Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 5(1) 57-73 2024
Recep Tayyip Erdogan University Journal of Science and Engineering, 5(1) 57-73 2024
ISSN: 2687-2315 / E-ISSN: 2757-7686

Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar (Konormlar) için Yeni Bir İnşa Metodu

Ümit ERTUĞRUL [1*], Eda Nur AYVAZ[1]
[1] Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Türkiye

[*]Sorumlu Yazar/Corresponding Author
E-mail: uertugrul@ktu.edu.tr

Araştırma Makalesi/Research Article
Geliş Tarihi/Received:29.01.2024
Kabul Tarihi/Accepted: 28.03.2024

ÖZ

Bu çalışmada, $L\ /\ \{0\}'$ın en küçük elemana sahip olması kısıtıyla, L'nin $[a,b]$ alt aralığı üzerindeki bir t-normdan, L sınırlı kafesi üzerinde üçgensel normlar (konormlar) inşa etmek için yeni bir metot vermeyi ve literatürdeki inşa metotları ile ilişkisini ortaya koymayı amaçlıyoruz. Ayrıca, yeni inşa metodunun, uygun bir sınırlı kafes üzerinde üçgensel normlar (konormlar) için modifiye bir ordinal toplamına tümevarım yoluyla genelleştirilebileceğini gösteriyoruz.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı kafes, İnşa metodu, Alt aralık, T-norm

A New Construction Method for Triangular Norms (Conorms) on Bounded Lattices

ABSTRACT

In this paper, we aim to give a new method to construct triangular norms (conorms) on bounded lattice L from a t-norm on a subinterval $[a,b]$ of L with a constraint that $L\ /\ \{0\}$ has a smallest element and reveal the relation with the construction methods in the literatüre. Also, we show that new construction method can be generalized by induction to a modified ordinal sum for triangular norms (conorms) on an appropriate bounded lattice.

Keywords: Bounded lattice, Construction method, Subinterval, T-norm

Cite as;
Ertuğrul, Ü ve Ayvaz, E.N (2024). Sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normlar (konormlar) için yeni bir inşa metodu. *Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5(1), 57-73. Doi: 10.53501/rteufemud.1428002

1. Giriş

Üçgensel normların tarihi ″Statistical Metrics″ adlı çalışma ile başlamıştır (Menger, 1942). Daha sonra üçgensel normlar Schweizer ve Sklar (1960) tarafından olasılıksal metrik uzaylar çerçevesinde özel birleşmeli fonksiyonların bir çeşidi olarak tanıtılmıştır. Üçgensel normlar (kısaca t-normlar) klasik üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesi sırasında daha genel bir yapı olarak ortaya çıkmıştır. İlk olarak Klement vd. (2000) tarafından $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde tanımlanmıştır.

Üçgensel normlar çok değerli mantıkta (Hájek, 1998; Klement vd., 2000; Gottwald, 2001), fuzzy mantıkta (Zadeh, 1965; Nguyen ve Walker, 1997), karar verme teorisinde (Fodor ve Roubens, 1994; Grabisch vb., 1995), istatistik bilimlerinde (Nelsen, 1999), ölçü teorilerinde (Sugeno, 1974; Weber, 1984; Klement ve Weber, 1991; Pap, 1995) ve oyun teorisinde (Butnariu ve Klement, 1993) uygulamalara sahiptirler.

T-normlar $[0,1]$ birim aralık üzerinde tanımlanmış olmasına rağmen son zamanlarda yaygın olarak sınırlı kafesler üzerinde çalışılmıştır. Böylece sınırlı kafesler üzerinde t-normların inşası üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Saminger, 2006; Ertuğrul vd., 2015; Çaylı, 2018, 2019; Ertuğrul vd., 2019; Ertuğrul ve Yeşilyurt, 2019; Karaçal vd., 2019, 2020; Dan vd., 2020; Dvořák ve Holčapek, 2020; El Zekey, 2020; Karaçal ve Şanlı, 2022). Bu çalışmada keyfi bir L sınırlı kafesinin $[a,b]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel normdan (üçgensel konormdan), $L\setminus\{0\}'$ın en küçük elemanı olması durumunda ($L\setminus\{1\}'$in en büyük elemanı olması durumunda), L'de bir üçgensel norm (üçgensel konorm) üretmek için yeni inşa yöntemi sunulmuştur. Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak bazı tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak literatürde mevcut yöntemler kısaca verilmiştir. Ardından, t-normlar için yeni bir inşa metodu tanımlanmıştır. Bu metot $L\setminus\{0\}'$ın en küçük elemanının ve L'nin $[a,b]$ alt aralığı üzerinde bir t-normun varlığından yararlanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, kısıtlamanın önemi örnekle vurgulanmıştır. Dahası, tanıtılan inşa metodunun literatürde var olan inşa metotlarından farklı olduğu örnekler ile gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, t-konormlar için yeni bir inşa metodu verilmiştir. Bu metot $L\setminus\{1\}'$in en büyük elemanının ve L'nin $[a,b]$ alt aralığı üzerinde bir t-konormun varlığından yararlanılarak elde edilmiştir. Beşinci bölümde, tanıtılan inşa metotlarının modifiye ordinal toplam inşaları gösterilmiştir.

2. Ön Bilgiler

2.1. Tanım (Birkhoff, 1967; Wang vd., 2020)
K bir sınırlı kafes ve a ve b K'nın elemanları olmak üzere a ve b kıyaslanamaz olduğunda $a \parallel b$ şeklinde gösterilirken a ve b'nin kıyaslanabilir olması durumunda ise $a \nparallel b$ şeklinde gösterilir. Böylece $\mathbb{I}_a=\{x\in K \mid x\parallel a\}$ ile tanımlanan $\mathbb{I}_a$ kümesi a elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesidir. Benzer şekilde, $\mathbb{I}_a^b=\{x\in K \mid x\parallel a \text{ ve } x\nparallel b\}$, $\mathbb{I}_b^a=\{x\in K \mid x\parallel a \text{ ve } x\nparallel b\}$ ve $\mathbb{I}_{a,b}=\{x\in K \mid x\parallel a \text{ ve } x\parallel b\}$ kümeleri de tanımlanabilir.

2.2. Tanım (Klement vd., 2000)
Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir ikili işlem olan $T: L^2\to L$ fonksiyonu komütatiflik, asosyatiflik, monotonluk özelliklerini ve 1 -birim eleman özelliğini sağlıyorsa, T'ye L üzerinde bir üçgensel norm (t-norm) denir.

T_1 ve T_2, L sınırlı kafesi üzerinde iki üçgensel norm olmak üzere tüm $(a,b)\in L\times L$ için $T_1(a,b)\le T_2(a,b)$ olduğunda ″T_1, T_2'den daha zayıf veya T_2, T_1' den daha güçlü″ olarak adlandırılır ve $T_1\le T_2$ şeklinde ifade edilir. Bu bağlamda, sınırlı bir L kafesi üzerinde en küçük ve en büyük t-norm sırasıyla şu şekilde verilir:

$$T_W(a,b)=\begin{cases} a, & b=1,\\ b, & a=1,\\ 0, & aksi\ takdirde\end{cases} \quad \text{ve} \quad T_\wedge(a,b)=a\wedge b.$$

3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların İnşa Metodu

Bu bölümde, Teorem 3.1 1 $'$de sınırlı bir L kafesinin $[a,b]$ alt aralığı üzerinde keyfi verilen bir üçgensel normdan, $L\setminus\{0\}'$ ın en küçük elemana sahip olması varsayımı altında L üzerinde bir üçgensel norm inşa etmek için yeni inşa metodu tanımlanacaktır. Daha sonra Teorem 3.1 1$'$in bir uygulaması verilecektir. Ayrıca, Teorem 3.1 1 $'$ in kısıtlamasının ihmal edilemeyeceği de örnekle vurgulanacaktır. Teorem 3.1 1 $'$ in literatürde mevcut inşa metotlarından farklı olduğu örneklerle gösterilecektir. Ardından, literatürdeki inşa metotları ve Teorem 3.11$'$in hangi ilave şartlar altında çakıştığı araştırılacaktır.

Şimdi, sınırlı kafesler üzerindeki üçgensel normlar için inşa metotlarını hatırlayalım (Saminger-Platz, 2006; Ertuğrul vd., 2015; Çaylı, 2018, 2019; Ertuğrul vd., 2019; Karaçal vd., 2019; Ertuğrul ve Yeşilyurt, 2019; Dan vd., 2020). İlk olarak, Saminger (2006), Ertuğrul vd. (2015) ve Çaylı (2018, 2019) tarafından önerilen inşa metotları listelenecektir.

Teorem 3.1 (Saminger-Platz, 2006): L bir sınırlı kafes ve $[a,b]\subseteq L$ olsun. W $[a,b]$ alt aralığında bir üçgensel norm iken aşağıdaki şekilde tanımlı $T_1=(<a,b,W>)\colon L^2\to L$ ordinal toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_1(x,y)=\begin{cases}W(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,b]^2\\ x\wedge y & , \quad aksi\ takdirde.\end{cases} \tag{1}$$

Bununla birlikte, yukarıda tanımlanan T_1 fonksiyonu genel olarak L üzerinde bir t-norm olması gerekmez.

Teorem 3.2 (Ertuğrul vd., 2015): L bir sınırlı kafes, a L'nin 0 ve $1'$den farklı bir elemanı olmak üzere W' de $[a,1]$ alt aralığında bir üçgensel norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki şekilde tanımlı $T_2\colon L^2\to L$ fonksiyonu L'de bir üçgensel normdur:

$$T_2(x,y)=\begin{cases}x\wedge y & , \quad x=1\ veya\ y=1\\ W(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,1)^2\\ x\wedge y\wedge a & , \quad aksi\ takdirde.\end{cases} \tag{2}$$

Teorem 3.3 (Çaylı, 2018): L bir sınırlı kafes, a L'nin 0 ve $1'$den farklı bir elemanı olmak üzere W' de $[a,1]$ alt aralığında bir üçgensel norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki şekilde tanımlı $T_3\colon L^2\to L$ L'de bir üçgensel normdur:

$$T_3(x,y)=\begin{cases}W(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,1)^2\\ x\wedge y & , \quad 1\in\{x,y\}\\ 0 & , \quad aksi\ takdirde.\end{cases} \tag{3}$$

Teorem 3.4 (Çaylı, 2019): L bir sınırlı kafes, a L'nin 0 ve $1'$den farklı bir elemanı olmak üzere W, $[a,1]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_4\colon L^2\to L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_4(x,y)=\begin{cases}W(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,1)^2\\ 0 & , \quad (x,y)\in[0,a)^2\cup[0,a)\times I_a\\ & \quad\ \cup I_a\times[0,a)\cup I_a\times I_a\\ x\wedge y & , \quad 1\in\{x,y\}\\ x\wedge y\wedge a & , \quad aksi\ takdirde.\end{cases} \tag{4}$$

Aşağıdaki Teorem 3.5, 3.6 ve 3.7$'$de Ertuğrul vd. (2019) tarafından sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normlar için elde edilen üç inşa metodu verilecektir.

Teorem 3.5 (Ertuğrul vd., 2019): L bir sınırlı kafes ve W, $[a,b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_5\colon L^2\to L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_5(x,y)=\begin{cases} W(x\wedge b, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in[a,b)^2\cup[a,b)\times\mathbb{I}_b^a \\ & , \quad \cup\,\mathbb{I}_b^a\times[a,b)\cup\mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y\wedge a & , \quad (x,y)\in[0,a)\times L\backslash\{1\} \\ & \quad \cup\, L\backslash\{1\}\times[0,a) \\ & \quad \cup\,[a,b)\times\mathbb{I}_a^b\cup\mathbb{I}_a^b\times[a,b) \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_a^b\times\mathbb{I}_a^b\cup\mathbb{I}_a^b\times\mathbb{I}_b^a\cup\mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_a^b \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_a^b\times[b,1)\cup[b,1)\times\mathbb{I}_a^b \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_{a,b}\times L\backslash\{1\}\cup L\backslash\{1\}\times\mathbb{I}_{a,b} \\ x\wedge y\wedge b & , \quad (x,y)\in[b,1)^2\cup[a,b)\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[b,1)\times[a,b)\cup\mathbb{I}_b^a\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[b,1)\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y & , \quad 1\in\{x,y\}. \end{cases} \tag{5}$$

Teorem 3.6 (Ertuğrul vd., 2019): L bir sınırlı kafes ve $W, [a,b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_6 : L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_6(x,y)=\begin{cases} W(x\wedge b, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in[a,b)^2\cup[a,b)\times\mathbb{I}_b^a \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_b^a\times[a,b)\cup\mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y\wedge b & , \quad (x,y)\in\mathbb{I}_b^a\times[b,1)\cup[b,1)\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[b,1)^2\cup[a,b)\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[b,1)\times[a,b), 1\in\{x,y\} \\ 0 & , \quad aksi\ takdirde. \end{cases} \tag{6}$$

Teorem 3.7 (Ertuğrul vd., 2019): L bir sınırlı kafes ve $W, [a,b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_7 : L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_7(x,y)=\begin{cases} W(x\wedge b, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in[a,b)^2\cup[a,b)\times\mathbb{I}_b^a \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_b^a\times[a,b)\cup\mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y\wedge b & , \quad (x,y)\in\mathbb{I}_b^a\times[b,1)\cup[b,1)\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[a,b)\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[b,1)\times[a,b), 1\in\{x,y\} \\ b & , \quad (x,y)\in[b,1)^2 \\ 0 & , \quad aksi\ takdirde. \end{cases} \tag{7}$$

Şimdi, sırasıyla Karaçal vd. (2019), Ertuğrul ve Yeşilyurt (2019) ve Dan vd. (2020) tarafından önerilen inşa metotlarını hatırlayalım.

Teorem 3.8 (Karaçal vd., 2019): L bir sınırlı kafes ve $W, [a,b]$ üzerinde bir üçgensel norm olsun. $T_8 : L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel normdur:

$$T_8(x,y)=\begin{cases} W(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,b)^2 \\ W(x\wedge b, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in[a,b)\times \mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_b^a\times[a,b) \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y\wedge a & , \quad (x,y)\in[0,a)\times L\backslash\{1\} \\ & \quad \cup\, L\backslash\{1\}\times[0,a) \\ & \quad \cup\, [a,b)\times\mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b\times[a,b) \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_a^b\times\mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b\times\mathbb{I}_b^a \cup \mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_a^b \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_a^b\times[b,1)\cup[b,1)\times\mathbb{I}_a^b \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_{a,b}\times L\backslash\{1\} \\ & \quad \cup\, L\backslash\{1\}\times\mathbb{I}_{a,b} \\ x\wedge y\wedge b & , \quad (x,y)\in\mathbb{I}_b^a\times[b,1) \\ & \quad \cup\, [b,1)\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[b,1)^2 \\ & \quad \cup\, [a,b)\times[b,1)\cup[b,1)\times[a,b), \\ & \quad 1\in\{x,y\} \end{cases} \tag{8}$$

Teorem 3.9 (Ertuğrul ve Yeşilyurt, 2019): L bir sınırlı kafes, $0\le a\le b\le 1$ olacak şekilde $a,b\in L$ için V_1, V_2 ve V_3 sırasıyla L'nin $[b,1], [a,b]$ ve $[0,a]$ alt aralıklarında tanımlı üçgensel normlar olmak üzere aşağıdaki şekilde verilen $T_9: L^2\to L$ L'de bir üçgensel normdur:

$$T_9(x,y)=\begin{cases} V_1(x,y) & , \quad (x,y)\in[b,1)^2 \\ V_2(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,b)^2 \\ V_3(x,y) & , \quad (x,y)\in[0,a)^2 \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[b,1)\times[0,b) \\ & \quad \cup\,[0,b)\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[a,b)\times[0,a)\cup[0,a)\times[a,b) \\ & \quad \cup\, L\times\{1\}\cup\{1\}\times L \\ V_2(x\wedge b, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in[a,1)\times\mathbb{I}_b \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_b\times[a,1) \\ & \quad \cup\,\mathbb{I}_b\times\mathbb{I}_b \\ V_3(x\wedge a, y\wedge a) & , \quad aksi\ takdirde. \end{cases} \tag{9}$$

Teorem 3.10 (Dan vd., 2020): $a,b\in L\backslash\{0,1\}, a<b$ ve W, $[a,b]$ üzerinde bir üçgensel norm olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan $T_{10}: L^2\to L$ L'de bir üçgensel normdur:

$$T_{10}(x,y)=\begin{cases} W(x,y) & , \quad (x,y)\in[a,b)^2 \\ W(x, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in[a,b)\times\mathbb{I}_b^a \\ W(x\wedge b, y) & , \quad (x,y)\in\mathbb{I}_b^a\times[a,b) \\ W(x\wedge b, y\wedge b) & , \quad (x,y)\in\mathbb{I}_b^a\times\mathbb{I}_b^a \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[b,1)^2, 1\in\{x,y\} \\ x\wedge y\wedge b & , \quad (x,y)\in[0,a)\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[b,1)\times[0,a) \\ & \quad \cup\,[0,a)\times\mathbb{I}_b^a\cup\mathbb{I}_b^a\times[0,a) \\ & \quad \cup\,[a,b)\times[b,1)\cup[b,1)\times[a,b) \\ & \quad \cup\,[b,1)\times\mathbb{I}_b^a\cup\mathbb{I}_b^a\times[b,1) \\ & \quad \cup\,[0,a)\times\mathbb{I}_{a,b}\cup\mathbb{I}_{a,b}\times[0,a) \\ x\wedge y\wedge a & , \quad aksi\ takdirde. \end{cases} \tag{10}$$

T_8 t-norm ve T_{10} t-norm yapılarının çakıştığı açıkça görülmektedir.
Aşağıda , sınırlı bir kafes üzerinde üçgensel normlar için yeni inşa metodu sunulacaktır.

Teorem 3.11: L bir sınırlı kafes, $a,b \in L$ ve $k \in L\backslash\{0\}$ bir en küçük eleman olsun. W, L'nin $[a,b]$ alt aralığında tanımlı bir üçgensel norm ise aşağıdaki şekilde verilen $T_{11}: L^2 \to L$ fonksiyonu L'de bir üçgensel normdur:

$$T_{11}(x,y) = \begin{cases} W(x \wedge b, y \wedge b) & , \quad (x,y) \in [a,b)^2 \cup [a,b) \times \mathbb{I}_b^a \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_b^a \times [a,b) \cup \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_b^a \\ k & , \quad (x,y) \in (0,a) \times L\backslash\{0,1\} \\ & \quad \cup\, L\backslash\{0,1\} \times (0,a) \\ & \quad \cup\, [a,b) \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [a,b) \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times \mathbb{I}_b^a \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_b^a \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_a^b \times [b,1) \\ & \quad \cup\, [b,1) \times \mathbb{I}_a^b \cup \mathbb{I}_{a,b} \times L\backslash\{0,1\} \\ & \quad \cup\, L\backslash\{0,1\} \times \mathbb{I}_{a,b} \\ x \wedge y \wedge b & , \quad (x,y) \in [a,b) \times [b,1) \\ & \quad \cup\, [b,1) \times [a,b) \\ & \quad \cup\, \mathbb{I}_b^a \times [b,1) \cup [b,1) \times \mathbb{I}_b^a \\ x \wedge y & , \quad (x,y) \in [b,1)^2 \\ & \quad \cup\, L \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times L. \end{cases} \tag{11}$$

İspat:
i) *Monotonluk*: $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $x \leq y$ olacak şekilde $T_{11}(x,z) \leq T_{11}(y,z)$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $x \in (0,a)$ veya $x \in \mathbb{I}_a^b$ veya $x \in \mathbb{I}_{a,b}$ ise $T_{11}(x,z) = k$ olup eşitsizlik sağlanır. Benzer şekilde $z \in (0,a)$ veya $z \in \mathbb{I}_a^b$ veya $z \in \mathbb{I}_{a,b}$ ise eşitsizliğin her iki tarafı da k'dır. Ayrıca $z = 1$ ise eşitliğin sağlandığı açıkça görülür. Öte yandan x ve y aynı aralıkta ise $x \leq y$ olduğundan tüm $z \in L$ için $T_{11}(x,z) \leq T_{11}(y,z)'$dir. Bu nedenle, monotonluk özelliği gösterilirken yukarıda belirtilen durumlar aşağıda listelenmemiştir.

1. $x \in [a,b)$ olsun.
1.1. $y \in [b,1)$,
1.1.1. $z \in [a,b)$,
$T_{11}(x,z) = W(x,z) \leq W(b,z) = z = y \wedge z \wedge b = T_{11}(y,z)$.
1.1.2. $z \in [b,1)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b = x < b \leq y \wedge z = T_{11}(y,z)$.
1.1.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,
$T_{11}(x,z) = W(x, z \wedge b) \leq W(b, z \wedge b) = z \wedge b = y \wedge z \wedge b = T_{11}(y,z)$.
1.2. $y = 1$,
1.2.1. $z \in [a,b)$,
$T_{11}(x,z) = W(x,z) \leq W(b,z) = z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
1.2.2. $z \in [b,1)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b = x < b \leq z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
1.2.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,
$T_{11}(x,z) = W(x, z \wedge b) \leq W(b, z \wedge b) = z \wedge b < z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
1.3. $y \in \mathbb{I}_b^a$,
1.3.1. $z \in [a,b)$,

$T_{11}(x,z) = W(x,z) \leq W(y \wedge b, z) = T_{11}(y,z)$.
1.3.2. $z \in [b,1)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b \leq y \wedge z \wedge b = T_{11}(y,z)$.
1.3.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,
$T_{11}(x,z) = W(x, z \wedge b) \leq W(y \wedge b, z \wedge b) = T_{11}(y,z)$.

2. $x \in [b,1)$ olsun.
2.1. $y = 1$,
2.1.1. $z \in [a,b)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b = z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
2.1.2. $z \in [b,1)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \leq z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
2.1.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b = z \wedge b < z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.

3. $x \in \mathbb{I}_b^a$ olsun.
3.1. $y \in [b,1)$,
3.1.1. $z \in [a,b)$,
$T_{11}(x,z) = W(x \wedge b, z) \leq W(b,z) = z = y \wedge z \wedge b = T_{11}(y,z)$.
3.1.2. $z \in [b,1)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b = x \wedge b < b \leq y \wedge z = T_{11}(y,z)$.
3.1.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,
$T_{11}(x,z) = W(x \wedge b, z \wedge b) \leq W(b, z \wedge b) = z \wedge b = y \wedge z \wedge b = T_{11}(y,z)$.
3.2. $y = 1$,
3.2.1. $z \in [a,b)$,
$T_{11}(x,z) = W(x \wedge b, z) \leq W(b,z) = z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
3.2.2. $z \in [b,1)$,
$T_{11}(x,z) = x \wedge z \wedge b = x \wedge b < b \leq z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.
3.2.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,
$T_{11}(x,z) = W(x \wedge b, z \wedge b) \leq W(b, z \wedge b) = z \wedge b < z = T_{11}(1,z) = T_{11}(y,z)$.

ii) *Asosyatiflik* : Her $x,y,z \in L$ için $T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(T_{11}(x,y),z)$ olmalıdır. x,y ve z elemanlarından herhangi birinin 0 veya 1 olması durumunda ispat açıktır. Ayrıca x,y ve z'den herhangi biri $(0,a)'$da veya $\mathbb{I}_a^b{}'$da veya $\mathbb{I}_{a,b}{}'$nın elemanı ise eşitliğin her iki yanı da k'ya eşit olur. Yani, $T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = k = T_{11}(T_{11}(x,y),z)'$dir. İspatta kalan diğer tüm diğer durumlar listelenmiştir.

1. $x \in [a,b)$ olsun.
1.1. $y \in [a,b)$,
1.1.1. $z \in [a,b)$,
$$\begin{aligned} T_{11}(x, T_{11}(y,z)) &= T_{11}(x, W(y,z)) = W(x, W(y,z)) \\ &= W(W(x,y),z) \\ &= T_{11}(W(x,y),z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z). \end{aligned}$$
1.1.2. $z \in [b,1)$,
$$\begin{aligned} T_{11}(x, T_{11}(y,z)) &= T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x,y) = W(x,y) \\ &= W(x,y) \wedge z \wedge b \end{aligned}$$

$= T_{11}(W(x,y),z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.1.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, W(y, z \wedge b)) = W(x, W(y, z \wedge b))$
$= W(W(x,y), z \wedge b)$
$= T_{11}(W(x,y),z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.2. $y \in [b,1)$,

1.2.1. $z \in [a,b)$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = W(x,z)$
$= T_{11}(x,z)$
$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.2.2. $z \in [b,1)$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) \wedge b = x$
$= x \wedge z \wedge b$
$= T_{11}(x,z)$
$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.2.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x, z \wedge b)$
$= W(x, z \wedge b)$
$= T_{11}(x,z)$
$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.3. $y \in \mathbb{I}_b^a$,

1.3.1. $z \in [a,b)$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, W(y \wedge b, z)) = W(x, W(y \wedge b\ , z))$
$= W(W(x, y \wedge b), z)$
$= T_{11}(W(x, y \wedge b), z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.3.2. $z \in [b,1)$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x, y \wedge b) = W(x, y \wedge b)$
$= W(x, y \wedge b) \wedge z \wedge b$
$= T_{11}(W(x, y \wedge b), z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

1.3.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, W(y \wedge b, z \wedge b)) = W(x, W(y \wedge b, z \wedge b))$
$= W(W(x, y \wedge b), z \wedge b)$
$= T_{11}(W(x, y \wedge b), z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

2. $x \in [b,1)$ olsun.

2.1. $y \in [a,b)$,

2.1.1. $z \in [a,b)$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, W(y,z)) = x \wedge W(y,z) \wedge b = W(y,z)$
$= T_{11}(y,z)$
$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

2.1.2. $z \in [b,1)$,

$T_{11}(x, T_{11}(y,z)) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x,y) = x \wedge y \wedge b = y$
$= y \wedge z \wedge b$
$= T_{11}(y,z)$
$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).$

2.1.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}\big(x,W(y,z\wedge b)\big) = x\wedge W(y,z\wedge b)\wedge b\\ &= W(y,z\wedge b)\\ &= T_{11}(y,z)\\ &= T_{11}(x\wedge y\wedge b,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

2.2. $y\in[b,1)$,

2.2.1. $z\in[a,b)$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}(x,y\wedge z\wedge b) = T_{11}(x,z) = x\wedge z\wedge b = z\\ &= (x\wedge y)\wedge z\wedge b\\ &= T_{11}(x\wedge y,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

2.2.2. $z\in[b,1)$,

$$\begin{aligned}T_{11}(x,T_{11}(y,z) &= T_{11}(x,y\wedge z) = x\wedge(y\wedge z)\\ &= (x\wedge y)\wedge z\\ &= T_{11}(x\wedge y,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

2.2.3. $z\in\mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}(x,y\wedge z\wedge b) = T_{11}(x,z\wedge b) = x\wedge(z\wedge b)\wedge b\\ &= z\wedge b = (x\wedge y)\wedge z\wedge b\\ &= T_{11}(x\wedge y,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

2.3. $y\in\mathbb{I}_b^a$,

2.3.1. $z\in[a,b)$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}\big(x,W(y\wedge b,z)\big) = x\wedge W(y\wedge b,z)\wedge b\\ &= W(y\wedge b,z)\\ &= T_{11}(y\wedge b,z)\\ &= T_{11}(x\wedge y\wedge b,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

2.3.2. $z\in[b,1)$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}(x,y\wedge z\wedge b) = T_{11}(x,y\wedge b) = x\wedge(y\wedge b)\wedge b\\ &= y\wedge b = (y\wedge b)\wedge z\wedge b\\ &= T_{11}(y\wedge b,z)\\ &= T_{11}(x\wedge y\wedge b,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

2.3.3. $z\in\mathbb{I}_b^a$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}\big(x,W(y\wedge b,z\wedge b)\big) = x\wedge W(y\wedge b,z\wedge b)\wedge b\\ &= W(y\wedge b,z\wedge b)\\ &= T_{11}(y\wedge b,z)\\ &= T_{11}(x\wedge y\wedge b,z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

3. $x\in\mathbb{I}_b^a$ olsun.

3.1. $y\in[a,b)$,

3.1.1. $z\in[a,b)$,

$$\begin{aligned}T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) &= T_{11}\big(x,W(y,z)\big) = W\big(x\wedge b,W(y,z)\big)\\ &= W(W(x\wedge b,y),z)\\ &= T_{11}(W(x\wedge b,y),z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

3.1.2. $z\in[b,1)$,

$$\begin{aligned}T_{11}(x,T_{11}(y,z)) &= T_{11}(x,y\wedge z\wedge b) = T_{11}(x,y) = W(x\wedge b,y)\\ &= W(x\wedge b,y)\wedge z\wedge b\\ &= T_{11}(W(x\wedge b,y),z) = T_{11}(T_{11}(x,y),z).\end{aligned}$$

3.1.3. $z\in\mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}\big(x,T_{11}(y,z)\big) = T_{11}\big(x,W(y,z\wedge b)\big) = W\big(x\wedge b,W(y,z\wedge b)\big)$$

$$= W(W(x \wedge b, y), z \wedge b)$$
$$= T_{11}(W(x \wedge b, y), z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

3.2. $y \in [b, 1)$,

3.2.1. $z \in [a, b)$,

$$T_{11}\big(x, T_{11}(y\,, z)\big) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x, z) = W(x \wedge b, z)$$
$$= T_{11}(x \wedge b, z)$$
$$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

3.2.2. $z \in [b, 1)$,

$$T_{11}(x, T_{11}(y, z) = T_{11}(x, y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) \wedge b = x \wedge b$$
$$= (x \wedge b) \wedge z \wedge b = T_{11}(x \wedge b, z)$$
$$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

3.2.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}(x, T_{11}(y, z) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x, z \wedge b) = W(x \wedge b, z \wedge b)$$
$$= T_{11}(x \wedge b, z)$$
$$= T_{11}(x \wedge y \wedge b, z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

3.3. $y \in \mathbb{I}_b^a$,

3.3.1. $z \in [a, b)$,

$$T_{11}(x, T_{11}(y, z) = T_{11}\big(x, W(y \wedge b, z)\big) = W\big(x \wedge b, W(y \wedge b, z)\big)$$
$$= W(W(x \wedge b, y \wedge b), z)$$
$$= T_{11}(W(x \wedge b, y \wedge b), z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

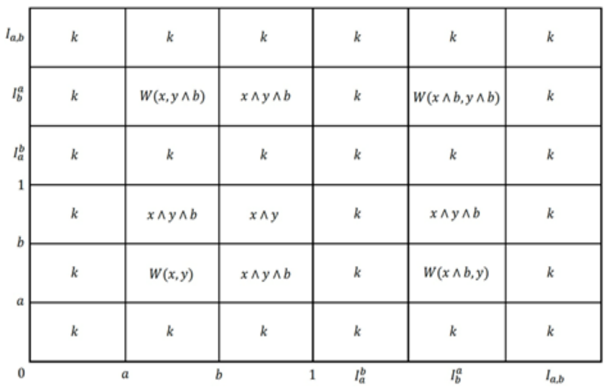
3.3.2. $z \in [b, 1)$,

$$T_{11}\big(x, T_{11}(y, z)\big) = T_{11}(x, y \wedge z \wedge b) = T_{11}(x, y \wedge b) = W(x \wedge b, y \wedge b)$$
$$= W(x \wedge b, y \wedge b) \wedge z \wedge b$$
$$= T_{11}(W(x \wedge b, y \wedge b), z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

3.3.3. $z \in \mathbb{I}_b^a$,

$$T_{11}\big(x, T_{11}(y, z)\big) = T_{11}\big(x, W(y \wedge b, z \wedge b)\big) = W\big(x \wedge b, W(y \wedge b, z \wedge b)\big)$$
$$= W(W(x \wedge b, y \wedge b), z \wedge b)$$
$$= T_{11}(W(x \wedge b, y \wedge b), z) = T_{11}(T_{11}(x, y), z).$$

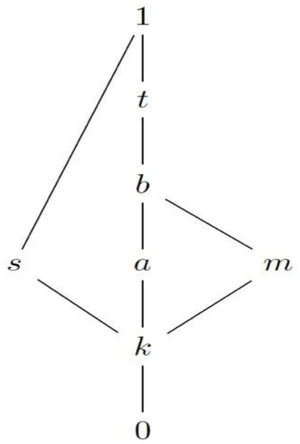
Her $x \in L$ için $T_{11}(x, 1) = x \wedge 1 = x'$dir. Yani; $1 \in L$, $T_{11}{}'$ in birim elemanıdır. $T_{11}{}'$ in komütatifliği kolayca görülür. Böylece T_{11}, L üzerinde bir t-normdur. T_{11} t-normun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir (Şekil 1).



Şekil 1. (11) formülünden elde edilen T_{11} t-normu

Figure 1. The t-norm T_{11} obtained from the formula (11)

Örnek 3.12. Şekil 2 $'$ de verilen $(L_1 = \{0, k, s, a, m, b, t, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi alınsın. $(L_1, \leq)$ kafesinin Teorem 3.11 $'$ in şartlarını sağladığı kolayca görülür.



Şekil 2. L_1 kafesi
Figure 2. The lattice L_1

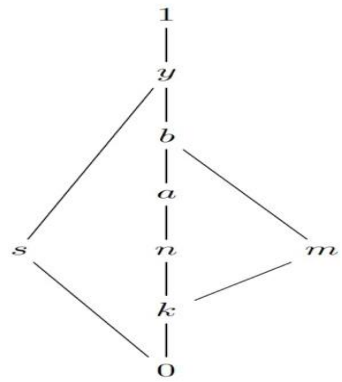
$[a,b]$ üzerinde $W = T_\wedge$ t-normu seçilirse Teorem 3.11 ile $L_1{}'$de T_{11} t-normu Tablo $1'$deki gibi bulunur.

Tablo 1. L_1 üzerinde T_{11} t-normu
Table 1. T-norm T_{11} on L_1

T_{11}	0	k	a	b	t	m	s	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
k	0	k	k	k	k	k	k	k
a	0	k	a	a	a	k	k	a
b	0	k	a	b	b	k	k	b
t	0	k	a	b	t	k	k	t
m	0	k	k	k	k	k	k	m
s	0	k	k	k	k	k	k	s
1	0	k	a	b	t	m	s	1

Uyarı 3.13. Teorem $3.11'$in kısıtlaması ihmal edilemez. Aşağıdaki örnek bu argümanı desteklemektedir.

Örnek 3.14. Şekil 3 ile verilen $(L_2 = \{0,k,n,a,b,y,m,s,1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın. $s \in \mathbb{I}_{a,b}$ ve $k \in (0,a)$ için $s \parallel k$ olacak şekilde bir $s \in L_2$ elemanı olduğu için $(L_2, \leq)$ kafesinin Teorem $3.11'$de belirtilen ilave şartları sağlamadığı açıktır.

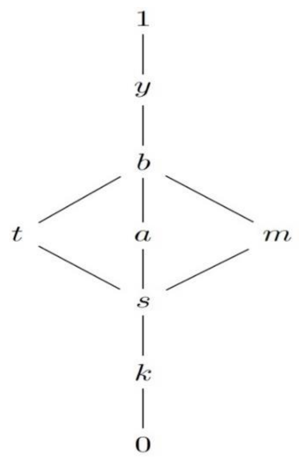


Şekil 3. L_2 kafesi
Figure 3. The lattice L_2

Teorem 3.11 kullanılarak, $T_{11}(k,s) = k \nleq s = T_{11}(1,s)$ elde edilir. Buradan, T_{11} fonksiyonu monotonluk özelliğini sağlamadığı için L_2 üzerinde bir t-norm değildir.

Uyarı 3.15. Genel olarak, Teorem $3.11'$de tanımlanan T_{11} t-normu, Teorem 3.1, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 ve $3.10'$da sırasıyla tanımlanan $T_1, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9$ ve T_{10} t-normlarından farklı bir yapıya sahiptir (Bakınız Örnek 3.16 ve Örnek 3.17).

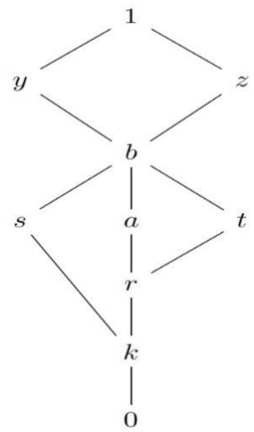
Örnek 3.16. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_3 = \{0,k,s,a,b,t,m,y,1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 4. L_3 kafesi
Figure 4. The lattice L_3

Bu kafes diyagramında, Teorem 3.1 ve Teorem 3.11 kullanılarak, $k, s, t \in L_3$ elemanları için $T_1(s,t) = s \neq k = T_{11}(s,t)$ elde edilir ve buradan $T_1 \neq T_{11}$ bulunur.

Örnek 3.17. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_4 = \{0, k, r, a, b, y, z, s, t, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alısın.

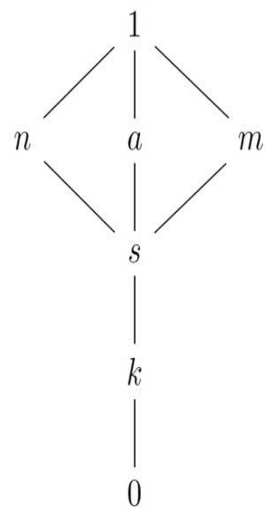


Şekil 5. L_4 kafesi
Figure 5. The lattice L_4

Bu kafes diyagramında , Teorem 3.5-3.11 kullanılarak , $T_5(r,r) = r \neq k = T_{11}(r,r)$, $T_6(r,r) = 0 \neq k = T_{11}(r,r)$, $T_7(r,r) = 0 \neq k = T_{11}(r,r)$, $T_8(r,r) = r \neq k = T_{11}(r,r)$, $T_9(r,y) = r \neq k = T_{11}(r,y)$ ve $T_{10}(r,r) = r \neq k = T_{11}(r,r)$ elde edilir. Buradan , T_{11} t-normunun T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 ve T_{10} t-normlarından farklı olduğu görülür. W, V_1, V_2 ve $V_3{}'$ ün seçimlerinden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Uyarı 3.18. (11) formülünde $b = 1$ alınsa dahi (11) formülü ile elde edilen T_{11} t-normu, $(2), (3)$ ve (4) formülleri ile verilen sırasıyla T_2, T_3 ve T_4 t-normları eşit olmak zorunda değildir. Bu argümanı destekleyen örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.19. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L_5 = \{0, k, s, a, n, m, 1\}, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alısın.



Şekil 6. L_5 kafesi
Figure 6. The lattice L_5

Bu kafes diyagramında , Teorem 3.2-3.4 ve Teorem 3.11 kullanılarak , $T_2(s,s) = s \neq k = T_{11}(s,s)$, $T_3(k,s) = 0 \neq k = T_{11}(k,s)$ ve $T_4(n,n) = 0 \neq k = T_{11}(n,n)$ olduğu elde edilir. Buradan , $T_2 \neq T_{11}$, $T_3 \neq T_{11}$ ve $T_4 \neq T_{11}$ bulunur. Ayrıca farklılıkların W t-normunun seçiminden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

Önerilen inşa metotları ile literatürde mevcut olan yöntemler kıyaslandıktan sonra doğal olarak akla $''$Teorem 3.11$'$deki inşa yöntemi ile literatürdeki inşa yöntemleri bazı kısıtlamalar altında çakışabilir mi?$''$ sorusu gelir. Aşağıdaki uyarıda bu soruya cevap verilecektir.

Uyarı 3.20. (i) $(6), (8), (10)$ ve (11) formüllerinde $a = 0$ alınırsa $(6), (8)$ ve (10) formülleri ile sırasıyla elde edilen T_6, T_8 ve T_{10} üçgensel normları, (11) formülü ile elde edilen T_{11} üçgensel normu ile çakışır.

(ii) (11) formülünde $a = 0$ ve (9) formülünde $a = 0, V_1 = \wedge$ ve $V_2 = W$ alınırsa (9) formülü ile bulunan T_9 üçgensel normu, (11) formülü ile bulunan T_{11} üçgensel normu ile çakışır.

4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Konormların İnşa Metodu

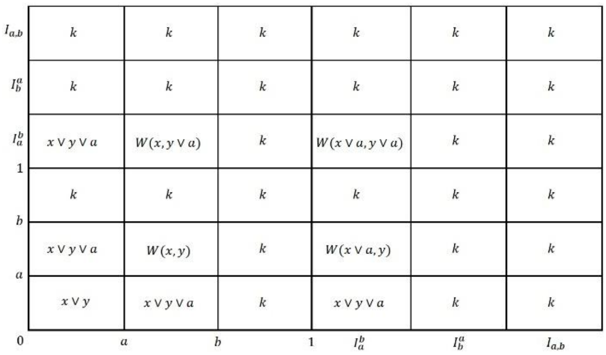
Bu bölümde, Teorem 4.1$'$de verilen üçgensel konorm inşa metodu, Teorem 3.11$'$de verilen üçgensel norm inşa metodundan dual olarak elde edilmiştir. Bu sebeple ispatlara yer verilmemiştir.

Teorem 4.1. L bir sınırlı kafes, $a, b \in L$ ve $k \in L \backslash \{1\}$ bir en büyük eleman olsun. W, L'nin $[a, b]$ alt aralığında bir üçgensel konorm ise aşağıdaki gibi verilen $S_1: L^2 \to L$ fonksiyonu L' de bir üçgensel konormdur:

$$S_1(x,y) = \begin{cases} W(x \vee a, y \vee a) & , \quad (x,y) \in (a,b]^2 \cup (a,b] \times I_a^b \\ & \quad \cup I_a^b \times (a,b] \cup I_a^b \times I_a^b \\ k & , \quad (x,y) \in (0,a] \times (b,1) \\ & \quad \cup (a,b] \times (b,1) \\ & \quad \cup (b,1) \times (0,a] \\ & \quad \cup (b,1) \times (a,b] \\ & \quad \cup (b,1)^2 \\ & \quad \cup (b,1) \times I_a^b \cup I_a^b \times (b,1) \\ & \quad \cup I_b^a \times L \setminus \{0,1\} \\ & \quad \cup L \setminus \{0,1\} \times I_b^a \\ & \quad \cup I_{a,b} \times L \setminus \{0,1\} \\ & \quad \cup L \setminus \{0,1\} \times I_{a,b} \\ x \vee y \vee a & , \quad (x,y) \in I_a^b \times (0,a] \\ & \quad \cup (0,a] \times I_a^b \\ & \quad \cup (a,b] \times (0,a] \cup (0,a] \times (a,b] \\ x \vee y & , \quad (x,y) \in (0,a]^2, 0, 1 \in \{x,y\}. \end{cases} \tag{12}$$

İspat: Teorem 3.11$'$e benzer şekilde ispatlanır.

S_1 t-konormun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir.



Şekil 7. (12) formülünden elde edilen S_1 t-konormu

Figure 7. The t-konorm S_1 obtained from the formula (12)

5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların ve Konormların Modifiye Ordinal Toplam İnşaları

Bu bölümde, Ertuğrul vd. (2015)$'$nin çalışması göz önüne alınarak, Teorem 3.11 ve Teorem 4.1$'$de önerilen inşa metotları, sırasıyla keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde üçgensel normlar ve üçgnsel konormlar için modifiye ordinal toplam inşasına genelleştirilmiştir.

Teorem 5.1. L bir sınırlı kafes ve $0 = a_n < \cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n = 1$ olacak şekilde L' nin $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ sonlu bir zinciri, $k_{j-1} \in L \setminus \{a_j\}'$nın en küçük elemanı ve $W, [a_1, b_1]$ üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki gibi tanımlanan $T_n: L^2 \to L$ fonksiyonu bir t-normdur, burada $T_1 = W$ ve $j \in \{2, \ldots, n\}$ için $T_j: [a_j, b_j]^2 \to [a_j, b_j]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$T_j(x,y)=\begin{cases} T_{j-1}(x\wedge b_{j-1},y\wedge b_{j-1}) & , \quad (x,y)\in[a_{j-1},b_{j-1})^2 \\ & \quad \cup [a_{j-1},b_{j-1})\times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}}\times[a_{j-1},b_{j-1}) \\ & \quad \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}}\times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ k_{j-1} & , \quad (x,y)\in(a_j,a_{j-1})\times L\setminus\{a_j,b_j\} \\ & \quad \cup L\setminus\{a_j,b_j\}\times(a_j,a_{j-1}) \\ & \quad \cup [a_{j-1},b_{j-1})\times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}\times[a_{j-1},b_{j-1}) \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}\times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}\cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}\times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}}\times[b_{j-1},b_j) \\ & \quad \cup [b_{j-1},b_j)\times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}}\times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{a_{j-1},b_{j-1}}\times L\setminus\{a_j,b_j\} \\ & \quad \cup L\setminus\{a_j,b_j\}\times I_{a_{j-1},b_{j-1}} \\ x\wedge y\wedge b_{j-1} & , \quad (x,y)\in I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}}\times[b_{j-1},b_j) \\ & \quad \cup [b_{j-1},b_j)\times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \quad \cup [b_{j-1},b_j)\times[a_{j-1},b_{j-1}) \\ & \quad \cup [a_{j-1},b_{j-1})\times[b_{j-1},b_j) \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[b_{j-1},b_j)^2, a_j,b_j\in\{x,y\}. \end{cases} \tag{13}$$

İspat: Teorem $3.11'$den tümevarım yöntemiyle kolaylıkla elde edilir.

Teorem 5.2. $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $0=a_n<\cdots<a_2<a_1<b_1<b_2<\cdots<b_n=1$ olacak şekilde L nin $\{a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n\}$ sonlu bir zinciri, $k_{j-1}\in L\setminus\{b_j\}$ nın en büyük elemanı ve $W,[a_1,b_1]$ üzerinde bir t-konorm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki gibi tanımlanan $S_n\colon L^2\to L$ fonksiyonu bir t-konormdur, burada $S_1=W$ ve $j\in\{2,\ldots,n\}$ için $S_j\colon[a_j,b_j]^2\to[a_j,b_j]$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_j(x,y) = \begin{cases} S_{j-1}(x \vee a_{j-1}, y \vee a_{j-1}) & , \quad (x,y) \in (a_{j-1}, b_{j-1}]^2 \\ & \quad \cup (a_{j-1}, b_{j-1}] \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times (a_{j-1}, b_{j-1}] \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ k_{j-1} & , \quad (x,y) \in (a_j, a_{j-1}] \times (b_{j-1}, b_j) \\ & \quad \cup (a_{j-1}, b_{j-1}] \times (b_{j-1}, b_j) \\ & \quad \cup (b_{j-1}, b_j) \times (a_j, a_{j-1}] \\ & \quad \cup (b_{j-1}, b_j) \times (a_{j-1}, b_{j-1}] \\ & \quad \cup (b_{j-1}, b_j)^2 \times (b_{j-1}, b_j) \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times (b_{j-1}, b_j) \\ & \quad \cup I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \times L \setminus \{a_j, b_j\} \\ & \quad \cup L \setminus \{a_j, b_j\} \times I_{b_{j-1}}^{a_{j-1}} \\ & \quad \cup I_{a_{j-1}, b_{j-1}} \times L \setminus \{a_j, b_j\} \\ & \quad \cup L \setminus \{a_j, b_j\} \times I_{a_{j-1}, b_{j-1}} \\ x \vee y \vee a_{j-1} & , \quad (x,y) \in I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \times (a_j, a_{j-1}] \\ & \quad \cup (a_j, a_{j-1}] \times I_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \\ & \quad \cup (a_{j-1}, b_{j-1}] \times (a_j, a_{j-1}] \\ & \quad \cup (a_j, a_{j-1}] \times (a_{j-1}, b_{j-1}] \\ x \vee y & , \quad (x,y) \in (a_j, a_{j-1}]^2, a_j, b_j \in \{x, y\}. \end{cases} \tag{14}$$

İspat: Teorem 4.1 ′den tümevarım yöntemiyle kolaylıkla elde edilir.

6. Sonuç ve Öneriler

Üçgensel normlar (konormlar) ilk olarak $[0,1]$ birim aralık üzerinde tanımlanmış ve birim aralık üzerinde kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Ardından, t-normlar (t-konormlar) sınırlı kafesler üzerinde tanımlanmış ve sınırlı kafesler üzerinde incelenmiştir. Bu bağlamda , sınırlı kafesler üzerinde t-normların (t-konormların) inşası , birçok potansiyel uygulamaya sahip olduğundan, araştırmacılar tarafından ilgi çeken bir konu olmuştur. Bu çalışmada keyfi bir L sınırlı kafesinin $[a,b]$ alt aralığı üzerinde tanımlı W t-normundan (t-konormundan), $L \setminus \{0\}$ ın en küçük elemanı ($L \setminus \{1\}$ in en büyük elemanı) varsayımı altında, L sınırlı kafesi üzerindeki t-normlar (t-konormlar) için farklı bir inşa metodu tanıtılmıştır. Ardından, elde edilen inşa

metotlarının literatürde mevcut yöntemlerle ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca, keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde t-normlar (t-konormlar) için önerilen inşa metodunun modifiye ordinal toplam inşasına genelleştirilebileceği gösterilmiştir. Oluşturduğumuz yöntemin sınırlı kafesler üzerindeki t-normlara (t-konormlara) yeni bir bakış açısı kazandırdığına inanıyoruz Problem olarak, keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde $[a,b]$ alt aralığı üzerindeki bir t-normun varlığına dayanılarak önerilen metodun bir genelleştirmesi olarak uninormlar için bir inşa yöntemi verilebilir mi, araştırılabilir.

Yazar katkısı (Author contribution)

Ertuğrul, Ü: Fikir ve kavram, Eleştirel inceleme. Ayvaz, E.N: Fikir ve kavram, Literatür taraması, Yazım.

Finansman beyanı

Bu araştırma herhangi bir fon kuruluşundan, ticari veya kar amacı gütmeyen sektörlerden özel bir hibe almamıştır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Etik standartlar

Bu çalışma için Etik Kurul Kararı gerekmemektedir.

Kaynaklar

Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium Publications, ISBN: 978-0-8218-1025-5, Providence, USA.

Butnariu, D., Klement, E.P. (1993). Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-90-481-4296-5, Dordrecht, Nedherlands.

Çaylı, G.D. (2018). On a new class of t-norms and t-conorms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 332, 129-143. https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.07.015

Çaylı, G.D. (2019). Some methods to obtain t-norms and t-conorms on bounded Lattices. *Kybernetika*, 55(2), 273-294. https://doi.org/10.14736/kyb-2019-2-0273

Dan, Y., Hu, B.Q., Qiao, J. (2020). New construction of t-norms and t-conorms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 395, 40-70. https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.05.017

Dvořák, A., Holčapek, M. (2020). New construction of an ordinal sum of t-norms and t- conorms on bounded lattices. *Information Sciences*, 515, 116-131. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.12.003

El-Zekey, M. (2020). Lattice-based sum of t-norms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386, 60-76. https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.01.006

Ertuğrul, Ü. and Yeşilyurt, M. (2019). Ordinal sums of triangular norms on bounded lattices. *Information Sciences*, 517, 198-216. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.12.056

Ertuğrul, Ü., Karaçal, F., Mesiar, R. (2015). Modified ordinal sums of triangular norms and triangular conorms on bounded lattices. *International Journal of Intelligent Systems*, 30(7), 807-817. https://doi.org/10.1002/int.21713

Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M.N., Karaçal, F. (2019). Some new construction methods for t- norms on bounded lattices. *International Journal of General Systems*, 48(7), 775-791. https://doi.ogr/10.1080/03081079.2019.1658757

Fodor, J.C. and Roubens, M. (1994). Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-90-481-4466-2, Dordrecht, Nedherlands.

Gottwald, S. (2001). A Treatise on Many-Valued Logic, Research Studies Press Ltd, ISBN: 0-86380- 262-1, Baldock, U.K.

Grabisch, M., Nguyen, H.T., Walker, E.A. (1995). Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-90-481-4477-8, Dordrecht, Nedherlands.

Hájek, P. (1998). Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-0-7923-5238-9, Dordrecht, Nedherlands.

Karaçal, F. and Şanlı, Z. (2022). Some new construction methods of t-norms and t-conorms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 451, 84-93. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.07.002

Karaçal, F., Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M.N. (2019). An extension method for t-norms on subintervals to t-norms on bounded lattices. *Kybernetika*, 55(6), 976-993. https://doi.org/10.14736/kyb-2019-6-0976

Karaçal, F., Kesicioğlu, M.N., Ertuğrul, Ü. (2020). Generalized convex combination of triangular norms on bounded lattices. *International Journal of General Systems*, 49(3), 277-301. https://doi.org/10.1080/03081079.2020.1730358

Klement, E.P., Weber, S. (1991). Generalized measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 40(2), 375-394. https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90166-N

Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. (2000). Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-0-7923-6416-0, Dordrecht, Nedherlands.

Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proceeding of National Academy of Sciences*, 28 (12), 535-537. https://doi.org/10.1073/pnas.28.12.535

Nelsen, R.B. (1999). An Introduction to Copulas, Springer, ISBN: 0387986235, New York.

Nguyen, H.T. and Walker, E. (1997). A First Course in Fuzzy Logic, CRC Press, ISBN: 0-84939-477-5, Boca Raton, USA.

Pap, E. (1995). Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-0-7923-3658-7, Dordrecht, Nedherlands.

Saminger, S. (2006). On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(10), 1403-1416. https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.12.021

Schweizer, B. and Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematic*, 10(1), 313-334. http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1960.10.313

Sugeno, M. (1974). Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications, Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.

Wang, Y.-M., Zhan, H., Liu, H.-W. (2020). Uni-nullnorms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 386, 132-144. https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.01.001

Weber, S. (1984). ⊥-Decomposable measures and ıntegrals for archimedean t-konorms ⊥. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101, 114-138. https://doi.org/10.1016/0022-247X(84)90061-1

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X