_1}p_{+1}^{n_1}p_{11}^{n_2}p_{01}^{n_3}p_{1+}^{n_3}p_{00}^{\sum_{i=1}^{n_1}x_i+\sum_{i=1}^{n_2}x_{n_1+i}+\sum_{i=1}^{n_3}y_{n_1+n_2+i}}\ p_{+0}^{\sum_{i=1}^{n_1}y_i-\sum_{i=1}^{n_1}x_i-n_1}\times$$
$$\times\, p_{0+}^{\sum_{i=1}^{n_3}x_{n_1+n_2+i}-\sum_{i=1}^{n_3}y_{n_1+n_2+i}-n_3}$$

$$L=\ p_{10}^{n_1}p_{+1}^{n_1}p_{11}^{n_2}p_{01}^{n_3}p_{1+}^{n_3}p_{00}^{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2+n_3\bar{y}_3}\ p_{+0}^{n_1\bar{y}_1-n_1\bar{x}_1-n_1}\ p_{0+}^{n_3\bar{x}_3-n_3\bar{y}_3-n_3}$$

olur.

Burada $\bar{x}_1=\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_i\right)/n_1$, $\bar{x}_2=\left(\sum_{i=1}^{n_2}x_{n_1+i}\right)/n_2$, $\bar{x}_3=\left(\sum_{i=1}^{n_3}x_{n_1+n_2+i}\right)/n_3$,

$\bar{x}=\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3=n}x_i\right)/n$, $\bar{y}_1=\left(\sum_{i=1}^{n_1}y_i\right)/n_1$, $\bar{y}_2=\left(\sum_{i=1}^{n_2}y_{n_1+i}\right)/n_2$,

$\bar{y}_3=\left(\sum_{i=1}^{n_3}y_{n_1+n_2+i}\right)/n_3$, $\bar{y}=\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3=n}y_i\right)/n$

olmaktadır.

$$\log L=n_1\log p_{10}+n_1\log p_{+1}+n_2\log p_{11}+n_3\log p_{01}+n_3\log p_{1+}+$$
$$+(n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2+n_3\bar{y}_3)\log p_{00}+(n_1\bar{y}_1-n_1\bar{x}_1-n_1)\log p_{+0}+$$
$$+(n_3\bar{x}_3-n_3\bar{y}_3-n_3)\log p_{0+}$$

Burada $p_{+1}=p_{01}+p_{11},\quad p_{+0}=p_{00}+p_{10},\quad p_{1+}=p_{10}+p_{11},\quad p_{0+}=p_{00}+p_{01}$ olmaktadır.

Böylece, log-olabilirlik fonksiyonu şu şekilde bulunur.

$$
\begin{aligned}
\log L = {} & n_1 \log p_{10} + n_1 \log(p_{01} + p_{11}) + n_2 \log p_{11} + n_3 \log p_{01} + n_3 \log(p_{10} + p_{11}) + \\
& + (n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{y}_3) \log p_{00} + (n_1 \bar{y}_1 - n_1 \bar{x}_1 - n_1) \log(p_{00} + p_{10}) + \\
& + (n_3 \bar{x}_3 - n_3 \bar{y}_3 - n_3) \log(p_{00} + p_{01})
\end{aligned}
$$

Her bir değişkene göre türev alınıp 0'a eşitlendiğinde ortaya çıkan En Çok Olabilirlik eşitlikleri şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
& (n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 - n_1 - n_3)\hat{p}_{00}^2 + (n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{y}_3 - n_1)\hat{p}_{00}\hat{p}_{01} + \\
& + (n\bar{x} - n_3)\hat{p}_{00}\hat{p}_{10} + (n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{y}_3)\hat{p}_{10}\hat{p}_{01} = 0 \\
& (n_1 + n_3 \bar{x}_3 - n_3 \bar{y}_3)\hat{p}_{01}^2 + (n_1 + n_3)\hat{p}_{00}\hat{p}_{01} + (n_3 \bar{x}_3 - n_3 \bar{y}_3)\hat{p}_{01}\hat{p}_{11} + n_3 \hat{p}_{00}\hat{p}_{11} = 0 \\
& (n_3 + n_1 \bar{y}_1 - n_1 \bar{x}_1)\hat{p}_{10}^2 + (n_1 + n_3)\hat{p}_{00}\hat{p}_{10} + (n_1 \bar{y}_1 - n_1 \bar{x}_1)\hat{p}_{10}\hat{p}_{11} + n_1 \hat{p}_{00}\hat{p}_{11} = 0 \\
& n\hat{p}_{11}^2 + (n_1 + n_2)\hat{p}_{10}\hat{p}_{11} + (n_2 + n_3)\hat{p}_{01}\hat{p}_{11} + n_2 \hat{p}_{01}\hat{p}_{10} = 0
\end{aligned}
$$

Doğrusal olmayan bu denklemlerin açık formda çözümünün elde edilmesinde ileri sayısal teknikler gerekmektedir. Fakat olasılıklardan birini 0 kabul ederek bir çözüm yoluna ulaşabilmek mümkündür. $\hat{p}_{00} = 0$ için ve $n_1 > 0$, $n_3 > 0$ için diğer olasılıklar şu şekilde tahmin edilir:

$$
\hat{p}_{01} = \frac{[n_3 + n_1(\bar{y}_1 - \bar{x}_1)](\bar{y}_3 - \bar{x}_3)}{n_1[(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)(\bar{x}_3 - \bar{y}_3) + 1]}
$$

$$
\hat{p}_{10} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)[n_1 + n_3(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)]}{n_3[(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)(\bar{x}_3 - \bar{y}_3) + 1]}
$$

$$
\hat{p}_{11} = \frac{[n_1 + n_3(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)][n_3 + n_1(\bar{y}_1 - \bar{x}_1)]}{n_1 n_3[(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)(\bar{x}_3 - \bar{y}_3) + 1]}
$$

3. ÇOK DEĞİŞKENLİ DURUMA GENELLEŞTİRİLMESİ

Üç değişkenli geometrik dağılım için; Bernoulli marjinallerine sahip bir (U, V, Z) vektörünü gözönüne alalım. Bu vektör sadece 8 mümkün değeri alır. $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0),$ $(0,1,1), (0,1,0), (0,0,1)$ ve $(0,0,0)$, bunlara ilişkin olasılıklar da sırasıyla p_{111}, p_{110}, p_{101}, p_{100}, p_{011}, p_{010}, p_{001} ve p_{000}'dır.

Birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip üç değişkenli Bernoulli rasgele vektör dizisi $(U_1, V_1, Z_1), (U_2, V_2, Z_2), \ldots, (U_n, V_n, Z_n), \ldots$ için; X, $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ dizisindeki ilk başarıdan (1) önceki başarısızlıkların (0) sayısını; Y, $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ dizisindeki ilk başarıdan (1) önceki başarısızlıkların (0) sayısını ve Z de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ dizisindeki ilk başarıdan (1) önceki başarısızlıkların (0) sayısını göstersin. X, Y ve Z 'nin her biri bir geometrik dağılıma sahiptir ve genelde bağımsız olmayacaklardır. Ortak üç değişkenli dağılım olan $P\{X=l, Y=k, Z=t\}$ 'yi bulurken, l,k ve t'nin durumlarına göre olasılıkları hesaplamak gerekir. Toplam 13 mümkün durum vardır. Bunlar;

$l<k<t$, $l<t<k$, $k<t<l$, $k<l<t$, $t<l<k$, $t<k<l$, $l<k=t$, $l>k=t$, $k<l=t$, $k>l=t$, $t<k=l$, $t>k=l$, $l=k=t$.

Örneğin $l<k<t$ durumu için şu şekilde bir yapı ile olasılıklar elde edilebilir.

U	V	Z	
0	0	0	
.	.	.	
.	.	.	l kez
.	.	.	
0	0	0	
1	0	0	$\rightarrow$ 1 kez
+	0	0	
.	.	.	k-l-1 kez
.	.	.	
.	.	.	
+	0	0	
+	1	0	$\rightarrow$ 1 kez
+	+	0	
.	.	.	t-k-1 kez
.	.	.	
.	.	.	
+	+	0	
+	+	1	$\rightarrow$ 1 kez

Buna ilişkin olasılık $p_{000}^{l} p_{100} p_{+00}^{k-l-1} p_{+10} p_{++0}^{t-k-1} p_{++1}$ 'dır. Diğer olasılıklar da aynı şekilde bulunabilir.

Sonuç olarak, ortak üç değişkenli dağılım şu şekildedir:

$$P\{X=l,Y=k,Z=t\}=\begin{cases} p_{000}^{l}p_{100}p_{+00}^{k-l-1}p_{+10}p_{++0}^{t-k-1}p_{++1}, & l<k<t \\ p_{000}^{l}p_{100}p_{+00}^{t-l-1}p_{+01}p_{+0+}^{k-t-1}p_{+1+}, & l<t<k \\ p_{000}^{k}p_{010}p_{0+0}^{t-k-1}p_{0+1}p_{0++}^{l-t-1}p_{1++}, & k<t<l \\ p_{000}^{k}p_{010}p_{0+0}^{l-k-1}p_{1+0}p_{++0}^{t-l-1}p_{++1}, & k<l<t \\ p_{000}^{t}p_{001}p_{00+}^{l-t-1}p_{10+}p_{+0+}^{k-l-1}p_{+1+}, & t<l<k \\ p_{000}^{t}p_{001}p_{00+}^{k-t-1}p_{01+}p_{0++}^{l-k-1}p_{1++}, & t<k<l \\ p_{000}^{l}p_{100}p_{+00}^{k-l-1}p_{+11}, & l<k=t \\ p_{000}^{k}p_{011}p_{0++}^{l-k-1}p_{1++}, & l>k=t \\ p_{000}^{k}p_{010}p_{0+0}^{l-k-1}p_{1+1}, & k<l=t \\ p_{000}^{l}p_{101}p_{+0+}^{k-l-1}p_{+1+}, & k>l=t \\ p_{000}^{t}p_{001}p_{00+}^{l-t-1}p_{11+}, & t<k=l \\ p_{000}^{l}p_{110}p_{++0}^{t-l-1}p_{++1}, & t>k=l \\ p_{000}^{l}p_{111}, & l=k=t \end{cases} \tag{5}$$

Çok değişkenli duruma genelleştirilmesi ise, $l_1<l_2<l_3<...<l_n$ durumu için, ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki formülle elde edilebilir:

$$P\{X_1=l_1,X_2=l_2,...,X_n=l_n\}= p_{\underbrace{0...0}_{n}}^{l_1}\ p_{1\underbrace{0...0}_{n-1}}\ p_{+\underbrace{0...0}_{n-1}}^{l_2-l_1-1}p_{+1\underbrace{0...0}_{n-2}}\ p_{++\underbrace{0...0}_{n-2}}^{l_3-l_2-1}.....p_{\underbrace{+...+}_{n-1}0}^{l_n-l_{n-1}-1}\ p_{\underbrace{+...+}_{n-1}1}$$

4. SONUÇ

Bu çalışmada, literatürde farklı şekillerde ifade edilen iki değişkenli geometrik dağılım arasından, Marshall ve Olkin (1985)'in iki değişkenli Bernoulli dağılımından türetilen iki değişkenli geometrik dağılımı incelenmiştir. Bu dağılıma ilişkin dağılım özelliklerinden, ortak olasılık fonksiyonu, marjinal fonksiyonları, yaşam fonksiyonları ve ortak kümülatif dağılım fonksiyonu elde edilmiştir.

Ayrıca, sıralı değişkenler için en genel ilişki ölçüsü olan Kendall Tau, ele alınan iki değişkenli geometrik dağılım için elde edilmiştir. İlgili dağılımın parametre tahmin edicileri, En Çok Olabilirlik tahmin yöntemi ile elde edilmiş olup, çok değişkenli durum için genelleştirilmesi ortaya konmuştur.

5. KAYNAKLAR

Asha, G., Sankaran, P. G., Unnikrishnan N. N., 2003. Probability Models With Constant Total Failure Rate. Communications in Statistics-Theory and Methods, 32(6), 1089-1099.

Azlarov, T. A., Volodin, N. A., 1982. On The Discrete Analog Of Marshall-Olkin's Distribution. Stability problems for Stochastic Models. Lecture Notes in Mathematics, 982, Spinger, Berlin-New York, 17-23.

Cox, D. R., 1972. Regression Models And Life-Tables. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 34, 187-220.

Dhar, S. K., 1998a. Data Analysis With Discrete Analogue Of Freund's Model. J. Appl. Statist. Sci., 7, 169-183.

Dhar, S. K., 1998b. Modeling With A Bivariate Geometric Distribution. Advances On Methodological And Applied Aspects Of Probability And Statistics. Edited by N. Balakrishnan, Gordon and Breach Science Publishers, IISA 98 McMaster Conference Proceedings, 1, 101-109.

Dhar, S. K., Balaji, S., 2006. On The Characterization Of A Bivariate Geometric Distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, 35, 759-765.

Hawkes, A. G., 1972. A Bivariate Exponential Distribution With Applications To Reliability. Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 34, 129-131.

Krishna, H., Pundir, S. P., 2009. A Bivariate Geometric Distribution With Applications To Reliability. Communications in Statistics-Theory and Methods, 38, 1079-1093.

Marshall, A. W., Olkin, I., 1985. A Family Of Bivariate Distributions Generated By The Bernoulli Distribution. J. Am. Stat. Assoc., 80, 332-338.

Mitov, K., Nadarajah, S., 2005. Limit Distributions For The Bivariate Geometric Maxima. Extremes, 8, 357-370.

Nadarajah, S., 2008. Marshall And Olkin's Distributions. Acta. Appl. Math., 103, 87-100.

Nair, K. R. M., Nair, N. U., 1988. On Characterizing A Bivariate Geometric Distribution. Journal of the Indian Statistical Association, 26, 45-49.

Nelsen, B. R., 1999. An Introduction To Copulas. Springer, New york.

Phatak, A. G., Sreehari, M., 1981. Some Characterizations of A Bivariate Geometric Distribution. J. Ind. Statist. Assoc., 19, 141–146.

Roy, D., 1993. Reliability Measures In The Discrete Bivariate Set-Up And Related Characterization Results For A Bivariate Geometric Distribution. Journal of Multivariate Analysis, 46, 362-373.

BIVARIATE GEOMETRIC DISTRIBUTION AND ITS GENERALIZATIONS, DEPENDENCE MEASURES AND THE DISTRIBUTION PROPERTIES

ABSTRACT

In this study, the distribution properties of Marshall and Olkin's bivariate geometric distribution are studied and the concordance measure Kendall's Tau is obtained. Also, Maximum Likelihood estimators of the bivariate geometric distribution are obtained and generalization to multivariate case is given.

Keywords: Bernoulli distribution, Bernoulli marginals, Maximum Likelihood, Geometric distribution, Concordance measure, Survival function.