GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 12
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2023
Sayfa/Pages: 236-243

Alınış tarihi (Received): 07.12.2023
Kabul tarihi (Accepted): 19.12.2023

İç Tekil Noktası Bulunan Bir Periyodik Sturm-Liouville Probleminin Bazı Nitel Özellikleri

Ümmügülsüm ESEN[1], Kadriye AYDEMİR[2], Oktay Sh. MUKHTAROV[3,4*]

[1] *Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Amasya, Türkiye*
[2] *Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Amasya, Türkiye*
[3] *Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan*
[4] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Tokat, Türkiye*
**Sorumlu yazar: omukhtarov@yahoo.com*

ÖZET: Bu makalede ortak uç noktası olan iki ayrık aralıkta tanımlı olan kendine eşlenik ikinci mertebeden diferansiyel denklemden (Sturm-Liouville denklemi olarak adlandırılan diferansiyel denklemden), periyodik sınır şartlarından ve verilmiş aralıkların ortak uç noktasında verilmiş iki tane ek geçiş şartlarından oluşmuş yeni tip bir sınır değer problemini inceledik. İncelediğimiz sınır değer probleminin bazı spektral özelliklerini ispat ettik. Ayrıca modifiye edilmiş (biçimi değiştirilmiş) Rayleigh oranından yararlanarak esas özdeğer için bir tahmin elde ettik. $\gamma = \delta = 1$ olduğu özel durumda, elde edilen sonuçlar uygun gelen klasik sonuçlara indirgeniyor. Bu nedenle elde edilen sonuçlar klasik sonuçları genelleştiriyor.

Anahtar Kelimeler –*Sturm-Liouville problemi, periyodik sınır şartı, geçiş şartı, Rayleigh oranı*

Some Qualitative Properties of a Periodic Sturm-Liouville Problem With an Inner Singular Point

ABSTRACT: In this paper we study a new type of boundary value problem consisting of a self-adjoint second-order differential equation (the so-called Sturm-Liouville equation) defined on two non-intersecting intervals with a common end, periodic boundary conditions and two additional transmission conditions specified at the common endpoint of the considered intervals. We proved some spectral properties of the boundary value problem under consideration. In particular, we obtained an estimate of the principal eigenvalue using a modified Rayleigh quotient. In the special case when $\gamma=\delta=1$, the obtained results are reduced to the corresponding classical results, so our results generalize the classical results.

Keywords– *Sturm-Liouville problem, periodic boundary condition, transmission condition,* Rayleigh quotient

1. Giriş

Sturm-Liouville denklemleri, skaler potansiyeller kullanılarak dalga problemlerinin formüle edilmesi ve vektör alanlarının ve potansiyellerin skaler bileşenlerinin kullanılması da dahil olmak üzere, elektromanyetik ile ilgili birçok uygulamalarda ortaya çıkar. Bazı özel ve klasik polinomlar ile yakından ilgili olan Laplace ve Helmholtz denklemlerine değişkenlerine ayırma yöntemi uygulandıktan sonra Sturm-Liouville denklemleri ortaya çıkmaktadır. Sturm-Liouville sınır değeri problemlerinin diğer örnekleri Hermite denklemleri, Airy denklemleri, Legendre denklemleri vb.'dir. Ayrıca sicimlerin titreşimi, atomik parçacıkların etkileşimi, elektrodinamik, aerodinamik, Dünyanın serbest salınımları gibi birçok fiziksel sürecin matematiksel modeli kurulurken Sturm-Liouville özdeğer problemleri elde edilir (Edmonds, 1973; Gesztesy ve ark, 1973; Kong ve ark, 1973; Sherstyuk, 1988; ve burada belirtilen referanslara bakınız). Uygulamalı matematik ve fiziğin farklı alanlarında, iç tekil noktalardaki iletim koşullarını da içeren sınır değer problemleri ortaya çıkar. Bu tür problemlere sınır değer iletim problemleri (SDİP) denir. Örneğin, elektrostatik ve manyetostatikte sonsuz iletken bir tabaka boyunca ısı transferini tanımlayan model problemi bir iletim problemidir (Huy ve Sánchez-Palencia; 1974)**.** Tamamen farklı bir başka alan da, bir rezervuardan petrol üreten bir kuyuya petrol akışını arttırmak için kullanılan 'hidrolik kırılma'dır (Cannon ve Meyer; 1971). İletim koşullarıyla ilgili bazı problemler, ince tabakalı bir plakanın termal iletim problemlerinde ortaya çıkar (Titeux veYakubov; 1997). Son yıllarda iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemleri için sınır değer problemlerinin bazı nitel özellikleri yoğun şekilde çalışılmasına rağmen (Allahverdiev ve Tuna, 2019; Ao ve Sun, 2014; Aydemir ve ark., 2018; Mukhtarov ve Yücel 2020; Mukhtarov ve ark. 2020; Şen, 2021; Wang ve ark. 2009; Uğurlu, 2020; Yücel ve Muhtarov 2023; Yücel ve ark. 2023) uç noktalarda periyodik sınır koşullarına sahip olan ve iç noktasında süreksizlik şartları içeren diferansiyel denklemler için spektral problemlerin bazı özellikleri literatürde ilk defa Mukhtarov ve Aydemir (2021) tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Özdeğerlerin ve özfonksiyonların spektral teorideki rolü oldukça önemlidir, çünkü bu nicelikler hem matematik hem de matematik fizik problemlerinde birçok uygulamada sıkça ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada, iki aralıklı

$$\Xi u := -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), x \in [-1,0) \cup (0,1] \qquad (1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminden x=0 iç tekil noktada verilen

$$\Xi_1 u := u(-0) - \gamma u(+0) = 0 \qquad (1.2)$$

$$\Xi_2 u := u'(-0) - \delta u'(+0) = 0 \qquad (1.3)$$

geçiş şartlarından ve de uç noktalarda verilen

$$\Xi_3 u := u(-1) - u(1) = 0 \qquad (1.4)$$

$$\Xi_4 u := u'(-1) - u'(1) = 0 \qquad (1.5)$$

periyodik sınır şartlarından oluşan bir sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların bazı niteliksel özelliklerini inceleyeceğiz. Burada q(x) potansiyeli reel değerlidir, [-1, 0) ve (0, 1] aralıklarının herbirinde sürekli fonksiyondur ve sonlu $q(\mp 0)$ limitleri mevcuttur, γ ve δ sıfırdan farklı reel sayılardır; λ kompleks öz değer parametredir.

Bu çalışmanın amacı, Sturm-Liouville problemi (1.1)-(1.5) için özfonksiyon açılımı, Parseval eşitliği ve Rayleigh-Ritz formülü (minimizasyon prensibi) gibi önemli spektral özellikleri incelemektir. Rayleigh oranı kuantum mekaniğinin yanı sıra katı hal fiziğinde kullanılan önemli bir yaklaşım yönteminin temelidir. Ayrıca çözülemeyen kuantum sistemlerinin enerji özdeğerlerinin tahmininde kullanılır. Çoğu zaman fiziksel problemlerde λ özdeğerinin işareti oldukça önemlidir. Örneğin, $\frac{df}{dt}+\lambda f=0$ denklemi bazı ısı akışı problemlerinde ortaya çıkar. Burada pozitif λ zaman içindeki üstel azalmaya, negatif λ ise üstel büyümeye karşılık gelir. $\frac{d^2f}{dt^2}+\lambda f = 0$ titreşim problemlerinde yalnızca pozitif λ 'olağan' beklenen salınımlara karşılık gelir. Özfonksiyonlar bilinmediği için Rayleigh oranı özdeğeri açıkça belirlemek için kullanılamaz. Ancak diferansiyel denklemi çözmeden Rayleigh oranından ilginç ve anlamlı sonuçlar elde edilebilir. Özellikle özdeğerlerin tahmininde oldukça faydalı olabilir.

2. Temel çözümler ve iletim-karakteristik fonksiyonu

(Aydemir ve Mukhtarov ; 2016) yöntemini takip ederek (1.1) denkleminin sırasıyla

$$u(-1) = 1,\ u'(-1) = 0, \qquad (2.1)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\phi_1(x,\lambda)$,

$$u(+0) = \frac{1}{\gamma}\phi_1(-0,\lambda)\ ,\ u'(+0) = \frac{\partial\phi_1(-0,\lambda)}{\partial x} \qquad (2.2)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\phi_2(x,\lambda)$,

$$u(1) = 0, u'(1) = 1 \qquad (2.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_2(x,\lambda)$ ve

$$u(-0) = \gamma\chi_2(+0,\lambda),\ u'(0) = \frac{\partial\chi_2(+0,\lambda)}{\partial x} \qquad (2.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_1(\mathrm{x},\lambda)$ ile tanımlayalım. Sonuç olarak

$$\phi(x,\lambda) = \begin{cases}\phi_1(x,\lambda), & x \in [-1,0)\\ \phi_2(x,\lambda)\ , & x \in (0,1]\end{cases}$$

ve

$$\chi(x,\lambda) = \begin{cases}\chi_1(x,\lambda), & x \in [-1,0)\\ \chi_2(x,\lambda), & x \in (0,1]\end{cases}$$

fonksiyonlarının her biri (1.1) denklemini ve (1.2)- (1.3) geçiş şartlarının her ikisinide sağlar. (Mukhtarov ve Aydemir; 2015) deki yöntemin aynısını uygulayarak, $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ çözümlerinin, her sabit $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için kompleks λ parametresinin tam fonksiyonları olduğunu ispatlayabiliriz. Adi diferansiyel denklemler teorisinden, sırasıyla $w_1(\lambda) = W\big(\phi_1(x,\lambda),\chi_1(x,\lambda)\big)$ ve $w_2(\lambda) = W\big(\phi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda)\big)$ Wronskian'larının her birinin $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında x noktasından bağımsız olduğu bilinmektedir. (2.2) ve (2.4) başlangıç şartlarını kullanarak

$$\begin{aligned} w_1(\lambda) &= \phi_1(-0,\lambda)\frac{\partial\chi_1(-0,\lambda)}{\partial x} - \chi_1(-0,\lambda)\frac{\partial\phi_1(-0,\lambda)}{\partial x}\\ &= \gamma\Big(\phi_2(+0,\lambda)\ \frac{\partial\chi_2(c+0,\lambda)}{\partial x} - \chi_2(+0,\lambda)\frac{\partial\phi_2(+0,\lambda)}{\partial x}\Big)\\ &= \gamma w_2(\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$w(\lambda) \coloneqq w_1(\lambda) = \gamma w_2(\lambda)$$

tanımlayalım.

Teorem 2. 1. Bir λ kompleks sayısının (1.1) - (1.5) iletim-periyodik probleminin özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta(\lambda) \coloneqq \big(1 - \chi_1'(-1,\lambda)\big)(\phi_2(1,\lambda) - 1) + \phi_2'(1,\lambda)\chi_1(-1,\lambda) = 0 \qquad (2.5)$$

İspat. $y_0(x,\lambda_0)$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun. Buradan, $\phi_i(x,\lambda_0)$ ve $\chi_i(x,\lambda_0)$ çözümlerinin Ω_i (Ω_1 = [-1, 0), Ω_2 = (0, 1]) aralıkları üzerinde (1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğu görülür. Böylece $y_0(x,\lambda_0)$ özfonksiyonu

$$y_0(x,\lambda_0) = \begin{cases} \hbar_1\phi_1(x,\lambda_0) + \kappa_1\chi_1(x,\lambda_0), & x \in [-1,0) \\ \hbar_2\phi_2(x,\lambda_0) + \kappa_2\chi_2(x,\lambda_0), & x \in (0,1] \end{cases} \tag{2.6}$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada $\hbar_1, \hbar_2, \kappa_1, \kappa_2$ katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Şimdi (1.2)-(1.3) sınır ve iletim koşullarını uygulayarak

$$\Xi_i y_0(x,\lambda_0) = 0, \mathrm{i} = 1,2,3,4 \tag{2.7}$$

elde ederiz. Bu eşitlikler, $\hbar_1$, $\hbar_2$, κ_1, κ_2 değişkenlerine göre determinantı

$$\Delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} 1-\phi_2(1,\lambda_0) & \chi_1(-1,\lambda_0) \\ -\phi_2'(1,\lambda_0) & \chi_1'(-1,\lambda_0)-1 \end{vmatrix}$$

olan homojen lineer bir cebirsel denklem sistemi oluşturur.
Buradan

$$\Delta(\lambda_0) = (1-\chi_1'(-1,\lambda_0))(\phi_2(1,\lambda_0)-1) + \phi_2'(1,\lambda_0)\,\chi_1(-1,\lambda_0)$$

elde edilir. (2.7) cebirsel lineer denklemler sistemi sıfırdan farklı çözüme sahip olduğu için $\Delta(\lambda_0)$=0. Şimdi, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun herhangi bir sıfırı $\lambda = \lambda_0$ değerinin ele alınan (1.1) - (1.5) probleminin özdeğeri olduğunu gösterelim. Gerçekten de, eğer $\Delta(\lambda_0)$=0 ise, o zaman (2.7) sisteminin sıfır olmayan bir $\hbar_1$, $\hbar_2$, κ_1, κ_2. çözümü vardır. Dolayısıyla (2.6) ile tanımlanan sıfır olmayan $\hbar_1$, $\hbar_2$, κ_1, κ_2 fonksiyonları (1.1) denklemini ve (1.1)-(1.5) sınır ve iletim koşullarını sağlar. Bu ise λ_0 değerinin bir özdeğer olduğu anlamına gelir.

3. Özfonksiyonlar Sistemine Açılım ve Rayleigh Oranı İle Özdeğer Tahmini

Bu bölümde (1.4)-(1.8) periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin özfonksiyonlar sisteminin bazı nitel özelliklerini araştıracağız.

Tanım 3.1. $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarının her birinde karesi integrallenebilir f ve g reel fonksiyonları için

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{-0} f(x)\,g(x)dx + \int_{+0}^{1} f(x)\,g(x)dx$$

eşitliği ile tanımlı $\langle f,g\rangle$ sayısına bu fonksiyonların iç-çarpımı denir.

Teorem 3.2. Kabul edelim ki $f: [-1,0) \cup (0,1] \to R$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. f fonksiyonu $\forall x \in [-1,0) \cup (0,1]$ noktasında 2. mertebeden sürekli diferensiyellenebilir, yani $f(x) \in C^2[-1,0) \oplus C^2[-1,0)$
2. Sonlu $f^{(k)}(\mp 0)$, k=0,1,2 limit değerleri mevcuttur.
3. f fonksiyonu (1.7)-(1.8) periyodik sınır şartlarını ve (1.5)-(1.6) geçiş şartlarını sağlıyor.

O halde f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n(x) \qquad (3.1)$$

serisine açılabilir; burada $u_n(x)$, n=1,2,… (1.4)-(1.8) periyodik iki aralıklı Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin tam ortogonal özfonksiyonlar sistemidir, (3.1)serisi ise mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Bu teoremin ispatı Mukhtarov ve Aydemir (2015) kaynağındaki Teorem 5.2. nin ispatına tamamen benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.3. (1.4)-(1.8) periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerlerini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ile bu özdeğerlere sırası ile uygun olan özfonksiyonları ise $u_1(x), u_2(x), \ldots$ ile gösterelim. O halde her n=1,2,… için

$$\lambda_n = \frac{\int_{-1}^{-0}\left(\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 + q(x)u_n^2\right)dx + \int_{+0}^{1}\left(\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 + q(x)u_n^2\right)dx}{\int_{-1}^{-0} u_n^2(x)dx + \int_{+0}^{1} u_n^2(x)dx}$$

$$+ \frac{1-\delta\gamma}{\delta\gamma} \frac{u_n(-0)u_n'(-0)}{\int_{-1}^{-0} u_n^2(x)dx + \int_{+0}^{1} u_n^2(x)dx} \qquad (3.2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. λ_n sayısı (1.4)-(1.8) periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin özdeğeri $u_n(x)$ ise bu özdeğere uygun özfonksiyon olduğu için

$$-u_n''(x) + q(x)u_n(x) = \lambda_n u_n(x), \qquad x \in [-1,0) \cup (0,1] \qquad (3.3)$$

özdeşliği sağlanır. Bu özdeşliğin her iki tarafını $u_n(x)$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitliğin $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında integralini alırsak ve de sınır-geçiş şartlarından da yararlanırsak (3.2) eşitliğini elde ederiz.

Not. (3.2) eşitliğinin sağ tarafına (1.4)-(1.8) periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş problemine uygun olan Rayleigh oranı diyeceğiz.

Tanım 3.4. $D(R) := \{f : [-1,0) \cup (0,1] \to R \mid$ f fonksiyonu $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarının her birinde süreklidir ve sonlu $f(0\mp)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(\mp|\varepsilon|)$ limitleri mevcuttur, bu aralıkların her birinde ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir ve sonlu $f'(0\mp)$, $f''(0\mp)$ türevleri mevcuttur; $f(-1)=f(1)$, $f'(-1)=f'(1)$, $f(-0)=\gamma f(+0)$, $f'(-0)=\delta f'(+0)$

şartları sağlanır, f fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit değildir} kümesinde

$$R(f)=\frac{\int_{-1}^{-0}(f'^2+q(x)f^2)dx+\int_{+0}^{1}(f'^2+q(x)f^2)dx}{\int_{-1}^{-0}f^2dx+\int_{+0}^{1}f^2\,dx}$$

$$+\ \frac{1-\delta\gamma}{\delta\gamma}\ \frac{f(-0)f'(-0)}{\int_{-1}^{-0}f^2dx+\int_{+0}^{1}f^2\,dx} \tag{3.4}$$

eşitliği ile tanımlı fonksiyonele (1.4)-(1.8) periyodik iki aralıklı Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin Rayleigh fonksiyoneli diyeceğiz.

Teorem 3.5. Kabul edelim ki $\delta\gamma=1$ eşitliği sağlansın. O halde (1.4)-(1.8) periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin ilk özdeğeri için

$$\lambda_1=\min\left\{\frac{1}{\langle f,f\rangle}\left(\int_{-1}^{-0}(f'^2+q(x)f^2)dx+\int_{+0}^{1}(f'^2+q(x)f^2)dx\right)\middle| f\in D(R)\right\} \tag{3.5}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca (3.4) eşitliğinin sağ tarafı en küçük değerini $f=u_1$ noktasında alır, yani $\lambda_1=R(u_1)$ eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 3.2 gereği her $f\in D(R)$ fonksiyonu (1.4)-(1.8) periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin özfonksiyonlar sistemine açılabilir. Bu nedenle her $f\in D(R)$ fonksiyonu için (3.1) formülü geçerlidir. Art arda iki defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{-1}^{-0}(-f''+q\,f)u_n dx+\int_{+0}^{1}(-f''+q\,f)u_n dx$$

$$=\int_{-1}^{-0}(-u_n''+q\,u_n f)f dx+\int_{+0}^{1}(-u_n''+q\,u_n)\,f\,dx$$

$$+W(f,u_n)\,|_{-1}^{1}-W(f,u_n)\,|_{-0}^{+0} \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (1.5)-(1.8) sınır geçiş şartlarını uygularsak

$$W(f,u_n)\,|_{-1}^{1}=0$$

ve

$$W(f,u_n)\,|_{-0}^{+0}=0$$

elde edilir. Ayrıca

$$-u_n''+qu_n=\lambda_n u_n \tag{3.7}$$

eşitliğinin sağlandığını dikkate alırsak ve iki kere kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{-1}^{-0}(-f''+q\,f)u_n dx+\int_{+0}^{1}(-f''+q\,f)u_n dx=\lambda_n\left(\int_{-1}^{-0} f\,u_n dx+\int_{+0}^{1} f\,u_n dx\right) \quad (3.8)$$

eşitliğini buluruz. Sonuncu eşitlikten ve

$$c_n:=\frac{\langle f,\,u_n\rangle}{\langle u_n,\,u_n\rangle}$$

Fourier katsayılarından yararlanarak

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-0}(-f''+q\,f)f dx+\int_{+0}^{1}(-f''+q\,f)f dx &= \langle -f''+q\,f\,,\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n\ \rangle\\ &=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle -f''+q\,f\,,u_n\ \rangle\\ &=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2\langle u_n\,,u_n\ \rangle\\ &\geq \lambda_1\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\langle u_n\,,u_n\ \rangle \qquad (3.9)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan, iki defa kısmi integrasyon uyguladıktan sonra sınır ve geçiş şartlarından da yararlanarak

$$\int_{-1}^{-0}(-f''+q\,f)f\,dx+\int_{+0}^{1}(-f''+q\,f)\,f\,dx$$

$$=\int_{-1}^{-0}(f'^2+q\,f^2)\,dx+\int_{+0}^{1}(f'^2+q\,f^2)\,dx$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği (3.9) da yerine yazarsak

$$\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\langle u_n\,,u_n\ \rangle \leq \int_{-1}^{-0}(f'^2+q\,f^2)\,dx+\int_{+0}^{1}(f'^2+q\,f^2)\,dx \quad (3\,.10)$$

eşitsizliği bulunur. Eğer (3.1) formülünün her iki tarafını $u_n(x)$ ile çarptıktan sonra $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında integrallersek

$$\int_{-1}^{-0} f^2\,dx+\int_{+0}^{1} f^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\,\langle u_n\,,u_n\ \rangle \quad (3.11)$$

Parseval eşitliğini buluruz. Ayrıca (3.10) ve (3.11) den

$$\lambda_1\leq\ \frac{\int_{-1}^{-0}(f'^2+q\,f^2)\,dx+\int_{+0}^{1}(f'^2+q\,f^2)\,dx}{\int_{-1}^{-0} f^2\,dx+\ \int_{+0}^{1} f^2\,dx} \quad (3.12)$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan, (3.12) ün sağ tarafında f(x) yerine $u_1(x)$ yazarsak sağ taraf λ_1 sayısına eşit olacağı için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 1. Eğer $\delta\gamma=1$ ise ve $\forall\ x\in[-1,0)\cup(0,1]$ için $q(x)\geq 0$ ise o halde (1.1)-(1.5) probleminin negatif özdeğeri mevcut değildir.

Sonuç 1. Eğer $\delta\gamma=1$ ise ve $\forall\ x\in[-1,0)\cup(0,1]$ için $q(x)>0$ ise o halde (1.1)-(1.5) probleminin tüm özdeğerleri pozitiftir.

3. Kaynaklar

Allahverdiev, B. P., Tuna, H., 2019. Eigenfunction Expansion for Singular Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, Electronic Journal of Differential Equations, 2019(03), 1-10.

Ao, J., Sun, J., 2014. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with coupled eigenparameter-dependent boundary conditions, Applied Mathematics and Computation 244 (2014) 142-148

Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2016. Qualitative analysis of eigenvalues and eigenfunctions of one boundary value-transmission problem, Boundary Value Problems, 1-16.

Aydemir, K., Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., Muhtarov, F., 2018. Differential Operator Equations with Interface Conditions in Modified Direct Sum Spaces, Filomat 32(3), 921-931.

Cannon, J. R., Meyer, G.H., 1971. On a Diffusion in a Fractured Medium, SIAM J. Appl. Math., 3 (1971), pp. 434-448.

Edmonds, A. R. 1973. Studies of the quadratic Zeeman effect. I. Application of the sturmian functions. Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics, 6(8), 1603.

Gesztesy, F., Macdeo, C., Streit, L. 1985. An exactly solvable periodic Schrodinger operator. Journal of Physics A: Mathematical and General, 18(9), L503.

Huy, H. P., Sánchez-Palencia, E. 1974. Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivitéélevée. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47(2), 284-309.

Kong, Q., Wu, H., Zettl, A. Geometric aspects of Sturm-Liouville problems. Preprint.

Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K., 2015. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. Acta Mathematica Scientia, 35(3), 639-649.3.

Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K., 2021. Two-linked periodic Sturm-Liouville problems with transmission conditions, Mathematical Methods In The Applied Sciences 44 (18),14664-14676.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., 2020. A study of the eigenfunctions of the singular Sturm–Liouville problem using the analytical method and the decomposition technique. Mathematics, 8(3), 415.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., Aydemir, K., 2020. Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. Complexity, 2020, 1-8.

Sherstyuk, A. I. 1988. Problems of Theoretical Physics. Leningrad. Gos. Univ., Leningrad.

Şen, E., 2021. Spectrum, Trace and Nodal Points of a Sturm-Liouville Type Delayed Differential Operator with Interface Conditions Rocky Mountain Journal of Mathematics (2021) 51 (1), 283-294.

Titeux, I., Yakubov, Y. 1997. Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 7(07), 1035-1050.

Ugurlu, E., 2020. On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem,Quaestiones Mathematicae 43.4 (2020): 507-521.

Yücel, M., Muhtarov, F., 2023. Parameterized Differential Transform Method and Its Application to Boundary Value Transmission Problems. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 28(2), 431-442.

Yücel, M., Mukhtarov, O. S., Aydemir, K., 2023. Computation of eigenfunctions of nonlinear boundary-value- transmission problems by developing some approximate techniques. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 41, 1-12.

Wang, A., Sun, J., Hao, X., Yao, S. 2009. Completeness of eigenfunctions of Sturm-Liouville problems with transmission conditions.