KAPANALTI DERGİSİ-2024-Sayı:5
(Journal of Kapanalti-2024- Issue:5)
Doi: 10.62080/kmfed.1398592

ÖNEM ÖRNEKLEMESİNİN BLACK SCHOLES OPSİYON FİYATLANDIRMA MODELİNE ETKİSİNİN İNCELENMESİ

EXAMINATION OF THE IMPACT OF IMPORTANCE SAMPLING ON THE BLACK SCHOLES OPTION PRICING MODEL

Hicran YILDIZ*, Sibel UÇAR VATANSEVER**
*Doktora Öğrencisi, Uludağ Üniversitesi, hicranyildiz@yahoo.com, ORCID: 0000-0003-4241-5231
**Doktora Öğrencisi, Uludağ Üniversitesi, sibelucar1@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3547-875X

MAKALE BİLGİSİ

Gönderilme Tarihi
30.11.2023
Revizyon Tarihi
03.01.2024
Kabul Tarihi
07.01.2024
Makale Kategorisi
Araştırma Makalesi

JEL Kodları
G10
G17
G23

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, finans alanındaki ulusal literatürde, opsiyon fiyatlama modelleri bağlamında Önem Örneklemesi yönteminin uygulamalarıyla ilgili mevcut boşluğu doldurmaktır. Bu amaç doğrultusunda, Varyans Azaltma Teknikleri arasında bulunan Önem Örneklemesi yönteminin, Black Scholes opsiyon fiyatlama modelinde tahminlerin doğruluğunu ve güvenilirliğini nasıl arttırabileceği incelenmektedir. Bu bağlamda, Avrupa tipi Alım Opsiyonları için farklı kullanım fiyatları ve simülasyon sayılarına dayanarak elde edilen Ortalama Kare Hata (MSE) ve Standart Hata (SE) değerleri karşılaştırmaktadır ve böylece Önem Örneklemesinin Black Scholes modelindeki etkisi incelenmektedir. Python programlama dili ile yapılan simülasyon analizleri, Önem Örneklemesi yönteminin, simülasyon sayısında azalmalar olmasına rağmen etkinliğini koruduğunu göstermiştir. Bulgular, nadir olasılıklı olaylarda Önem Örneklemesi kullanımının, odaklanan bölgelere daha fazla simülasyon yönlendirerek daha doğru analiz yapma olanağını sağladığını ortaya koymaktadır. Sonuç olarak, bu çalışma, Önem Örneklemesi yönteminin Black Scholes modeline kıyasla daha düşük MSE ve SE değerleri ile opsiyon fiyatlamada daha doğru sonuçlar sağladığını belirtmektedir. Ayrıca, ulusal literatürde bu yöntemin uygulanması konusunda bir boşluk olduğu ve bu alanın daha fazla araştırmaya açık olduğu gözlemlenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Black Scholes, Varyans Azaltma Tekniği, Önem Örneklemesi, Monte Carlo Simülasyonu, Opsiyon Fiyatlama

ARTICLE INFO

Received
30.11.2023
Revized
03.01.2024
Accepted
07.01.2024
Article Classification:
Research Article

JEL Codes
G10
G17
G23

ABSTRACT

This study aims to address the gap in national finance literature concerning the application of Importance Sampling in option pricing models. It investigates how Importance Sampling, a Variance Reduction Technique, can enhance the accuracy and reliability of predictions in the Black Scholes option pricing model. The research compares Mean Squared Error (MSE) and Standard Error (SE) values obtained for European Call Options at various strike prices and simulation numbers, thus examining the impact of Importance Sampling on the Black Scholes model. Simulations conducted in Python demonstrate that Importance Sampling retains its effectiveness even with fewer simulations. The findings suggest that using Importance Sampling in scenarios of rare probabilities enables more precise analysis by allocating more simulations to targeted areas. In conclusion, this study indicates that Importance Sampling provides more accurate option pricing outcomes with lower MSE and SE values compared to the Black Scholes model. It also highlights a research gap in the national literature regarding the implementation of this method, suggesting the field is open for further exploration.
Keywords: Black Scholes, Variance Reduction Technique, Importance Sampling, Monte Carlo Simulation, Option Pricing

Atıf (Citation): Yıldız, H.&Uçar Vatansever, S. (2024). "Önem Örneklemesinin Black Scholes Opsiyon Fiyatlandirma Modeline Etkisinin İncelenmesi", *Kapanaltı Dergisi*, (5): 14-29

Giriş

Yatırımcılar ve portföy yöneticileri, portföylerindeki riskleri değerlendirmek ve yönetmek amacıyla simülasyon yöntemlerini kullanmaktadır (Chan vd., 2013: s. 343). Finansal risklerin etkilerini anlamak ve bu risklere karşı korunma stratejileri geliştirmek için, türev ürünler arasında yer alan opsiyonlar tercih edilebilmektedir. Bu bağlamda, yatırım stratejilerinin etkinliğini test etmek ve portföy performansını olası piyasa değişiklikleri altında analiz etmek için simülasyonlar önemli bir araçtır. Simülasyonlar, farklı piyasa koşullarında portföyün nasıl performans göstereceğini tahmin etmeye yardımcı olmakta ve piyasa şokları ile ekstrem olayların etkilerini anlamak için kullanılmaktadır. Bu nedenle, finansal piyasalarda simülasyon ve opsiyon fiyatlama yöntemleri olası kayıpları belirlemek için simülasyon yöntemlerinden faydalanılmaktadır (Chan vd., 2013: s. 73).

Bu çalışmada, finansal piyasalarda önemli bir rol oynayan opsiyonlar ve opsiyon fiyatlandırma yöntemleri ile birlikte uygulanabilinen Varyans Azaltma Tekniğine detaylı bir şekilde ele alınmaktadır. Opsiyonlar, alıcılara belirli bir tarihte veya o tarihe kadar, önceden belirlenen bir fiyattan bir varlık satın alma veya satma hakkı veren finansal sözleşmeler olarak tanımlanmaktadır (Korkmaz, (2005), s.7). Bu finansal araçlar, hem risk yönetimi hem de spekülatif amaçlar için kullanılmaktadır. Opsiyon fiyatlandırmasında, bu sözleşmelerin değerinin belirlenmesi için matematiksel modeller ve finansal teoriler bütünü kullanılmaktadır. Opsiyonların değeri, temel alınan varlığın fiyatı, kullanım fiyatı, vade sonuna kadar kalan süre, risksiz faiz oranı ve varlığın fiyatındaki volatilite gibi faktörlere bağlı olarak hesaplanmaktadır.

Özellikle Avrupa tipi Alım Opsiyonları üzerine yoğunlaşan bu çalışmada, Fischer Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilen ve Robert Merton'un katkılarıyla zenginleştirilen Black-Scholes modeli ele alınmaktadır. Opsiyon fiyatlandırma teorisinde önemli bir dönüm noktası olan ve modern finans teorisinin temel yapıtaşlarından biri olarak kabul edilen bu model, risksiz arbitraj fırsatlarının bulunmadığı ve piyasanın sürekli işlediği varsayımları altında Avrupa tipi opsiyonların teorik fiyatlarını hesaplamak için kullanılır. Model, temel varlığın gelecekteki fiyat hareketlerinin log-normal dağılımını takip ettiği varsayımına dayanmakta ve bu dağılımı temel alarak opsiyonun bugünkü değerini belirlemektedir.

Black-Scholes modelinin sunduğu bu teorik çerçeve, finansal piyasalardaki belirsizlik ve karmaşıklıkla başa çıkmak için geliştirilen sayısal yöntemlerin önemini de ortaya koymaktadır. Bu bağlamda, özellikle Monte Carlo simülasyonları ve Önem Örneklemesi yöntemi gibi teknikler, Black-Scholes gibi modellerin pratik uygulamalarında kritik bir rol oynamaktadır. Monte Carlo yöntemi, rasgelelik temelli simülasyonlar yaparak çeşitli problemleri çözmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, belirli bir olasılık dağılımından rastgele sayılar üretilir ve bu sayılar üzerinden istatistiksel sonuçlar elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Monte Carlo simülasyonları, finansal modellemede, özellikle opsiyon fiyatlandırma ve risk yönetimi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Opsiyon fiyatlandırma modellerinde, Varyans Azaltma Teknikleri simülasyonların tahmin doğruluğunu artırmak amacıyla kullanılmaktadır. Finansal modellemede, piyasa koşulları ve diğer girdilerin belirsizliği nedeniyle, tahmin edilen değerlerin varyansının düşürülmesi ve böylece tutarlı ve güvenilir sonuçlar elde edilmesi önemlidir. Varyans Azaltma Teknikleri arasında yer alan Önem Örneklemesi, daha olası sonuçlara daha fazla ağırlık verilmesini ve daha az olası sonuçların daha seyrek örneklendirilmesini sağlayarak varyansı azaltmayı amaçlamaktadır.

Monte Carlo simülasyon yaklaşımında, nadir gerçekleşen bir olayın ortaya çıkmasını beklerken, deney tekrarları nedeniyle çok zaman harcanır. Önem Örneklemesi yönteminde ise, deneyin temel rasgeleliğinin dağılımı, önemli veya merak edilen olayların daha sık gerçekleşmesi amacıyla ayarlanmaktadır. Bu çalışma, bu konuları detaylı bir şekilde incelemeyi hedeflemekte ve finansal piyasalarda opsiyonların kullanımı, fiyatlandırma modelleri ve sayısal yöntemlerin uygulanması üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu alanlarda yapılan araştırmalar, finansal piyasaların daha iyi anlaşılmasına ve risk yönetiminin daha etkin bir şekilde yapılmasına olanak sağlamaktadır**.**

1. Temel Kavramlar

1.1. Opsiyon Tanımı ve Türü

Opsiyonlar, üzerine yazıldıkları dayanak varlıkları, belirli bir vade sonunda ve belirli bir fiyat üzerinden (kullanım fiyatı) alım ya da satım hakkı veren sözleşmelerdir. Piyasalarda alım ve satım opsiyonları olmak üzere iki opsiyon türü bulunmaktadır. Bir dayanak varlığı belirli bir fiyattan ilerki bir vadede alma opsiyonu veren sözleşmelere alım opsiyonları adı verilir. Bir dayanak varlığı, sözleşmede belirlenmiş bir fiyattan, belirli bir vadede satma hakkını veren sözleşmelere satım opsiyonları denir. Opsiyon sözleşmelerinin de futures sözleşmeleri gibi, bir alıcı bir de satıcı tarafı vardır. Alıcı alan taraf dayanak varlığın alma hakkını (alım opsiyonları) veya satma hakkını (satım opsiyonları) elde etmek için opsiyonu yazan partiye belirli bir fiyat öder. (Korkmaz vd., 2012: s. 402-405)

1.2. Opsiyon Tipi

Avrupa tipi opsiyonlar sadece vade sonunda kullanılabilinmektedir. Amerikan tipi opsiyonlar ise vadeye kadar her hangi bir zamanda kullanılabilinmektedir. Bermuda tipi opsiyonlar ise belli tarihlerde kullanım hakkı veren opsiyonlardır ve Amerikan ile Avrupa tipi opsiyonların birleşimi olarak bilinmektedirler. Amerikan tipi opsiyonlar daha fazla esneklik sunarken, Avrupa tipi opsiyonlar genellikle daha düşük maliyetli olabilmektedirler. Bermuda tipi opsiyonlar ise özelleştirilmiş bir çözüm sunabilmektedir (Wilmott, 2007: s. 44).

1.3. Opsiyonun Dayanak Varlığı

Opsiyonu yazan parti dayanak varlığı satın almak veya satmak ile yükümlüdür. Opsiyonlarda dayanak varlık olarak, devlet tahvil ve bonoları; hisseler, hisse portföyleri, hisse endeksleri; futures kontratlar; emtia ürünleri (ham petrol, altın vb) döviz kurları, tahvil ve bonolar üzerine yazılabilinmektedir.

1.4. Opsiyon Fiyatlandırma Modelleri

1.4.1. Black Schole Modeli

Fischer Black ve Myron Scholes (1973) tarafından yayınlanan makalesinde, finansal ekonomide dönüm noktası niteliğinde bir çalışmadır. Bu model, özellikle Avrupa tipi opsiyonların değerlendirilmesi için teorik bir çerçeve sunar ve piyasanın verimli olduğu, temel varlığın geometrik Brownian hareketi izlediği varsayımlarına dayanır. Modelin en önemli katkısı, Avrupa tipi alım ve satım opsiyonlarının fiyatları için kapalı formül çözümlerinin türetilmesidir ve bu finansal türevler ve risk yönetimi alanında büyük bir etki yaratmıştır (Black,1973: s. 637).

1.4.2. Binomial Modeli

Bu model, ilk olarak William Sharpe tarafından 1978 yılında önerilmiş ve daha sonra 1979 yılında Cox, Ross ve Rubinstein tarafından daha ayrıntılı bir şekilde formalize edilmiştir. Binomial model, opsiyonun vadesine kadar olan süreyi belirli sayıda eşit zaman aralıklarına bölünmektedir. Her bir zaman aralığında, dayanak varlığın fiyatının iki olası yolu bulunmaktadır: yukarı veya aşağı. Bu model, özellikle Amerikan tipi opsiyonlar gibi erken kullanım özelliğine sahip opsiyonların değerlendirilmesinde kullanılmaktadır (Xiao, 2023: s. 3414) Binominal model, opsiyonun vade tarihinden önce herhangi bir zamanda kullanılma olasılığını da hesaba katmaktadır

1.4.3. Trinomial Modeli

Trinomial Model, Binomial modelin bir genişlemesi olarak kabul edilir ve Boyle tarafından 1986 yılında geliştirilmiştir. Model, her zaman adımında dayanak varlığın fiyatının üç olası yolu olduğunu varsaymaktadır: yukarı, aşağı ve sabit. Modelin, her bir zaman adımında dayanak varlığın fiyatı için üç farklı senaryo hesaplanır ve bu senaryoların ağırlıklı ortalaması alınarak opsiyonun teorik fiyatı tespit edilir (Josheski, 2020: s.79). Ayrıca, Trinomial Model, volatilitenin ve piyasa koşullarının zaman içinde değişebileceğini dallar üzerinden modelleyerek, Amerikan opsiyonların erken kullanımı durumlarında olasılıkların değerlendirilmesinde sıkça kullanılmaktadır.

1.4.4 GARCH Modeli

GARCH (Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişkenlik) modeli, finansal zaman serilerindeki volatiliteyi (fiyat dalgalanmalarını) modellemek için kullanılan istatistiksel bir yöntemdir. Robert Engle tarafından ARCH (Otokorelasyonlu Koşullu Değişkenlik) modelinin bir genişlemesi olarak Tim Bollerslev tarafından 1986 yılında geliştirilmiştir. Modelinin temel özelliği, bir finansal varlığın geçmiş dönemlerdeki volatilitesinin, mevcut dönemdeki volatiliteyi tahmin etmede kullanılabilmesidir (Wilmott, 2007: s. 210).

1.4.5. Heston Modeli

Binomial modelin kurucuları olarak bilinen Cox ve Ross' un, Ingersoll ile yapmış oldukları çalışmada, piyasa koşullarının ve volatilitenin değişken doğasını vurgulamışlardır. Bu çerçevede, Steve Heston 1993 yılında, hem dayanak varlığın hem de volatilitenin zaman içerisinde değişken olduğu ve aralarındaki korelasyonları da içeren bir stokastik volatilite modeli geliştirmiştir (Heston, 1993). Heston Modeli, Cox, Ross ve Ingersoll modeline benzer şekilde, volatilitenin belirli bir uzun vadeli ortalama değere doğru eğilim gösterdiğini öne sürmektedir. Bu, volatilitenin aşırı yüksek veya düşük seviyelere ulaştıktan sonra zamanla ortalama bir değere dönme eğiliminde olduğunu ifade etmektedir. Heston'un bu modeli, finansal piyasalardaki volatilite dinamiklerini daha gerçekçi bir şekilde modellemek için önemli bir adım olmuştur.

1.5. Opsiyon Fiyatı (Opsiyon Primi)

Opsiyon fiyatlama modelleri, opsiyon sözleşmelerinin değerini hesaplamak için kullanılmaktadır ve opsiyon primi olarak da bilinmektedir. Bu modeller, opsiyonun sağladığı hakların değerini, piyasa koşulları ve opsiyonun özellikleri (vade süresi, kullanım fiyatı, dayanak varlık fiyatı, volatilite ve risksiz faiz oranı) dikkate alarak belirlenmektedir. Opsiyon fiyatı, opsiyon alıcısının opsiyon sözleşmesinden doğan hakları kullanabilme imkanı karşılığında satıcıya ödediği primi temsil etmektedir. Bu prim, alıcının sözleşme süresince taşıdığı riskin bir karşılığı olarak görülmektedir (Wilmott, 2007: s. 39).

1.6. Opsiyonların Kullanım Amaçları

Opsiyonlar, finansal piyasalarda çeşitli amaçlar için kullanılmaktadır. Riskten korunma (hedging) amacıyla, piyasa dalgalanmalarına karşı koruma sağlamak üzere opsiyonlar tercih edilmektedir. Örneğin, hisse senedi portföyüne sahip yatırımcılar, piyasa düşüşlerine karşı satım opsiyonları satın alarak risklerini minimize etmektedirler. Spekülatif işlemlerde de opsiyonlar sıklıkla kullanılmakta; yüksek kaldıraç imkanı sayesinde küçük yatırımlarla büyük pozisyonlar alınarak potansiyel kârlar artırılmaktadır. Stratejik yatırım planlamalarında opsiyonlar, gelecekteki projeler için gerekli ham maddeleri sabit bir fiyattan temin etmek amacıyla kullanılmaktadır. Opsiyon yazarak (satmak) ek gelir elde etme stratejisi de uygulanmakta; bu strateji, hisse senetleri üzerine alım opsiyonları yazılarak prim geliri elde etmeyi içermektedir. Portföy çeşitlendirmesi ve arbitraj fırsatlarından yararlanma amacıyla da opsiyonlar kullanılmaktadır. Farklı vade ve kullanım fiyatlarına sahip opsiyonlar, çeşitli piyasa senaryolarına karşı esnek bir yatırım stratejisi oluşturulmasını sağlamakta, piyasa fiyatları arasındaki farklardan yararlanma fırsatı sunmaktadır. Bu çeşitlilik, opsiyonları finansal piyasalarda çok yönlü ve stratejik bir araç haline getirmektedir (Karthika, 2013: s. 3-5).

2. Literatür Taraması

Robert C. Merton'un (1973) yayınlanan makalesi ise, opsiyon fiyatlama teorisinde önemli bir adım atarak Black Scholes modelinin matematiksel temellerini genişletmiştir. Merton, bu çalışmasında opsiyonların rasyonel fiyatlandırılması için sürekli zaman modellerini kullanmış ve finansal piyasalardaki rasyonel davranışı modellemeye yönelik önemli bir katkıda bulunmuştur. Opsiyon fiyatlama modelini geliştirerek, opsiyonların ve diğer türev ürünlerin değerlendirilmesinde kullanılan matematiksel ve istatistiksel yöntemlerin ilerlemesine katkı sağlamıştır. Merton'un bu çalışması, finansal piyasalarda risk yönetimi ve türev ürünlerin değerlendirilmesi konusunda temel bir referans noktası olarak kabul edilmektedir.

Opsiyon fiyatlama ve finansal risk yönetimi alanında, Varyans Azaltma Teknikleri ve Önem Örneklemesi yöntemleri önemli bir yer tutmaktadır. Bu bağlamda, Glasserman, Heidelberger ve Shahabuddin (1999) tarafından opsiyon fiyatlamalarda Varyans Azaltma Tekniklerinin kullanımı üzerine yapılan çalışma, bu alandaki temel kaynaklardan biri olarak kabul edilmektedir. Bu çalışmada, opsiyon fiyatlama modellerindeki tahminlerin doğruluğunu ve güvenilirliğini artırmak için Varyans Azaltma Tekniklerinin nasıl uygulanabileceği detaylı bir şekilde incelenmektedir. Boyle, Broadie ve Glasserman, (1997) çalışmasında ise, Monte Carlo simülasyonları için Varyans Azaltma Teknikleri arasında Kontrol Varyantı, Antitetik Varyantları, Moment Eşleştirme yöntemi, Tabakalı Örnekleme, Latin Hiperküp Örnekleme, Önem Örneklemesi, koşullu Monte Carlo yöntemi ve Kvasi-Monte Carlo yöntemlerini sunmaktadır.

Su ve Fu (2000) ise, finans alanında Önem Örneklemesinin uyarlana bilirliğini vurgulayan bir çalışma sunmuşlardır. Bu çalışma, Önem Örneklemesi yönteminin finansal modellerde nasıl etkin bir şekilde kullanılabileceğini ve bu yöntemin adaptasyon sürecinin önemini ortaya koymaktadır. Çalışma, menkul kıymet fiyatlamasında tahmin hatasını azaltmak için rastgele sayıların hareketindeki sapmanın Önem Örneklemesi yöntemiyle değiştirilmesinin etkili bir yol olduğunu göstermektedir. Tüm durumlarda, eklenen hesaplama yükü, toplam hesaplama süresinin %10'undan azdır. Özellikle karda olmayan opsiyonlar için, simülasyon sonuçların hesaplamalarında 10 ila 170 kat arasında hata payları iyileşmektedir.

Robbins-Monro (2004) tarafından yapılan çalışma, Varyans azaltmada Robbins-Monro algoritmalarını tanıtmaktadır. Bu algoritmalar, özellikle stokastik optimizasyon problemlerinde ve finansal modellemede kullanılan önemli yöntemler arasında yer almaktadır. Çalışmada yer alan farklı Varyans Azaltma Teknikleri bulunmaktadır ve uygulamalar hakkında bir teorik çerçeve sunmaktadır. Çalışmanın sonuçlarında elde edilen bulgular ise opsiyon fiyatlamalarda hesaplama sürelerinde ciddi azalmalar ve düşük varyans elde edildiği vurgulanmaktadır.

Glasserman ve Li (2005), portföy kredi riskinde Önem Örneklemesinin uygulanmasını gösteren öncü bir çalışma sunmaktadırlar. Bu çalışma, kredi riski yönetimi alanında Önem Örneklemesi yönteminin nasıl kullanılabileceğini ve bu yöntemin risk değerlendirmelerindeki etkinliğini ortaya koymaktadır. Çalışma, kredi riskleri ve bu risklerin olasılıkları bağlamında, olasılık senaryolarının Önem Örneklemesi yöntemiyle nasıl ilişkilendirileceğine dair bilgiler sunmaktadır. Sonuç olarak, portföy yöneticilerinin kredi risklerine karşı nasıl korunmaları gerektiği konusunda önemli bir kaynak olarak değerlendirilmektedir.

Neddermeyer (2011), parametrik olmayan Önem Örneklemesine bir yaklaşım sunmuştur. Bu çalışma, Önem Örneklemesi yönteminin daha geniş bir yelpazede nasıl uygulanabileceğini ve bu yöntemin esnekliğini vurgulamaktadır. Birden fazla türev ürünü kullanımı için yaygınca kullanılan Önem Örneklemesi için daha anlaşılır bir algoritma sunarak Önem Örneklemesinin kullanımına katkıda bulunmuştur.

Son olarak, Hintz ve diğerleri (2021) tarafından sunulan çalışma, Varyans Azaltma Tekniklerinin evrimini göstermektedir. Bu çalışma, Varyans Azaltma Tekniklerinin zaman içinde nasıl geliştiğini ve finansal modellemedeki uygulamalarının nasıl değiştiğini detaylı bir şekilde incelemektedir. Önem Örneklemesinin dahil olmak üzere diğer Varyans Azaltma Tekniklerinin bir arada kullanımı ile varyans azaltmanın sonuçlarının daha etkili olduğunu göstermiştir. İstenmeyen olayların olası durumu hakkında önden bilgi edinmenin finansal piyasalarda bir üstünlük sağladığını da vurgulamaktadır.

Literatür araştırmaları, uluslararası finansal literatürde, özellikle opsiyon fiyatlama modellerinde, Önem Örneklemesi yöntemlerinin kullanımının artan bir eğilim gösterdiğini belirtmektedir.

3. Araştırmanın Metodolojisi

3.1 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, finans alanındaki ulusal literatürde, opsiyon fiyatlama modelleri bağlamında Önem Örneklemesi yönteminin uygulamalarıyla ilgili mevcut boşluğu doldurmaktır.

Bu çalışmanın asıl amacını destekleyen bir diğer amaç ise, opsiyon piyasalarında meydana gelen değişikliklerin ve olayların opsiyon fiyatları üzerindeki etkilerini analiz etmek için kullanılan yöntemlerin daha etkili bir şekilde kullanılmasını sağlamak amacıyla Önem Örneklemesi yönteminin sunulmasıdır. Önem Örneklemesi yöntemin, opsiyon fiyatlama modellerindeki tahminlerin doğruluğunu ve güvenilirliğini artırma potansiyeline sahiptir. Bu sayede, finansal modelleme ve risk yönetimi alanlarında daha etkili ve güvenilir yöntemlerin geliştirilmesine katkıda bulunmayı hedeflemektedir.

Uygulamalı bir örnek üzerinden verilerin farklı kullanım fiyatları ve farklı simülasyon sayılarında incelenmektedir.

3.2 Araştırmanın Verileri

Çalışmada kullanılan veriler, Black Scholes modeli içinde kullanılan risksiz faiz oranı (r), kullanım fiyatı (K), hisse senedi fiyatı (S_0), vadesi (T) ve yıllık volatilite değerleri (σ) olmak üzere altı parametreden oluşmaktadır. Çalışmada kullanılan değerler ise aşağıdaki gibidir:

Tablo 1. *Black Scholes Modelin Parametre Değerleri ve Monte Carlo Simülasyon Sayıları*

$S_0 = 50$	K = 40, 45,50, 55, 60 ve 65	r = %4	T = 1	σ = %20
Monte Carlo Simülasyon sayılar 1.000, 10.000 ve 100.000				

Kullanılan parametre değerleri, Zhao, Q ve diğerleri (2013) tarafından yayınlanan çalışmadan alınmıştır. Simülasyon verilerinin oluşturulmasında, bir yılın 252 iş gününe eşit olduğu kabul edilmiş ve bu nedenle zaman dilimi olarak 1/252 değeri kullanılmıştır. Çalışmanın simülasyon verileri ve sonuçlar Python programlama dili ile analiz edilmiştir.

Monte Carlo simülasyonu, kavramsal ve algoritmik basitliğine rağmen, hesaplama maliyeti bakımından son derece yüksek olabilmektedir. Simülasyonun, etkili bir yaklaşım sağlayabilmesi için birçok örneğe ihtiyaç duyulmaktadır (Shonkwiler, 2009). Önem Örneklemesinin kullanım amacı ise, simülasyon sayısında azalmalar olmasına rağmen etkinliğini yitirmemesidir (Zhao, 2013). Bu nedenle, karşılaştırmalar adına farklı simülasyon sayıları seçilmiştir.

3.3 Kısıtlamalar

Çalışmada kullanılan parametre değerleri, hipotetik olarak sunulmaktadır. Bu yaklaşım, kullanım fiyatlarının değişkenlik etkisini sistematik bir şekilde inceleyebilmek için tercih edilmiştir. Farklı kullanım fiyatlar ve simülasyon sayıları ile nadir olayların incelenmesi adına hipotetik verilerin kullanılmıştır.

Çalışmada ele alınan bir diğer kısıtlama, yalnızca Alım opsiyonlarına yönelik olmasıdır. Satım opsiyonlarında Önem Örneklemesi yönteminin etkinliğinin Alım opsiyonlarındakiyle benzer düzeyde olması nedeniyle, Satım opsiyonları bu çalışmanın kapsamı dışında tutulmaktadır.

Önem Örneklemesi yönteminin incelenmesi açısından, Black-Scholes modeli, Avrupa Tipi opsiyonlarda gösterdiği fiyatlama performansı nedeniyle tercih edilmiştir (Xiao, 2023: s. 3414).

3.4 Araştırmanın Yöntemi

3.4.1 Black Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Black Scholes modeli, opsiyonunun değerini hesaplamak için kullanılan bir formüldür. Yöntemin 1997 yılında ekonomi alanında Nobel Ödülü'ne layık görülmüştür ve finans dünyasında devrim niteliğinde olduğu kabul edilmiştir. Günümüzde hala kullanılmakta olan model özellikle risk yönetimi ve stratejik yatırım kararları için kullanılmaktadır (Washburn vd, 2012: s. 1). Model, Alım opsiyonu için aşağıdaki formülle ile ifade edilmektedir (Hull, 2017: s. 291):

Alım opsiyonu *C* aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \qquad Denklem\ 1$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad Denklem\ 2$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- C : Opsiyonun fiyatı,
- S_0 : Hisse senedinin şu anki fiyatı,
- K : Opsiyonun kullanım fiyatı,
- r : Risksiz faiz oranı (yıllık),
- T : Opsiyonun vadesine kadar olan süre (yıl cinsinden),
- $N(d)$: Standart normal dağılım fonksiyonu,
- σ : Hisse senedinin yıllık volatilitesi ifade etmektedir.

3.4.2 Monte Carlo Simülasyonu

Monte Carlo, özellikle karmaşık sistemlerin ve olasılık dağılımlarının analizinde kullanılmaktadır ve farklı bilimsel ve mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Monte Carlo simülasyon yöntemi, rastgele seçilen örnekler üzerinden bir fonksiyonun beklenen değerini *(*$E[f(x)]$ hesaplamak için kullanılmaktadır. Bu yöntemde, her bir rastgele örnek fonksiyonu $f(x_i)$ tarafından değerlendirilir ve bu değerlerin ortalaması alınarak fonksiyonun genel beklenen değeri tahmin edilmektedir. dx ise, diferansiyel öğeyi ifade eder ve integral hesaplamalarında kullanılmaktadır (Wilmott, 2007: s. 607).

$$E[f(x)] \approx \frac{1}{n}\sum_i f(x_i)dx \qquad Denklem\ 3$$

3.4.3 Önem Örneklemesi

1950'de, Önem Örneklemesi terimi, daha önce "kota örneklemesi" olarak bilinmekteydi fakat kimin tarafından keşfedildiği konusu tam olarak bilinmemektedir (Andral, 2022: s. 2). 1950'de yapılan bir araştırmaya göre üç farklı çalışmada yer aldığı bilinmektedir. Bu çalışmalardan biri, 1949'da New York'ta düzenlenen bir IBM konferansının tutanaklarında yer almıştır. Farklı bilimsel alanlarda kullanılan Önem Örneklemesi, özellikle nadir olayların olasılıklarını ve etkilerini daha doğru bir şekilde tahmin etmek ve simülasyonların verimliliğini artırmak için tercih edilen bir yöntemdir (Glasserman, 1999, 119).

Önem Örneklemesi, bir rastgele değişkenin beklenti değerinin *(*$E[f(x)]$*)*, o değişkenin olası değerlerinin olasılıklarıyla ağırlıklandırarak hesaplanan ortalaması olarak tanımlanmaktadır. Matematiksel olarak, bir fonksiyonun $f(x)$ beklenti değeri, bu fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ ile çarpılıp, tüm olası x değerleri üzerinden entegre edilerek hesaplanmaktadır (Glasserman, 1997: s. 1283).

$$E[f(x)] = \int f(x)p(x)dx \qquad Denklem\ 4$$

3.4.3.1 Alternatif Yoğunluk Fonksiyonu ve Önem Örneklemesi

Denklem 5'te yer alan $q(x)$ fonksiyonu, orijinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ yerine kullanılan, entegrasyonu kolaylaştıran bir alternatif yoğunluk fonksiyonudur. Önem örneklemesi, bu yeni yoğunluk fonksiyonu altında entegrasyonu daha basit hale getirmektedir. $q(x)/p(x)$ oranı (Hull, 2008: s.434), orijinal ve alternatif yoğunluk fonksiyonları arasındaki farkı dengelemek için kullanılmaktadır.

$$E[f(x)] = \int f(x)\frac{p(x)}{q(x)}q(x)dx \qquad Denklem\ 5$$

3.4.3.2 Opsiyon Fiyatlaması için Sayısal Yaklaşım

Monte Carlo, $q(x)$ olarak belirtilen bir olasılık dağılımı altında rastgele örnekler almaktadır. Bu örnekler, x_i olarak ifade edilir ve fonksiyonun değerlendirilmesi için kullanılmaktadır (Fouque, 2004: s.6).

$$E[f(x)] \approx \frac{1}{n}\sum_i f(x_i)\frac{p(x)}{q(x)} \qquad Denklem\ 6$$

Burada n, alınan örnek sayısını ifade eder ve bu formül, özellikle n büyük olduğunda, entegralin yaklaşık değerini vermektedir.

Alım Opsiyonu İçin Ödeme Fonksiyonu aşağıdaki gibidir ve Denklem 3, 4, 5 ve 6'te yer alan x rassal sayıları ifadesi uygulamalarda Z olarak ifade edilmektedir (Fouque, 2004: s.6).

$$f(z) = e^{-rT}max(0, S_0e^z - K) \qquad Denklem\ 7$$

Önem Örneklemesi, Z_T Monte Carlo rassal sayıları temsil sayıları temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi olasılık yoğunluk fonksiyonlarına tabi tutulmaktadır (McLeish, 2005: s.262):

$$E_Q[e^{-rT}(S_0e^{Z_T} - K)^+], \text{ burada } p(Z_T) \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2T\right) \qquad Denklem\ 8$$

$$E_{\mathbb{Q}_0}[e^{-rT}(S_0e^{Z_T} - K)^+], \text{ burada } q(Z_T) \sim N\left(\left(\log\left(\frac{S_0}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2T\right) \qquad Denklem\ 9$$

Denklem 8 ve 9'de yer alan $E_Q[e^{-rT}(S_0e^{Z_T} - K)^+]$ ifadesi Avrupa tipi Alım opsiyonunun şu anki değerini hesaplamak için kullanılmaktadır. Burada,

- $E_Q[\cdot]$ ifadesi, risk nötr ölçüde (Q) beklenen değeri,
- e^{-rT} ifadesi, sürekli bileşik faiz formülü kullanılarak hesaplanan indirgeme faktörüdür, Burada r risksiz faiz oranı ve T opsiyonun vadesine kalan süreyi,
- S_0 başlangıç hisse senedi fiyatını,
- e^{Z_T} ifadesi, hisse senedi fiyatının log-normal dağılımını,
- $(S_0 e^{Z_T} - K)^+$ ifadesi, opsiyonun içsel değerini temsil eder. Burada K kullanım fiyatını ifade etmektedir.

Denklem 8'de yer alan $p(Z_T) \sim N((r-\sigma^2/2)T, \sigma^2 T)$**,** bu ifade, Z_T'nin normal dağılımını göstermektedir. Black Scholes modelinde, hisse senedi fiyatlarının logaritmalarının değişimi normal dağılım göstermektedir. Burada,

- $r-\sigma^2/2$ ifadesi, ortalama getiri oranını,
- σ hisse senedinin oynaklığını (volatilite),
- T opsiyonun vadesine kalan sürediyi ifade etmektedir.

Denklem 9'de yer alan $q(Z_T) \sim N((\log(S_0/K) - \sigma^2/2)T, \sigma^2 T)$ ifadesi, başka bir normal dağılımı temsil eder ve Önem Örneklemesi için kullanılmaktadır. Bu dağılım, opsiyonun içsel değerinin pozitif olma olasılığını artırmak için kullanılmaktadır. Burada, $\log(S_0/K) - \sigma^2/2$ ifadesi, yeni ortalama getiri oranını, σ ve T yine hisse senedinin oynaklığını ve opsiyonun vadesine kalan süreyi temsil etmektedir.

Varyansı minimize etmek için optimizasyon yaklaşımı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Rubinstein, 2019: s.159):

$$\text{Minimize } \mathbb{E}\left[\frac{f(z)^2 p(z)}{q(z)}\right] \qquad \mathit{Denklem}\ 10$$

Bir rassal değişkenin değerleri ortalamanın hem üstünde hem de altında olabilmektedir. Eğer bu sapmaları doğrudan toplarsak, pozitif ve negatif değerler birbirini götürebilir ve yanıltıcı bir sonuç elde edilebilmektedir. Denklem 10'da olduğu gibi sapmaların karesini almak($f(z)^2$) , bu değerlerin hep pozitif olmasını sağlamaktadır.

Önem Örneklemesi ile Alım opsiyon C_0 fiyat aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$C_0 = \frac{1}{n}\Sigma f(z)\frac{P(z)}{q(z)} \qquad \mathit{Denklem}\ 11$$

Black Scholes Alım opsiyon fiyatı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$C_0 = \frac{1}{n}\Sigma f(z) \qquad \mathit{Denklem}\ 12$$

3.4.4 Sonuçların Değerlendirme Yöntemleri

Ortalama Kare Hata (MSE) aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Elvira, 2022: s.5):

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Black\ Scholes\ Fiyatı - Ö.Ö.Fiyatı)^2 \qquad \mathit{Denklem}\ 13$$

Denklem 13'deki MSE değeri, teorik fiyat ile Önem Örneklemesi yöntemi kullanılarak hesaplanan fiyat (Ö.Ö. Fiyatı) arasındaki farkların karelerinin ortalaması olarak hesaplanmaktadır. MSE, tahmin edilen değerlerin ne kadar doğru olduğunu ölçen bir göstergedir. Düşük bir MSE değeri, tahminlerin gerçek değerlere daha yakın olduğunu göstermektedir.

Standart Hata (SE) aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Elvira, 2022: s.4):

$$SE = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (Black\ Scholes\ Fiyatı - Ö.Ö.Fiyatı)^2} \qquad Denklem\ 14$$

Standart Hata, ortalama bir tahminin ne kadar değişken olduğunu gösterir. Bu formül, teorik fiyat ile Önem Örneklemesi yöntemi kullanılarak hesaplanan fiyat arasındaki farkların standart sapmasını hesaplamaktadır (Chan, 2013: s.75). Standart hata, tahminlerin güvenilirliğini değerlendirmede kullanılır; daha düşük bir standart hata, daha güvenilir bir tahmin anlamına gelmektedir.

Ayrıca, MSE ve SE değerlerinin karşılaştırılmasını kolaylaştırmak amacıyla, bu değerler rasyo olarak sunulmaktadır.

4. Bulgular

Önem Örneklemesi, opsiyon fiyatlamasında kullanılan bir yöntem olup (Denklem 11), özellikle nadir olayların incelenmesinde etkili olmaktadır. Şekil 1'de nadir olaylara nasıl yoğunlaştırılmış simülasyon sonuçların görseli bulunmaktadır. Her bir çizgi, bir simülasyon sonucunu temsil etmektedir ve Şekil 1'de yer alan her iki grafik için ise 100 adet çizgi, yani simülasyon sayısı bulunmaktadır.

Grafiğin sol tarafında, Denklem 8'den yola çıkarak, Black Scholes modeline dayanmaktadır. Hisse senedi fiyatının (*St*) zaman içindeki evrimi gösterilmektedir. Bu kısımda, her bir çizgi aşağıdaki formülle hesaplanan bir hisse senedi fiyatı yolunu temsil etmektedir:

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right)} \qquad Denklem\ 15$$

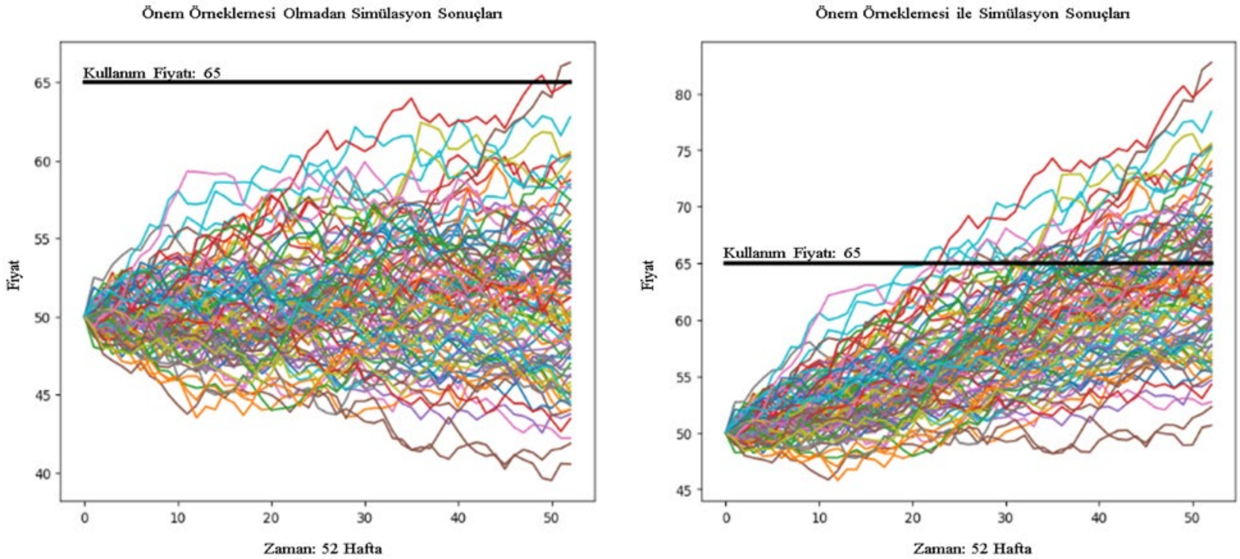
Bu durumda, S0=50, r=0.04, T=1 ve σ=0.2 parametre değerleri kullanılmıştır. Grafiğin sağ tarafında ise, Önem Örneklemesi yöntemi kullanılarak, hisse senedi fiyatının alternatif bir yolunun evrimi gösterilmektedir. Bu kısımda kullanılan formül ve parametreler şunlardır:

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(\log\left(\frac{S_0}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right)} \qquad Denklem\ 16$$

Burada, S0=50, r=0.04, T=1 ve σ=0.2 parametre değerleri kullanılmıştır. Denklem 16'de görüldüğü üzere, Önem Örneklemesi yöntemi, istenen kullanım fiyatına (siyah çizgi, K=65) daha fazla simülasyon sayısı atayarak, opsiyon fiyatlamayı olası değere yakın tahminlerde bulunmaltadır.

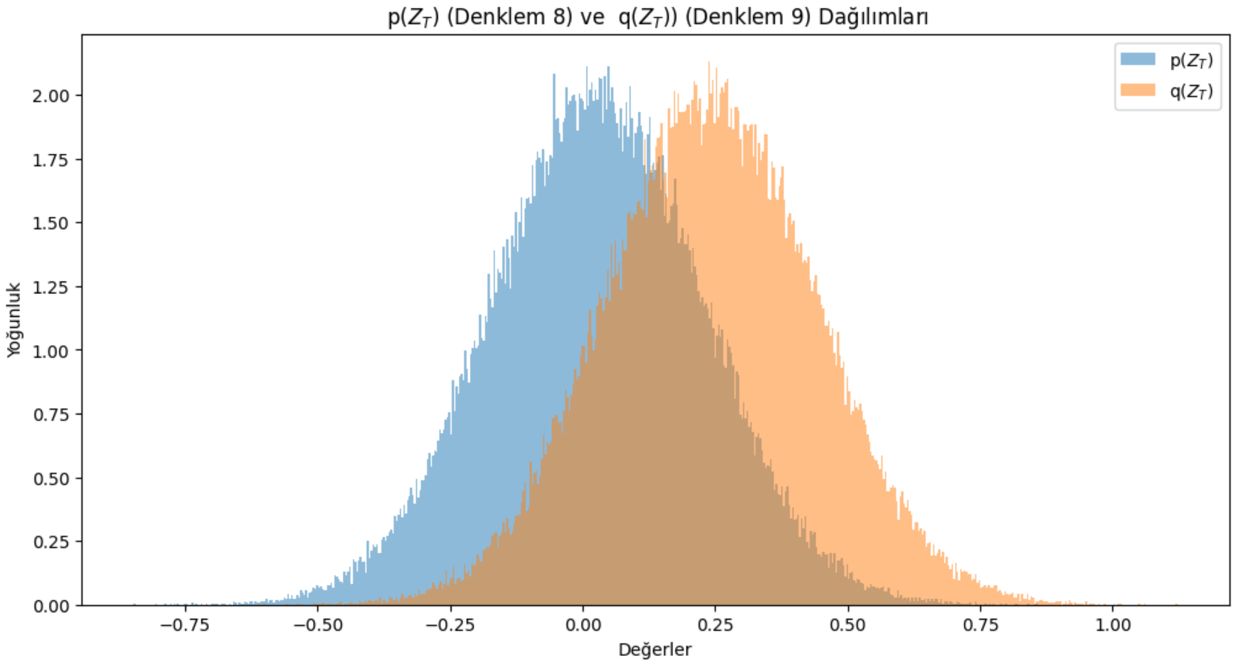
Ayrıca, Şekil 1'de yer alan Önem Örneklemsi ile simülasyonların dağılım (sağdaki grafik) yönünü ise Şekil 2'de yer alan turuncu dağılımlara göre şekil almaktadır. Her iki grafiğin amacı ise, Önem Örneklemenin arkasında yatan matematiksel algoritmanın opsiyon fiyatlar üzerindeki etkisini görselleştirmektir.

Şekil 1. *Sol Grafik: Black Scholesun Simülasyon Evrimidir .Sağ Grafik: Önem Örneklemesi ile Simülasyon Evrimidir.*



Şekil 2'de ise, gösterilen mavi alan, Denklem 7'deki p(Z_T) dağılımını, Black Scholes modelin olasılık dağılımı temsil eder ve r=0.04, T=1 ve σ =0.2 parametrelerini kullanmaktadır. Turuncu alan Denklem 8'deki q(Z_T) dağılımını, Önem Örnekleme ile olasılık dağılımı göstermektedir ve S_0=50, K=65, r=0.04, T=1, σ=0.2 parametrelerini kullanmaktadır. Şekil 1'de yer alan simülasyonlar, Şekil 2'de yer alan dağılımlar sayesinde oluşmaktadır ve bu Tablo 2'de yer alan nihayi opsiyon fiyatları etkilemektedir.

Şekil 2. *Mavi,Orjinal Olasılık Yoğunluk Funksiyonu p(Zt) (Denklem 8). Turuncu, Alternatif Olasılık Yoğunluk Funksiyonu q(Zt) (Denklem 9).*



Tablo 2'de göründüğü üzere, Black Scholes (BS) modeli (Denklem 12) ve Önem Örneklemesi yöntemi (Denklem 11) kullanılarak hesaplanan opsiyon fiyatlarını, Ortalama Kare Hata (MSE) ve Standart Hata (SE) değerlerini, farklı simülasyon sayıları (1.000, 10.000, 100.000) için karşılaştırmaktadır. Ayrıca, MSE ve SE değerlerindeki azalmanın oranlarını (rasyolarını) içermektedir.

Simülasyon sayısı 1.000 olduğunda, MSE ve SE Değerler Black Scholes modeline göre, Önem Örnekleme yöntemi genellikle daha düşük MSE ve SE değerleri sunmaktadır. Özellikle K=40 ve K=55 kullanım fiyatlarında, Önem Örneklemesi yöntemiyle elde edilen MSE değerleri çok daha düşüktür. MSE ve SE Rasyoları özellikle K=40 ve K=55 kullanım fiyatlarında, Önem Örneklemesi yöntemiyle elde edilen MSE değerlerinde büyük oranda azalma görülmektedir (sırasıyla 82.25 ve 189.32 rasyoları). Sonuç olarak, Önem Örneklemesi yöntemi, 1.000 simülasyon sayısı için özellikle yüksek kullanım fiyatları için daha etkili sonuçlar sunmaktadır.

Simülasyon sayısı 10.000 olduğunda, MSE ve SE Değerleri, Black Scholes modeline göre, Önem Örneklemesi yöntemi genellikle daha düşük MSE ve SE değerleri sunmaktadır, ancak fark 1.000 simülasyona göre daha azdır. MSE ve SE Rasyoları, özellikle K=50 ve K=55 kullanım fiyatlarında, Önem Örneklemesi yöntemiyle elde edilen MSE değerlerinde büyük oranda azalma görülmektedir (sırasıyla 32.78 ve 102.85 rasyoları). Sonuç olarak, 10.000 simülasyon sayısı için Önem Örnekleme yöntemi, özellikle orta ve yüksek kullanım fiyatları için daha etkili sonuçlar gözlemlenmektedir.

Simülasyon sayısı 100.000 olduğunda, MSE ve SE Değerleri, Her iki yöntem arasındaki MSE ve SE farkları önemli ölçüde azalmaktadır. Önem Örneklemesi yöntemi hala daha düşük hata değerleri sunmaktadır, ancak farklar daha sınırlıdır. MSE ve SE Rasyoları, özellikle K=60 ve K=65 kullanım fiyatlarında, Önem Örneklemesi yöntemiyle elde edilen MSE değerlerinde büyük oranda azalma görülmektedir (sırasıyla 20.39 ve 66.31 rasyoları). Sonuç olarak, Simülasyon sayısı arttıkça, her iki yöntem arasındaki farklar azalmaktadır.

Bu araştırmada, aynı parametreler altında gerçekleştirilen farklı simülasyonlar çeşitli sonuçlar üretebilmektedir. Ancak, MSE ve SE değerlendirme kriterlerine göre yapılan gözlemler, Önem Örneklemesi yönteminin düşük MSE ve SE değerleriyle istikrarlı sonuçlar elde ettiğini gözlemlenmiştir. Chan ve Wong'un (2013: s. 69) çalışmasındaki simülasyon sonuçlarını değerlendirebilmek adına, simülasyon gözlem sayısını 30 defa tekrarlayarak, ortalama opsiyon fiyatları üzerinden değerleme kriterlerini hesaplamıştır. Bu çalışmayı örnek alarak, Tablo 2'de yer alan ortalma opsiyon fiyatların üzerinden, MSE ve SE değerleri hesaplanmıştır.

Tablo 2. *Avrupa Tipi Alım Opsiyonları için Farklı Kullanım Fiyatlarına ve Simülasyon Sayılarına Göre Black Scholes (BS) ve Önem Örneklemesi Fiyatların Kıyaslaması. S_0=50, r=0.04, T=1, σ =0.2*

Simülasyon Sayısı= 1.000

Kullanım Fiyatı	BS	BS			Önem Örneklemesi				
K	Teorik Fiyat	Fiyat	MSE	SE	Fiyat	MSE	SE	MSE Rasyosu	SE Rasyosu
40	11,95	12,33	0,145085	0,291500	11,91	0,001764	0,098200	82,25	2,97
45	8,03	8,06	0,000762	0,265500	7,95	0,005914	0,092600	0,13	2,87
50	4,96	4,76	0,040562	0,220700	4,99	0,000829	0,073800	48,90	2,99
55	2,83	3,13	0,088328	0,185700	2,81	0,000467	0,052100	189,32	3,56
60	1,50	1,47	0,001022	0,133700	1,45	0,002924	0,032700	0,35	4,09
65	0,75	0,74	0,000085	0,100000	0,73	0,000282	0,018000	0,30	5,56

Simülasyon Sayısı= 10.000

Kullanım Fiyatı	BS	BS			Önem Örneklemesi				
K	Teorik Fiyat	Fiyat	MSE	SE	Fiyat	MSE	SE	MSE Rasyosu	SE Rasyosu
40	11,95	11,96	0,000040	0,095400	11,96	0,000139	0,030000	0,29	3,18
45	8,03	8,05	0,000552	0,085600	7,99	0,001267	0,029300	0,44	2,92
50	4,96	4,86	0,009584	0,070200	4,95	0,000292	0,023500	32,78	2,99
55	2,83	2,71	0,014811	0,054100	2,84	0,000144	0,016400	102,85	3,30
60	1,50	1,50	0,000007	0,042400	1,50	0,000008	0,010200	0,97	4,16
65	0,75	0,77	0,000342	0,029600	0,74	0,000027	0,005800	12,66	5,10

Simülasyon Sayısı= 100.000

Kullanım Fiyatı	BS	BS			Önem Örneklemesi				
K	Teorik Fiyat	Fiyat	MSE	SE	Fiyat	MSE	SE	MSE Rasyosu	SE Rasyosu
40	11,95	11,95	0,000002	0,009530	11,95	0,000000	0,003033	5,44	3,14
45	8,03	8,03	0,000006	0,008600	8,03	0,000008	0,002900	0,68	2,97
50	4,96	4,96	0,000000	0,007200	4,96	0,000002	0,002300	0,25	3,13
55	2,83	2,83	0,000000	0,005600	2,83	0,000001	0,001600	0,00	3,50
60	1,50	1,50	0,000006	0,004200	1,50	0,000000	0,001000	20,39	4,20
65	0,75	0,74	0,000032	0,002900	0,75	0,000000	0,000600	66,31	4,83

Simülasyon sayısının artmasıyla Black Scholes modeli ve Önem Örneklemesi yöntemi arasındaki farkların azalması, büyük sayılar kanununun bir sonucu olarak değerlendirilmektedir. Bu kanun, rastgele değişkenlerin uzun dönemdeki ortalama değerlerinin, teorik beklenti değerlerine yakınsayacağını belirtmektedir (Mcleish, 2005: s. 98). Dolayısıyla, bir deney ne kadar çok tekrarlanırsa, örneklem ortalamasının teorik ortalamaya o kadar yaklaşması beklenmektedir. Bu durum, Black Scholes modeli ve Önem Örneklemesi için de geçerli olup, artan simülasyon sayısı, her iki yöntemde de hata paylarını azaltarak sonuçların daha tutarlı ve güvenilir olmasını sağlamaktadır. Yüksek simülasyon sayıları, her iki yöntemin de gerçek değere daha yakın sonuçlar vermesine neden olmakta, bu da aralarındaki farkları azaltmaktadır. Bu prensip, simülasyon sayısı arttıkça Black Scholes ve Önem Örneklemesi gibi farklı yöntemler arasındaki performans farklarının azalmasını açıklamakta ve finansal simülasyonlarda kullanılan farklı yöntemlerin, yüksek simülasyon sayıları ile daha tutarlı ve doğru sonuçlara ulaşmasını sağlayan temel bir istatistiksel prensip olarak kabul edilmektedir.

5. Sonuç ve Öneriler

Bu araştırmanın temel hedefi, finansal literatürde opsiyon fiyatlama model çerçevesinde Önem Örneklemesi yönteminin kullanımına dair ulusal düzeydeki boşluğu doldurmaktır.

Bu amaç doğrultusunda, Önem Örneklemesi ve Black Scholes opsiyon fiyatlama modelinin, hata oranlarını nasıl düşürdüğünü incelemektir. Elde edilen sonuçlar, simülasyon sayıları azalsa bile Önem Örneklemesi yönteminin Black Scholes modeline göre etkinliğini koruduğunu gözlemlenmiştir. Özellikle, başlangıç fiyatının kullanım fiyatından uzaklaştıkça Önem Örneklemesi yönteminin tahminlerinde tutarlılığını yitirmediği gözlemlenmiştir. Bu sonuç, yatırımcılar acısından opsiyonun karda olmaması durumda sonuçların değerlendirilmesinde yardımcı olabilme olasılığını göstermektedir.

Çalışmanın bulguları, simülasyon sonuçların görsellerinde de görüldüğü üzere, nadir olasılıklı olaylarda Önem Örneklemesi kullanımının, odaklanılan bölgelere dağılımların kaydırılmasıyla, yöntemin bu bölgelere daha fazla simülasyon yönlendirerek nadir olasılıklı olayların daha doğru analiz yapma olanağını sağladığını göstermektedir. Örnek olarak, kullanım fiyatı başlangıç fiyatından ne kadar uzaklaşırsa, opsiyonun karda olma ihtimali o kadar belirsizleşmektedir. Bu durumda, kullanım fiyatı daha uzak olan opsiyonların simülasyonlarını yoğunlaştırarak, incelenen bölgeyi mercek altına almaktadır. Risk yönetimi ve portföy yönetimi alanlarında, bu yöntem riskin yarattığı belirsizlikler hakkında daha fazla bilgi toplamayı sağlamaktadır. Ayrıca, opsiyonların kaldıraç etkisi göz önünde bulundurulduğunda, dayanak varlığın fiyat hareketlerinin analizi son derece önemli taşımaktadır. Yapılan analizlerin hızı ise bir diğer husustur. Hızla değişen piyasa koşullarında daha az simülasyon sayıları ile hesaplama sürelerinde azalma edebilme ve düşük hata payları hızlı karar alabilme kabiliyetini sağlamaktadır.

Elde edilen bulgular ile uluslararası literatürde opsiyon fiyatlandırma modellerinde Önem Örneklemesi Varyans Azaltma Tekniği üzerine yapılan çalışmalarda elde edilen bulgular arasında uygum olduğu gözlemlenmiştir. Örnek çalışmalar arasında, Saliby, Marins, ve Santos (2015) tarafından yapılan çalışma bulunmaktadır. Çalışmanın sonuçlarında karda olmayan Alım opsiyon fiyatların hata paylarında azalmalar gözlemlenmiştir. Benzer sonuçlar ayrıca Boire, Reesor ve Stentoft (2012) elde edilmiş. Çalışmanın diğer bir benzerliği ise bu çalışmada olduğu gibi kullanım fiyatlara uzaklaşan varlık fiyatlarında Önem Örneklemesinin daha etkili olduğu ve simülasyon sayılarında azalmalara rağmen Önem Örneklemesinin tutarlı olduğu gözlemlenmiştir. Fouque ve Han (2004) tarafından yapılan çalışmanın bulgularına benzer olarak simülasyon sayıların azalmasıyla MSE değerlerin azaldığı gözlemlenmiştir.

Black Scholes modelinin yanı sıra, Önem Örneklemesi yöntemlerinin Heston, GARCH ve Heston-Nandi gibi stokastik volatilite modellerinde ve diğer Varyans Azaltma Tekniklerinde de kullanılma potansiyeli bulunmaktadır. Farklı Varyans Azalta Tekniklerin bir arada kullanımı ise bir diğer araştırma konusudur. Ulusal literatürde, çeşitli opsiyon fiyatlama modellerinde Varyans Azaltma Tekniklerinin uygulanması konusunda bir boşluğun bulunduğu ve bu alanın daha fazla araştırmaya açık olduğu gözlemlenmiştir

Yazar Katkı Oranı (Author Contributions): Hicran YILDIZ (%50), Sibel UÇAR VATANSEVER (%50)

Yazarın Etik Sorumlulukları (Ethical Responsibilities of Authors): Bu çalışma bilimsel araştırma ve yayın etiği kurallarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Çıkar Çatışması (Conflicts of Interest): Çalışmadan kaynaklı çıkar çatışması bulunmamaktadır.

İntihal Denetimi (Plagiarism Checking): Bu çalışma intihal tarama programı kullanılarak intihal taramasından geçirilmiştir.

KAYNAKÇA

Andral, C. (2022). *An Attempt to Trace the Birth of Importance Sampling*, Centre de Recherches en Mathématiques de la Decision, Université Paris Dauphine, Paris.

Arouna, B. (2004). "Robbins-Monro Algorithms and Variance Reduction in Finance". J*ournal of Computational Finance*, 7(2): 35-62.

Black, F. ve Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.

Boire, F.-M., Reesor, M.& Stentoft, L. (2021). "Efficient Variance Reduction with Least-Squares Monte Carlo Pricing". *Journal of Risk and Financial Management*, 14(11): 504.

Boyle, P. P. (1977). "Options: A Monte Carlo Approach". *Journal of Financial Economics*, 4(3): 323-338.

Chan, N. H. & Wong, H. Y. (2013). *Risk Management: Simulations and Case Studies*. John Wiley & Sons Yayınevi.

Dupuis, P. & Wang, H. (2004). "Importance Sampling, Large Deviations, and Differential Games". *Stochastics and Stochastics Reports*, 76(6): 481–508.

Dupuis, P. & Wang, H. (2005). "Dynamic Importance Sampling for Uniformly Recurrent Markov Chains". *Annals of Applied Probability*, 15(1A): 1–38.

Dupuis, P., Spiliopoulos, K. & Wang, H. (2012). "Importance Sampling for Multiscale Diffusions". *Multiscale Modeling & Simulation*, 10(1): 1–27.

Dupuis, P., Spiliopoulos, K. & Zhou, X. (2015). "Escaping from an Attractor: Importance Sampling and Rest Points I". *Annals of Applied Probability*, 25(5): 2909-2958

Elvira, V., Martino, L., & Robert, C. P. (2022). "Rethinking the Effective Sample Size". *International Statistical Review*, 90(3): 525–550.

Fouque, J.-P., & Han, C.-H. (2004). "Variance Reduction for Monte Carlo Methods to Evaluate Option Prices under Multi-Factor Stochastic Volatility Models". *Quantitative Finance*, 597-606.

Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Stochastic Modelling and Applied Probability

Glasserman, P., Heidelberger, P. & Shahabuddin, P. (1999). "Asymptotically Optimal İmportance Sampling and Stratification for Pricing Path-Dependent Options". *Mathematical Finance*, 9(2): 117-152.

Glasserman, P. & Li, J. (2005). "Importance sampling for Portfolio Credit Risk". *Management Science*, 51(11)1: 1643-1656.

Boyle, P., Broadie, M., & Glasserman, P. (1997). "Monte Carlo Methods for Security Pricing". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8–9): 1267-1321.

Guasoni, P. & Robertson, S. (2008). "Optimal Importance Sampling with Explicit Formulas in Continuous Time". *Finance and Stochastics*, 12: 1-19.

Heston, S. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, 6(2): 327-43.

Hintz, E., Hofert, M. & Lemieux, C.(2022). "Single-Index Importance Sampling with Stratification". *Methodology and Computing in Applied Probability*, 24: 3049–3073.

Hull, J. C. (2017). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 7. Baskı, Pearson Yayınevi.

Josheski, D.& Apostolov, M. (2020). "A Review of the Binomial and Trinomial Models for Option Pricing and Their Convergence to the Black-Scholes Model Determined Option Prices". E*conometrics. Advances in Applied Data Analysis*, 24(2): 53-85

Karthika, P. & Karthikeyan, P. (2013). "Option Investment Strategy and Their Benefits- An Analysis". *International Journal of Management Focus*, 1-10.

Korkmaz, T. (1999). *Hisse Senedi Opsiyonları ve Opsiyon Fiyatlama Modelleri.* Ekin Kitabevi Yayınları.

Korkmaz, T., & Pekkaya, M. (2012). *Excel Uygulamalı Finans Matematiği* (3. baskı). Ekin Basım Yayın.

McLeish, D. L. (2005), *Monte Carlo Simulation and Finance*, 1. Baskı, Wiley Yayınevi.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1): 141-183.

Miller, S. & Childers, D. (2012). *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. Academic Press.

Moran, P. A. P. (1975). "The Estimation of Standard Errors in Monte Carlo Simulation Experiments". *Biometrika*, 62(1): 1–4.

Neddermeyer, J. C. (2011). "Non-Parametric Partial Importance Sampling for Financial Derivative Pricing". *Quantitative Finance*, 11(8): 1193-1206.

Rubinstein, R. Y. & Kroese, D. P. (2017). *Simulation and the Monte Carlo Method*, 3. Baskı, John Wiley & Sons, Inc. Yayınevi.

Saliby, E., Marins, J. & Santos, J. (2005). "*Out-of-the-Money Monte Carlo Simulation Option Pricing: The Joint Use of Importance Sampling and Descriptive Sampling*". In Proceedings - Winter Simulation Conference, ss.7.

Su, Y. & Fu, M. C. (2000). "*Simulation in Financial Engineering: Importance Sampling in Derivative Securities Pricing*". In Proceedings of the 32nd Conference, Society for Computer Simulation International, ss. 587-596.

Washburn, B., & Dik, M. (2021). "Derivation of Black-Scholes Equation Using Ito's Lemma". *Proceedings of International Mathematical Sciences*, 3(1): 38-49.

Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, 2. Baskı, John Wiley & Sons Yayınevi.

Xiao, Y. (2023). "Option Pricing Based on Black-Scholes Model, Monte Carlo Method and Binomial Tree Model". *BCP Business & Management*, 38: 3411-3416.

Yön, S.& Goldsman, D. (2006). "Variance Reduction via İmportance Sampling". İ*stanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 5(10): 35-41.

Zhao, Q., Liu, G. & Gu, G. (2013). "Variance Reduction Techniques of Importance Sampling Monte Carlo Methods for Pricing Options". *Journal of Mathematical Finance*, 3(4): 431-436.