Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B- Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoritical Sciences

2018 - Cilt: 6 Sayı: 1
Sayfa: 1 - 7
DOI: 10.20290/aubtdb.315514
Geliş: 23 Mayıs 2017 Düzeltme: 29 Ekim 2017 Kabul: 10 Kasım 2017

UÇURTMA GRAFIN LAPLASYAN ÖZDEĞERLERİ ÜZERİNE

Sezer SORGUN [1], Hatice TOPCU [1, *]

[1] Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Nevşehir, Türkiye

ÖZET

p noktalı bir tam grafın, n-p noktalı bir yol grafın bir dereceli noktasına yeni bir kenar yardımıyla bağlanması ile elde edilen yeni grafa uçurtma graf denir ve $Kite_{n,n-p}$ ile gösterilir. Bu çalışmada, uçurtma grafın Laplasyan matrisinin bazı spektral özellikleri sunulmuştur. Öncelikle $Kite_{n,n-p}$ grafın Laplasyan karakteristik polinomu elde edilmiş ve böylece uçurtma grafın en büyük Laplasyan özdeğeri klik sayısına bağlı olarak sınırlandırılmıştır. Ayrıca bazı özel koşullar altında, $Kite_{n,n-p}$ grafla aynı klik sayısına sahip herhangi bir bağlantılı grafın $Kite_{n,n-p}$ grafa izomorf olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uuçurtma graf, Laplasyan özdeğer

ON THE LAPLACIAN EIGENVALUES OF THE KITE GRAPH

ABSTRACT

The kite graph, obtained by appending a complete graph K_p to a pendant vertex of the path graph P_{n-p}, is denoted by $Kite_{n,n-p}$. In this paper, some spectral properties of Laplacian matrix of the kite graph are presented. First the Laplacian characteristic polynomial of $Kite_{n,n-p}$ is obtained. Then the largest Laplacian eigenvalue of the kite graph is restricted depending on its clique number. Also it is shown that any connected graph with the same clique number with $Kite_{n,n-p}$ is isomorphic to the $Kite_{n,n-p}$ under certain conditions.

Keywords: Kite graph, Laplacian eigenvalue

1. GİRİŞ

Bu çalışmada yer alan tüm graflar basit ve yönsüzdür. Nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G)$ olan bir graf $G = (V(G), E(G))$ olsun. $i = 1, \dots, n$ olmak üzere, herhangi bir v_i noktasının derecesi, o noktaya komşu olan tüm kenarların sayısıdır ve d_{v_i} ile gösterilir. G grafının komşuluk matrisi $A(G)$, $V(G)$ nokta kümesi tarafından indekslenen bir 0-1 matrisidir ve şu şekilde tanımlanır; $i, j \in V(G)$ olmak üzere, i ile j arasında bir kenar var ise $A_{ij} = 1$, aksi takdirde $A_{ij} = 0$. Derece matrisi, graftaki tüm noktaların derecelerinin köşegene yerleştiği $D(G) = diag[d_{v_1}, d_{v_2}, \dots, d_{v_n}]$ matrisidir. Laplasyan matris ise derece matrisi ile komşuluk matrisinin farkı olarak tanımlanan $L(G) = D(G) - A(G)$ matrisidir. $L(G)$ pozitif yarı-tanımlı, simetrik ve singüler bir matristir. Dolayısıyla özdeğerleri şu şekilde gösterilebilir; $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \cdots \geq \mu_{n-1}(G) \geq \mu_n(G) = 0$. Herhangi bir G grafının Laplasyan matrisinin karakteristik polinomunu $\Phi(G)(x) = det(xI - L(G))$ ile göstereceğiz. Yönsüz bir grafta bir klik, nokta kümesinin bir alt kümesidir öyle ki bu alt kümedeki herhangi iki nokta arasında kesinlikle bir kenar mevcuttur. Klikteki nokta sayısına klik genişliği denir. Maksimum klik ise verilen graftaki mümkün olan en büyük genişliğe sahip klik olarak tanımlanır. Grafın klik sayısı ise maksimum klikteki nokta sayısıdır ve $\omega(G)$ ile gösterilir. Verilen herhangi iki G ve H grafının ayrık bileşimi ise verilen grafları bileşen olarak kabul eden bağlantısız graftır ve $G\mathring{\cup}H$ ile gösterilir. G grafının herhangi bir graf matrisi $M(G)$ olmak üzere, $M(G)$ nin birbirinden farklı tüm özdeğerlerinin oluşturduğu kümeye G nin $M(G)$ matrisine göre spektrumu

*Sorumlu Yazar: haticekamittopcu@gmail.com

denir ve $spec(M(G))$ ile gösterilir. Verilen herhangi iki G ve H grafı için $spec\big(M(G)\big) = spec(M(H))$ ise, G ve H graflarına M-kospektral graflar denir. Verilen herhangi iki G ve H grafı için $u,\ v \in V(G)$ ve $f(u),\ f(v) \in V(H)$ olmak üzere, $V(G)$ ve $V(H)$ nokta kümeleri arasında " u ve v noktalarının komşu olması için gerek ve yeter koşul $f(u)$ ve $f(v)$ noktalarının komşu olmasıdır" koşulunu sağlayan birebir örten bir eşleme var ise, G ve H graflarına izomorf graflar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir. İzomorf grafların aynı spektruma sahip oldukları açıktır fakat bunun tersi her zaman mümkün değildir. Eğer bir G grafına M-kospektral olan ve izomorf olmayan herhangi bir başka graf yok ise, bu grafa M-spektrumuna göre belirlenebilir graf denir ve kısaca DMS ile gösterilir. M komşuluk matrisi ise DAS; Laplasyan matrisi ise DLS ile gösterilir.

Uçurtma graf p noktalı bir tam grafın, *n-p* noktalı bir yol grafın bir dereceli noktasına yeni bir kenar yardımıyla bağlanması ile elde edilir ve bu bağlamda iki şekilde tanımlanabilir: eğer $n = p + 1$ ise $Kite_{n,1}$ grafına kısa uçurtma graf denir. Eğer $n > p + 1$ ise $Kite_{n,n-p}$ grafına uzun uçurtma graf denir[1,3]. Lolipop graf ise p noktalı bir döngü grafın, *n-p* noktalı bir yol grafın bir dereceli noktasına yeni bir kenar yardımıyla bağlanması ile elde edilir[9]. Lolipop grafın spektrumuna göre belirlenebilirliğine dair literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur[9,10]. Dolayısıyla bu durum uçurtma grafında aynı özelliklere sahip olup olmadığının araştırılması konusunda motivasyon kaynağı teşkil etmektedir. Kısa uçurtma grafın DAS ve DLS olduğu gösterilmiştir [1,2]. Ayrıca $n \geq 4$ ve $n \neq 5$ iken $Kite_{n,1}$ grafın işaretsiz Laplasyan matrisinin spektrumuna göre belirlenebilir olduğu da gösterilmiştir [3]. Fakat uzun uçurtma graf için bu durum halen bir açık problem teşkil etmektedir. Şimdiye kadar yayınlanmış olan çalışmalarda yalnızca $Kite_{n,2}$ grafının DAS olduğu ispatlanmıştır [1].

Dolayısıyla bu çalışmada, uzun uçurtma grafların Laplasyan spektrumları üzerine odaklanılmıştır. Öncelikle uçurtma grafın genel Laplasyan karakteristik polinomu elde edilerek, uzun uçurtma graf için bazı kesin Laplasyan özdeğerler bulunmuştur. Daha sonra ise elde edilen bu özdeğerlerin yardımıyla, uzun uçurtma grafın Laplasyan spektral karakterizasyonu ile ilgili bazı bulgular elde edilmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

Bir sonraki bölümde elde edilmek istenen sonuçlar için kullanılacak olan bazı lemmalara (yardımcı teoremlere) burada yer verilmiştir.

Lemma 2.1. [4] n noktalı bir G grafının özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}(G) \geq \lambda_n(G)$ ve G nin m noktalı indirgenmiş bir H altgrafının özdeğerleri $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \cdots \geq \lambda_{m-1}(H) \geq \lambda_m(H)$ biçiminde sıralansın. Buna göre, $i = 1, \dots, m$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{n-m+i}(G) \tag{1}$$

Lemma 2.2. [4] Bir G grafı için aşağıdaki parametreler ve özellikler, Laplasyan spektrumu yardımıyla elde edilebilir.

i. Nokta sayısı
ii. Kenar sayısı
iii. Bileşen sayısı
iv. Üreteç ağaç sayısı
v. Noktaların derecelerinin kareleri toplamı

Herhangi bir $v \in V(G)$ için, v noktasının temsil ettiği satır ve sütunun $L(G)$ matrisinden silinmesiyle elde edilen alt matrisi $L_v(G)$ ile gösterelim. $V(G) = \{v\}$ ise $\Phi\big(L_v(G)\big) = 1$ olduğunu kabul edelim. Buna göre aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 2.3. [5] G_1 grafının bir u noktası ile G_2 grafının bir v noktasının bir kenar yardımıyla bağlanması sonucunda elde edilen graf $G = G_1u : G_2v$ olsun. Buna göre G grafının Laplasyan karakteristik polinomu için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\Phi(G) = \Phi(G_1)\Phi(G_2) - \Phi(G_1)\Phi(L_v(G_2)) - \Phi(G_2)\Phi(L_u(G_1)) \tag{2}$$

Lemma 2.4. [4] K_p tam grafı ve P_q yol grafının Laplasyan karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

$$\Phi(K_p)(x) = x(x-p)^{p-1} \tag{3}$$

$$\Phi(P_q)(x) = \prod_{i=1}^{q}(x - 4sin^2\frac{\pi(i-1)}{2q}) \tag{4}$$

Lemma 2.5. [4] n noktalı bir G grafının noktalarının dereceleri toplamı, Laplasyan özdeğerlerinin toplamına eşittir.

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i \tag{5}$$

Lemma 2.6. [4] n noktalı ve en az bir kenar içeren bağlantılı bir G grafının maksimum derecesi $\Delta(G)$ ve en büyük Laplasyan özdeğeri $\mu(G)$ olsun. Buna göre,

$$\mu(G) \geq \Delta(G) + 1 \tag{6}$$

olur ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\Delta(G) = n - 1$ olmasıdır.

Lemma 2.7. [7] n noktalı bağlantılı bir grafın ağaç olması için gerek ve yeter şart kenar sayısının $n - 1$ e eşit olmasıdır.

3. SONUÇLAR

Lemma 3.1. $\boldsymbol{K_p}$ tam grafı ve $\boldsymbol{P_q}$ yol grafı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Burada $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{K_p}$ tam grafının keyfi bir noktası ve $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{P_{q+1}}$ yol grafının bir bitim noktasıdır.

$$\Phi(L_u(K_p))(x) = (x-1)(x-p)^{p-2} \tag{7}$$

$$\Phi\left(L_v(P_q)\right)(x) = \frac{x-1}{x}\Phi(P_q)(x) - \frac{1}{x}\Phi(P_{q+1})(x) \tag{8}$$

İspat $(\boldsymbol{p-1}) \times (\boldsymbol{p-1})$ tipindeki birim matris $\boldsymbol{I}$ ve bütün bileşenleri 1e eşit olan matris $\boldsymbol{J}$ olmak üzere, $\boldsymbol{L_u(K_p) = pI - J}$ olur. Böylece

$$\boldsymbol{\Phi(L_u(K_p))(x) = (x-1)(x-p)^{p-2}}$$

elde edilir. Lemma 2.3 yardımıyla,

$$\boldsymbol{\Phi(P_{q+1}) = \Phi(P_1)\Phi(P_q) - \Phi(P_1)\Phi\left(L_v(P_q)\right) - \Phi(P_q)\Phi(L_v(P_1))}$$

elde edilir öyle ki burada $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{P_{q+1}}$ yol grafının bir bitim noktasıdır. Buradan, Lemma 2.4 yardımıyla,

$$\boldsymbol{\Phi\left(L_v(P_q)\right)(x) = \frac{x-1}{x}\Phi(P_q)(x) - \frac{1}{x}\Phi(P_{q+1})(x)}$$

olduğu görülür.

Lemma 3.2. $\boldsymbol{Kite_{n,n-p}}$ grafının Laplasyan karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\Phi(Kite_{n,n-p})(x) = (x-p)^{p-2}\left[(x-p)\prod_{i=1}^{n-p+1}\left(x-4sin^2\frac{\pi(i-1)}{2n-2p+2}\right)+(1-p)\prod_{i=1}^{n-p}\left(x-4sin^2\frac{\pi(i-1)}{2n-2p}\right)\right] \quad (9)$$

İspat Lemma 2.3 ten,

$$\Phi(Kite_{n,n-p}) = \Phi(K_p)[\Phi(P_{n-p}) - \Phi(L_v(P_{n-p}))] - \Phi(L_u(K_p))\,\Phi(P_{n-p})$$

elde ederiz öyle ki burada $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{K_p}$ tam grafının keyfi bir noktası ve $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{P_{n-p}}$ yol grafının bir bitim noktasıdır. Lemma 3.1 ve Lemma 2.4 yardımıyla,

$$\Phi(Kite_{n,n-p})(x) = x(x-p)^{p-1}\left[\Phi(P_{n-p})(x) - \frac{(x-1)}{x}\Phi(P_{n-p})(x) + \frac{1}{x}\Phi(P_{n-p+1})(x)\right] - (x-1)(x-p)^{p-2}\Phi(P_{n-p})(x)$$

$$= (x-p)^{p-1}[\Phi(P_{n-p+1})(x) + \Phi(P_{n-p})(x)] - (x-1)(x-p)^{p-2}\Phi(P_{n-p})(x)$$

$$= (x-p)^{p-2}[(x-p)\Phi(P_{n-p+1})(x) + (1-p)\Phi(P_{n-p})(x)]$$

$$= (x-p)^{p-2}\left[(x-p)\prod_{i=1}^{n-p+1}\left(x-4sin^2\frac{\pi(i-1)}{2n-2p+2}\right)+(1-p)\prod_{i=1}^{n-p}\left(x-4sin^2\frac{\pi(i-1)}{2n-2p}\right)\right]$$

elde edilir.

Sonuç 3.3. Kısa uçurtma grafın Laplasyan karakteristik polinomu Lemma 3.2. yardımıyla kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Phi(Kite_{n,1})(x) = x(x-1)(x-n)(x-(n-1))^{n-3} \quad (10)$$

Lemma 3.4. $\boldsymbol{Kite_{n,n-p}}$ grafın Laplasyan özdeğerlerini $\boldsymbol{\mu_1} \geq \boldsymbol{\mu_2} \geq \cdots \geq \boldsymbol{\mu_{n-1}} \geq \boldsymbol{\mu_n} = \boldsymbol{0}$ ile gösterirsek,

$$p+1 \leq \mu_1 < p+2 \quad (11)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $\boldsymbol{n \geq p-1}$ ve $\boldsymbol{G = K_p}$Ů $\boldsymbol{P_{n-p}}$ olmak üzere, $\boldsymbol{G}$ nin özdeğerlerini $\boldsymbol{\mu'_1} \geq \boldsymbol{\mu'_2} \geq \cdots \geq \boldsymbol{\mu'_{n-1}} \geq \boldsymbol{\mu'_n} = \boldsymbol{0}$ ile gösterelim. Buna göre Lemma 2.5 ten,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i - \sum_{i=1}^{n-1}\mu'_i = \sum_{i=1}^{n-1}(\mu_i - \mu'_i) = 2$$

eşitliği elde edilir. Bu da

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Delta\mu_i = 2$$

demektir öyle ki burada $\boldsymbol{i = 1, \dots, n-1}$ için $\Delta\boldsymbol{\mu_i} = \boldsymbol{\mu_i - \mu'_i}$ dir. $\boldsymbol{G}$ bağlantısız bir graf ve $\boldsymbol{Kite_{n,\,n\,-\,p}}$ bağlantılı bir graf olduğundan, açık bir şekilde $\boldsymbol{\mu'_{n-1} = 0}$ ve $\boldsymbol{\mu_{n-1} > 0}$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, $\Delta\boldsymbol{\mu_{n-1} > 0}$ olur. Bu da

$$\sum_{i=1}^{n-2} \Delta\mu_i < 2$$

olduğu anlamına gelir. Buradan, $\Delta\boldsymbol{\mu_1} < \boldsymbol{2}$ olur. $\boldsymbol{G = K_p}$Ů $\boldsymbol{P_{n-p}}$ olduğundan $\boldsymbol{\mu'_1 = p}$ dir. Bütün bunların yardımıyla,

$$\boldsymbol{\mu_1 = \mu'_1 + \Delta\mu_1 = p + \Delta\mu_1 < p + 2}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, $\boldsymbol{n > p-1}$ iken $\boldsymbol{Kite_{n,n-p}}$ grafı, $\boldsymbol{Kite_{n,1}}$ grafını indirgenmiş bir alt graf olarak içerir. Böylece Lemma 2.1 ve (10) dan,

$$\mu_1 \geq p + 1$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

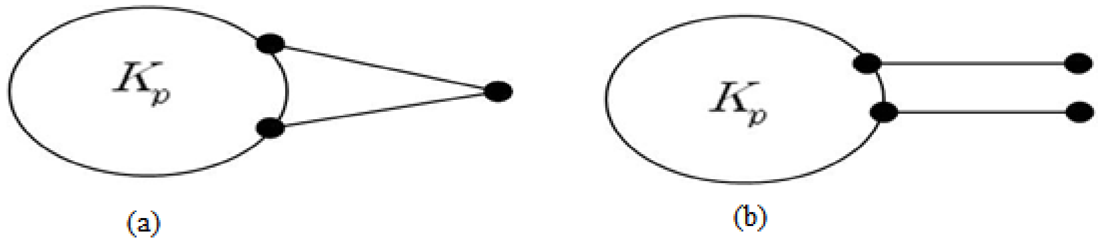
Teorem 3.5. $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{n}$ noktalı, $\boldsymbol{m}$ kenarlı ve derecesi 1 olan en az bir nokta içeren bir graf ve $\boldsymbol{\omega(G) = p}$ olsun. $\boldsymbol{G}$ grafının Laplasyan özdeğerlerini $\boldsymbol{\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \cdots \geq \mu_{n-1}(G) \geq \mu_n(G) = 0}$ ile gösterelim. Eğer $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{Kite_{n,n-p}}$ grafına Laplasyan matrisine göre ko-spektral bir graf ise ve

i. $m = \frac{p(p-1)}{2} + (n-p)$
ii. $p + 1 \leq \mu_1(G) < p + 2$
iii. $\mu_2(G) = p$

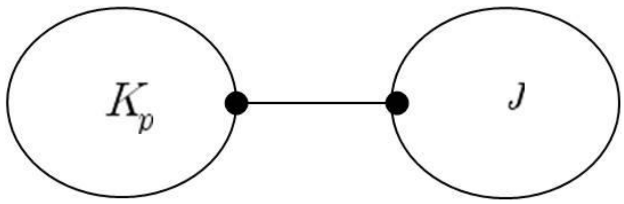
koşullarını sağlıyorsa, $\boldsymbol{G \cong Kite_{n,n-p}}$ olur.

İspat $\boldsymbol{G}$, teoremde verilen koşulları sağlayan bir graf olsun. Lemma 2.6 dan, $\boldsymbol{p + 2 > \mu_1(G) \geq \Delta(G) + 1}$ yani $\boldsymbol{p + 1 > \Delta(G)}$ olur. Böylece $\boldsymbol{K_p}$ kliğindeki herhangi bir noktanın, klik dışında kalan en fazla bir adet noktaya komşu olabileceğini söyleriz.

$\boldsymbol{G}$ nin, Şekil 1 deki graflardan herhangi birini indirgenmiş bir alt graf olarak içerdiğini varsayalım. Hesaplama yardımıyla, Şekil1 deki ilk grafın Laplasyan spektrumunun $\boldsymbol{p+1, p+1, p, \dots, p, 2, 0}$ ve ikinci grafın Laplasyan spektrumunun $\boldsymbol{\frac{p+2+\sqrt{p^2+4}}{2}}$, $\boldsymbol{\frac{p+2+\sqrt{p^2-4}}{2}}$, $\boldsymbol{p, \dots, p}$, $\boldsymbol{\frac{p+2-\sqrt{p^2-4}}{2}}$, $\boldsymbol{\frac{p+2-\sqrt{p^2+4}}{2}}$, $\boldsymbol{0}$ olduğu görülür. Böylece Şekil 1 deki her iki durum içinde $\boldsymbol{\mu_2(G) \geq p + 1 > p}$ elde ederiz. Bu da Lemma 2.1 den dolayı bir çelişki oluşturur ve $\boldsymbol{G}$ nin, Şekil 1 deki graflardan herhangi birini indirgenmiş bir alt graf olarak içeremeyeceğini söyleriz.



Şekil 1. (a) Klik içerisindeki herhangi iki noktanın klik dışında aynı noktaya komşu olması (b) Klik içerisindeki herhangi iki noktanın klik dışında farklı iki noktaya komşu olması



Şekil 2. K_p kliği ile grafın diğer kısmı arasında sadece bir adet kenar bulunması durumu

Buna göre, $\boldsymbol{G}$ grafı Şekil 2 de gösterilen biçimde bir graf olmak zorundadır. $\boldsymbol{G}$ nin kenar sayısını halihazırda bildiğimizden,

$$\frac{p(p-1)+2(n-p)}{2} = \frac{p(p-1)}{2} + k + 1$$

elde ederiz öyle ki burada $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{J}$ nin kenar sayısıdır. Yani $\boldsymbol{k = n - p - 1}$ olur. Bu yüzden $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{n - p}$ adet noktaya ve $\boldsymbol{n - p - 1}$ adet kenara sahip bağlantılı bir graf olur. Lemma 2.7 den $\boldsymbol{J}$ nin bir ağaç olduğunu söyleriz. $\boldsymbol{G}$ en az bir adet bir dereceli nokta içerdiğinden, $\boldsymbol{J}$ nin bir yol graf olduğunu söyleriz. Dolayısıyla $\boldsymbol{G \cong Kite_{n,n-p}}$ olur.

Sonuç olarak da aşağıdaki açık problem verilebilir.

Problem 3.1. $\boldsymbol{Kite_{n,n-p}}$ grafı, Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir yani DLS bir graftır.

KAYNAKLAR

[1] Sorgun S and Topcu H, On the spectral characterization of kite graphs, J Algebra Comb Discrete Struct Appl 2016; 3: 81-90.

[2] Zhang X and Zhang H, Some graphs determined by their spectra, Linear Algebra and its Applications, 2009; 431 (9): 1443–1454.

[3] Das K C and Liu M, Kite graphs determined by their spectra, Applied Mathematics and Computation, 2017; 297: 74–78.

[4] Cvetkovic D, Rowlinson P and Simic S, An introduction to the theory of graph spectra, Cambridge University Press, 2010.

[5] Guo J M, On the second largest Laplacian eigenvalue of trees, Linear Algebra and its Applications, 2005; 404 : 251–261.

[6] Grone R, Merris R, The Laplacian spectrum of graph II, SIAM J. Discrete Math., 1994; 7: 221-229.

[7] Godsil C, Royle G, Algebraic Graph Theory, Springer, 2001.

[8] van Dam, ER and Haemers WH, Which graphs are determined by their spectrum? Linear Algebra and its Applications, 2003; 373: 241–272.

[9] Haemers WH, Liu X, Zhang Y, Spectral characterizations of lollipop graphs, Linear Algebra and its Applications, 2008; 428: 2415–2423.

[10] Boulet R, Jouve B, Zhang The lollipop graph is determined by its spectrum, Electron. Journal of Combin , 2008; 15(1): 74,43.