

# DEĞİŞTİRİLMİŞ GERİLME ÇİFTİ TEORİSİ İLE GÖZENEKLİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KONSOL NANO-KİRİŞLERİN STATİK ANALİZİ

Uğur KAFKAS \*

Geliş: 27.03.2024; düzeltme: 22.04.2024; kabul: 20.05.2024

**Öz:** Üretim aşamasında çeşitli sorunlar sebebiyle gözenek oluşumu fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerde sıklıkla gözlemlenmektedir. Bu çalışmada gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş konsol nano-kirişlerin değiştirilmiş gerilme çifti teorisi çerçevesinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik yükler altında düşey yer değiştirmeleri incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin malzeme dağılımlarında kuvvet yasası teorisi, gözenek dağılımı içinse düzenli ve düzensiz dağılım olmak üzere iki model kullanılmıştır. Çalışma kapsamında gözeneksiz ve gözenekli fonksiyonel derecelendirilmiş konsol nano-kirişlerin düşey yer değiştirmelerinde, gözenek dağılım modellerinin, gözeneklilik parametresinin, değiştirilmiş gerilme çifti teorisinden gelen malzeme uzunluk ölçeği parametresinin ve kuvvet yasası parametresinin etkisi tablolar ve şekiller vasıtasıyla sunulmuştur. Çalışmada, malzeme uzunluk ölçeği parametresinin nano-kirişin rijitliğini artırıcı etkisinin olduğu ve düzensiz gözenek dağılımına sahip nano-kirişlerin, düzenli gözenek dağılımına sahip olanlara göre daha rijit davrandığı sonuçlarına ulaşılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Gözeneklilik, Nano-kiriş, Değiştirilmiş gerilme çifti teorisi, Sonlu elemanlar yöntemi.

## Static Analysis of Porous Functionally Graded Cantilever Nano-Beams Via Modified Couple Stress Theory

**Abstract:** Porosity formation is a common phenomenon in functionally graded beams due to various problems during the manufacturing process. This study uses the finite element method within the modified couple stress theory framework to investigate vertical displacements of porous functionally graded cantilever nano-beams under static loads. Power law theory is used for the material distribution of the functionally graded beams, and two models are used for the porosity distribution, namely even and uneven distribution. Within the scope of the study, the effect of porosity distribution models, porosity parameter, material length scale parameter from modified couple stress theory and power law parameter on the vertical displacements of non-porous and porous functionally graded cantilever nano-beams are presented in tables and figures. It is concluded that the material length scale parameter has an increasing effect on the stiffness of the nano-beam and that nano-beams with uneven porosity distribution behave more rigidly than those with even porosity distribution.

**Keywords:** Functionally graded material, Porosity, Nano-beam, Modified couple stress theory, Finite element method.

## 1. GİRİŞ

Katmanlardan oluşan kompozit yapılarda her bir katman arasındaki geçiş bölgesi, heterojen malzeme özellikleri sergiler. Bu heterojenlik, komşu katmanlar arasındaki arayüzde ani malzeme özelliklerindeki değişiklikler nedeniyle yüksek kesme gerilimlerinin oluşumuna yol açabilir. Bununla kıyaslandığında, Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) malzemeler, malzeme özelliklerinin hacim boyunca sürekli ve düzenli bir gradyan aracılığıyla değiştiği, kompozit

\* Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya Teknik Bilimler MYO, 43100, Kütahya, Türkiye.  
Sorumlu yazar: Uğur Kafkas (ugur.kafkas@dpu.edu.tr)

malzemelerin geliştirilmiş bir formudur (Akgöz ve Civalek, 2015). FD malzemeler, havacılık, inşaat mühendisliği, denizcilik, otomotiv, kimya, nano-elektronik ve nano-mekanik gibi birçok endüstride yaygın olarak kullanılan yeni kompozitler olarak sınıflandırılmıştır (Wang ve Zu, 2017). Nano/mikro boyuttan makro boyuta kadar FD malzemelerden üretilmiş kiriş, plak ve kabuk gibi elemanların titreşim (Akbaş, 2018; Avcar, 2019; Kahya & Turan, 2018; Turan & Kahya, 2018), burkulma (Eltaher ve diğ., 2014; Esen & Özmen, 2022; Turan & Kahya, 2021) ve eğilme (Saraçoğlu ve diğ., 2022; Zghal ve diğ., 2022) gibi mekanik özellikleri konusunda yapılan birçok çalışma literatürde yer almaktadır.

Nano-yapılar, geniş bir kullanım ve çalışma alanı için olağanüstü özelliklere sahiptir (Demir ve Civalek, 2017; Numanoglu ve diğ., 2018). Nano-kirişler, nano-teller, nano-kabuklar, nano-tüpler gibi çeşitli nano-yapılar mevcuttur. Nano-kirişler modern üretimin önemli bir parçasıdır. Teknolojinin gelişmesi ve nano-yapıların uygulamalarının artması, nano-kirişler üzerine yapılan araştırmaların artmasına neden olmuştur. Nano-kirişler; nano-sistemler, biyosensörler ve özellikle nano/mikro-elektro-mekanik sistemler (NEMS-MEMS) dahil olmak üzere çok geniş bir kullanım alanına sahiptir (Eltaher ve diğ., 2014). Bununla birlikte, küçük boyutları, bu yapıların davranışını anlamak söz konusu olduğunda bir zorluk teşkil etmektedir. Nano-yapıların mekanik özellikleri, deneysel, hesaplamalı ve teorik yaklaşımlar kullanılarak incelenebilir. Deneysel yöntemler, özel cihazlar ve yüksek düzeyde uzmanlık gerektirir; bu da yöntemi maliyetli bir seçenek haline getirir. Diğer yandan, hesaplama tabanlı yöntemler, sistemlerin karmaşıklığı nedeniyle sınırlamalara tabi olabilir ve hesaplamaların büyüklüğü, serbestlik derecelerinin sayısına bağlı olarak eksponansiyel olarak artar. Dolayısıyla, yeterliliği ve etkinliği nedeniyle, analitik modelleme sıklıkla tercih edilen bir yöntem olmaktadır (Kafkas ve diğ., 2023).

Nano-yapıların eğilme, titreşim, burkulma gibi mekanik özelliklerinin anlaşılmasında ve araştırılmasında klasik elastisite teorileri nano-yapıların küçük boyutlarından dolayı zorluk yaşamaktadır. Özellikle nano-yapıların boyutlarının atomlar düzeyine inmesiyle klasik teoriler mekanik davranışların anlaşılmasında yetersiz kalmaktadır (Uzun ve diğ., 2022, Yaylı, 2019). Bu durumun üstesinden gelmek ve küçük boyut etkisini hesaplamalara dahil etmek için araştırmacılar pek çok teori geliştirmiştir. Bunlardan bazıları Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi, şekil değiştirme gradyanı teorisi, gerilme çifti teorisi, yerel olmayan şekil değiştirme gradyanı teorisi ve değiştirilmiş gerilme çifti teorisi (DGÇT)'dir. Araştırmacılar bu teorileri kullanarak nano yapıların titreşim (Dastjerdi ve diğ., 2022, Karamanli ve Vo, 2022, Najafzadeh ve diğ., 2020, Uzun ve diğ., 2020), burkulma (Arefi ve Amabili, 2021, Daghigh ve diğ., 2020, Kafkas, Ünal ve diğ., 2023, Mercan ve diğ., 2017, Mollamahmutoğlu ve Mercan, 2019, Murmu ve Pradhan, 2009, Soltani ve diğ., 2021) ve eğilme (Akgöz ve Civalek, 2012, Arefi ve diğ., 2019, Civalek ve diğ., 2020, Dastjerdi ve Akgöz, 2019, Güçlü ve Artan, 2020) gibi mekanik özelliklerini incelemiştirler.

İlk olarak Yang ve diğ. (2002) tarafından geliştirilen DGÇT, malzeme uzunluk ölçeği parametresini yönetici denklemlere dahil ederek bu eksikliği giderir ve böylece kirişler (Akbaş, 2017, Ma ve diğ., 2008, Polat ve Bağdatlı, 2023), plaklar (Askari ve Tahani, 2015, Ma ve diğ., 2011, Tsiatas, 2009) ve kabuklar (Tadi Beni ve diğ., 2016) gibi mikro ve nano malzemelerde eğilme (Li ve Pan, 2015, Xia ve diğ., 2010), titreşim (Togun ve Bağdatlı, 2016, Uzun ve diğ., 2021, Uzun ve Yaylı, 2022a, Yaylı, 2018) ve burkulma (Akgöz ve Civalek, 2011, Jia ve diğ., 2018) gibi mekanik davranışların daha doğru bir şekilde temsil edilmesini sağlar. Gerilmenin yalnızca deformasyona direnen iç kuvvetlerin bir tezahürü olarak kabul edildiği ve bünye denklemleri aracılığıyla şekil değiştirme ile ilişkilendirildiği mekaniğinin sürekli ortam mekaniğinin aksine, DGÇT fomülasyona gerilme çifti tensörünü de dahil ederek teoriyi daha da geliştirir. (Tsiatas, 2009).

Üretim sürecindeki teknik ve infiltrasyon sorunları nedeniyle, gözenekler FD malzemelerde bir kusur olarak ortaya çıkabilmektedir. FD gözenekli yapıların biyomedikal mühendislik, enerji iletimi, yapı mühendisliği, havacılık teknolojisi, araç mühendisliği gibi pek çok farklı alanda çeşitli uygulamaları vardır (Chen ve diğ., 2023). Geniş uygulama alanlarına sahip olan FD gözenekli malzemelerin mekanik davranışlarını anlamak için kiriş, plak ve kabuk modelleri

birçok çalışmada incelenmiştir (Civalek ve diğ., 2023, Esen ve Özmen, 2022, Jalaei ve Civalek, 2019, Tran ve Le, 2023, Y. Q. Wang ve Zu, 2017). FD gözenekli kirişlerin mekanik davranışlarının sonlu elemanlar yöntemiyle araştırıldığı çalışmalar da literatürde mevcuttur (Akbaş, 2018, Alnujaie ve diğ., 2021, Fouda ve diğ., 2017, Hamed ve diğ., 2019, Turan, 2022, Zghal ve diğ., 2022).

Gözenekli FD konsol nano-kirişlerin statik yükler altında düşey yer değiştirmelerinin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak DGÇT'ye göre yapıldığı bu çalışmada iki tip gözeneklilik dağılımına (düzenli ve düzensiz) sahip nano-kirişler incelenmiştir. Nano yapıların modellenmesinde DGÇT sıklıkla kullanılmaktadır. Yazarın bilgisi dahilinde literatürde gözenekli FD nano-kirişler için DGÇT'yi sonlu elemanlar yöntemi ile birleştirerek inceleyen herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmanın amacı literatürdeki bu eksikliğin giderilmesidir. Çalışmada FD kirişlerin malzeme dağılımlarında kuvvet yasası teorisi kullanılmıştır. Gözenek dağılımı içinse düzenli ve düzensiz dağılım olmak üzere iki model kullanılmıştır. Daha sonra sonlu elemanlar yöntemine DGÇT'nin de dahil edilmesiyle oluşturulan çözüm yöntemi ile, statik yükler altında düşey yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Çalışma sonucunda gözeneksiz ve gözenekli FD nano-kirişlerin düşey yer değiştirmelerinde, gözenek dağılım modellerinin etkisi, gözeneklilik parametresinin etkisi, DGÇT'den gelen malzeme uzunluk ölçeği parametresinin etkisi ve kuvvet yasası parametresinin etkisi tablolar ve şekiller yardımıyla gösterilmiştir.

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

### 2.1. Değiştirilmiş Gerilme Çifti Teorisi

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerine karşılık gelen  $u_1$ ,  $u_2$  ve  $u_3$  yer değiştirmeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Akbaş, 2017, Reddy, 2007):

$$u_1 = u_0 - z \frac{dw(x)}{dx}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x) \quad (1)$$

Yukarıda belirtilen denklemlerde,  $w(x)$  değişkeni kirişin orta düzleminde bulunan herhangi bir noktadaki düşey yer değiştirmeyi ifade etmektedir. Ayrıca,  $\epsilon$  aşağıdaki şekilde tanımlanan şekil değiştirme tensörünü göstermektedir:

$$\epsilon_{ij} = \frac{(\partial u_{i,j} + \partial u_{j,i})}{2} \quad (2)$$

Denklem (1), Denklem (2)'de yerine yazıldığında, Euler-Bernoulli kiriş modeli için şekil değiştirme tensörünün sıfırdan farklı tek bileşeni şu şekilde elde edilir:

$$\epsilon_{11} = \frac{du_1}{dx} = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3)$$

DGÇT tek bir malzeme uzunluk ölçeği parametresi içerir. Bu teori, şekil değiştirme enerji yoğunluğunun hem şekil değiştirme hem de eğrilik tensörlerine bağlı olduğunu ileri sürmektedir. DGÇT'ye göre,  $V$  hacimli, doğrusal elastik izotropik malzemeli çubuk eleman için  $U$  şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Yang ve diğ., 2002):

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (4)$$

burada  $\sigma_{ij}$ ,  $m_{ij}$  ve  $\chi_{ij}$  sırasıyla klasik gerilme tensörü, simetrik gerilme çifti tensörü ve simetrik eğrilik tensörüne karşılık gelir ve şu şekilde ifade edilebilir (Yang ve diğ., 2002):

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (5)$$

$$m_{ij} = 2Gl^2 \chi_{ij} \quad (6)$$

$$\chi_{ij} = \frac{(\theta_{i,j} + \theta_{j,i})}{2} \quad (7)$$

Bu çerçevede,  $\lambda$  Lamé sabitini,  $G$  kayma modülünü,  $\delta$  Kronecker deltasını,  $l$  malzeme uzunluk ölçeği parametresini ve  $\theta$  dönme vektörünü temsil etmektedir. Lamé sabiti, kayma modülü ve dönme vektörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (8)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

$$\theta_i = \frac{e_{ijk}u_{k,j}}{2} \quad (10)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $E$  elastisite modülünü,  $\nu$  poisson oranını ve  $e_{ijk}$  permütasyon sembolünü ifade etmektedir. Dönme vektörünün sıfırdan farklı tek bileşeni, Denklem (1) ve (3)'ün Denklem (10)'da yerine konulmasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\theta_2 = \frac{1}{2}e_{231}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2}e_{213}\frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{dw}{dx} \quad (11)$$

Benzer şekilde, simetrik eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri ise, Denklem (11)'in Denklem (7)'de yerine konulmasıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\chi_{12} = \chi_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2} \quad (12)$$

Önceki denklemlerde türetilen bileşenler Denklem (5) ve (6)'da yerlerine yazıldığında ve ardından poisson oranı  $\nu$  göz ardı edildiğinde, aşağıdaki gibi ifade edilen klasik gerilme ve gerilme çifti tensörlerinin sıfırdan farklı elemanları şu şekilde gösterilebilir:

$$\sigma_{11} = E \left[ \frac{du_0}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] \quad (13)$$

$$m_{12} = m_{21} = -Gl^2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (14)$$

Şekil değiştirme enerjisi Denklem (2), (12), (13) ve (14)'ün Denklem (4)'te yerine konulmasıyla elde edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir (Uzun ve Yaylı, 2022b):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EA \left[ \frac{du_0}{dx} \right]^2 + (EI + Gal^2) \left[ \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right]^2 \right) dx \quad (15)$$

burada  $L$ ,  $A$  ve  $I$  sırasıyla kirişin uzunluğuna, kesit alanına ve atalet momentine karşılık gelmektedir.

## 2.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu Elemanlar Yöntemi, karmaşık bir yapının sonlu elemanlar olarak bilinen birbirine bağlı alt yapılardan oluşan bir mozaik halinde ayrıklaştırılmasına dayanır. Sonlu elemanlar yönteminin temel ilkelerinden klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisindeki özel uygulamasına geçiş, yöntemin doğasında var olan çok yönlülük sayesinde kolaylaşmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, bir kirişin enkesitinin eğilme sırasında düzlem kaldığı ve bu kesitlerin, kiriş eğilmeye maruz kaldığında normal gerilme ve şekil değiştirme yaşamayan eksen olan tarafsız eksene dik kaldığı varsayımına dayanır (Ike, 2019). Euler-Bernoulli kiriş teorisinde, düşey yer değiştirme (sehim) ve eksenel yer değiştirme, teorisinin kirişin kesitlerinin deformasyondan sonra düzlemsel ve tarafsız eksene normal kaldığı varsayımları nedeniyle ayrı ayrı ele alınır.

Noktasal yer değiştirmelerin ve dönmelerin belirlenmesini kolaylaştıran sonlu eleman çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir (Logan, 2011):

$$\mathbf{F} = \mathbf{Kd} \quad (16)$$

burada  $\mathbf{F}$  global düğüm kuvvet vektörünü,  $\mathbf{K}$  global rijitlik matrisini ve  $\mathbf{d}$  ise global düğüm yer değiştirme vektörünü ifade etmektedir.

Kirişin düşey yer değiştirilmesi için, iki düğüm noktalı, global yatay eksen ( $x$  eksen) ile  $\alpha$  açısı yapan ve düşey eksen de  $z$  eksen olan bir kiriş elemanı için şekil fonksiyonları olarak kübik Hermite polinomları kullanılmaktadır. Bu şekil fonksiyonları, her bir düğüm noktasında düşey yer değiştirme ve dönmeden oluşan iki serbestlik derecesine sahiptir. Kiriş elemanın uzunluğu boyunca düşey yer değiştirme fonksiyonu  $w(x)$  şu şekilde ifade edilebilir (Logan, 2011):

$$w(x) = N_1^w(x)w_1 + N_2^w(x)\theta_1 + N_3^w(x)w_2 + N_4^w(x)\theta_2 \quad (17)$$

burada  $w_1$  ve  $w_2$  düğüm noktalarındaki düşey yer değiştirmeler ve  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  ise düğüm noktalarındaki dönmelerdir.  $L_f$  sonlu elemanın uzunluğu olmak üzere, kübik Hermite şekil fonksiyonları şu şekilde tanımlanır (Logan, 2011, Numanoglu, 2021):

$$N^w = \begin{bmatrix} N_1^w \\ N_2^w \\ N_3^w \\ N_4^w \end{bmatrix} \quad (18)$$

burada

$$N_1^w = \frac{1}{L_f^3}(2x^3 - 3x^2L_f + L_f^3) \quad (19a)$$

$$N_2^w = \frac{1}{L_f^3}(x^3L_f - 2x^2L_f^2 + xL_f^3) \quad (19b)$$

$$N_3^w = \frac{1}{L_f^3}(-2x^3 + 3x^2L_f) \quad (19c)$$

$$N_4^w = \frac{1}{L_f^3}(x^3L_f - x^2L_f^2) \quad (19d)$$

Kirişin uzaması veya kısılması anlamına gelen aksenal yer değiştirme için, Euler-Bernoulli kiriş teorisi düzlem kesitlerin düzlem olarak kaldığını varsaydığından, iki düğümlü bir kiriş elemanı için şekil fonksiyonları doğrusaldır. Kiriş eleman uzunluğu boyunca aksenal yer değiştirme  $u_0(x)$ , aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Logan, 2011, Numanoglu, 2021):

$$u_0(x) = N_1^u(x)u_{01} + N_2^u(x)u_{02} \quad (20)$$

burada  $u_{01}$  ve  $u_{02}$  düğüm noktalarındaki aksenal yer değiştirmelerdir. Lineer şekil fonksiyonları ise şu şekilde gösterilebilir (Logan, 2011, Numanoglu, 2021):

$$N^u = \begin{bmatrix} N_1^u \\ N_2^u \end{bmatrix} \quad (21)$$

burada

$$N_1^u = 1 - \frac{x}{L_f} \quad (22a)$$

$$N_2^u = \frac{x}{L_f} \quad (22b)$$

Rijitlik matrisleri, Denklem (15)'te daha önce elde edilen şekil değiştirme enerjisi ifadesi ve Denklem (19) ve (22)'de tanımlanan şekil fonksiyonları aracılığıyla aşağıdaki gibi formüle edilebilir (Uzun ve Yaylı, 2022b):

$$K^u = \int_0^{L_f} AE \left( \frac{d\{N^u\}}{dx} \right)^T \frac{d\{N^u\}}{dx} dx \quad (23)$$

$$K^w = \int_0^{L_f} EI \left( \frac{d^2\{N^w\}}{dx^2} \right)^T \frac{d^2\{N^w\}}{dx^2} dx + \int_0^{L_f} GA l^2 \left( \frac{d^2\{N^w\}}{dx^2} \right)^T \frac{d^2\{N^w\}}{dx^2} dx \quad (24)$$

Lineer şekil fonksiyonları için,  $K^u$  eksenel şekil değişimi için  $2 \times 2$  ve  $K^w$  eğilme şekil değişimi için  $4 \times 4$  boyutlu rijitlik matrisleridir ve (23) ve (24) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$K^u = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & -\frac{1}{L_f} \\ -\frac{1}{L_f} & \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$K^w = \frac{EI}{L_f^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_f & -12 & 6L_f \\ 6L_f & 4L_f^2 & -6L_f & 2L_f^2 \\ -12 & -6L_f & 12 & -6L_f \\ 6L_f & 2L_f^2 & -6L_f & 4L_f^2 \end{bmatrix} + \frac{GAI^2}{L_f^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_f & -12 & 6L_f \\ 6L_f & 4L_f^2 & -6L_f & 2L_f^2 \\ -12 & -6L_f & 12 & -6L_f \\ 6L_f & 2L_f^2 & -6L_f & 4L_f^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

DGÇT'yi içeren bir nano boyutlu elemanın genel rijitlik matrisi, eksenel ve eğilme yönündeki şekil değiştirmelere ilişkin yerel rijitlik matrislerinin birleştirilmesiyle oluşturulur. Bu matris, Uzun ve Yaylı (2022b) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L_f} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L_f^3}(EI + GAI^2) & \frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) & 0 & -\frac{12}{L_f^3}(EI + GAI^2) & \frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) \\ 0 & \frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) & \frac{4}{L_f}(EI + GAI^2) & 0 & -\frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) & \frac{2}{L_f}(EI + GAI^2) \\ -\frac{AE}{L_f} & 0 & 0 & \frac{AE}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L_f^3}(EI + GAI^2) & -\frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) & 0 & \frac{12}{L_f^3}(EI + GAI^2) & -\frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) \\ 0 & \frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) & \frac{2}{L_f}(EI + GAI^2) & 0 & -\frac{6}{L_f^2}(EI + GAI^2) & \frac{4}{L_f}(EI + GAI^2) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Yukarıda tanımlanan matris hem eğilme hem de eksenel kuvvetlerin etkilerini kapsamaktadır. Çerçeve sistemlerin, birden fazla elemanın çeşitli açılarda birbirine bağlanmasıyla oluşturulan birleşik yapılar olduğu bilinmektedir. Yerel eksen takımı için çıkarılan bu rijitlik matrisi global eksen takımına göre dönüştürülerek çerçeve sistemlerde kullanılabilir. Yerel eksen takımı ile global eksen takımı arasındaki dönüşüm transformasyon matrisi ( $R$ ) kullanılarak gerçekleştirilir (Logan, 2011):

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$R$  için Denklem (28) ve  $\hat{K}$  için Denklem (27) kullanılarak,  $K^D = R^T \hat{K} R$  denkleminde yerine yazıldığında, DGÇT için  $K^D$  global eleman rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$K^D = \begin{bmatrix} K_{11}^D & K_{12}^D & K_{13}^D & K_{14}^D & K_{15}^D & K_{16}^D \\ K_{21}^D & K_{22}^D & K_{23}^D & K_{24}^D & K_{25}^D & K_{26}^D \\ K_{31}^D & K_{32}^D & K_{33}^D & K_{34}^D & K_{35}^D & K_{36}^D \\ K_{41}^D & K_{42}^D & K_{43}^D & K_{44}^D & K_{45}^D & K_{46}^D \\ K_{51}^D & K_{52}^D & K_{53}^D & K_{54}^D & K_{55}^D & K_{56}^D \\ K_{61}^D & K_{62}^D & K_{63}^D & K_{64}^D & K_{65}^D & K_{66}^D \end{bmatrix} \quad (29)$$

$K^D$  matrisinin bileşenleri,  $c = \cos \alpha$  ve  $s = \sin \alpha$  olmak üzere aşağıda belirtilmiştir (Uzun ve Yaylı, 2022b):

$$K_{11}^D = K_{44}^D = -K_{14}^D = -K_{41}^D = \frac{AE}{L_f} c^2 + \frac{12}{L_f^3} (EI + GAl^2) s^2 \quad (30a)$$

$$K_{12}^D = K_{21}^D = -K_{15}^D = -K_{51}^D = -K_{24}^D = -K_{42}^D = K_{45}^D = K_{54}^D = \frac{AE}{L_f} cs - \frac{12}{L_f^3} (EI + GAl^2) cs \quad (30b)$$

$$K_{13}^D = K_{31}^D = K_{16}^D = K_{61}^D = -K_{34}^D = -K_{43}^D = -K_{46}^D = -K_{64}^D = -\frac{6}{L_f^2} (EI + GAl^2) s \quad (30c)$$

$$K_{22}^D = K_{55}^D = -K_{25}^D = -K_{52}^D = \frac{AE}{L_f} s^2 + \frac{12}{L_f^3} (EI + GAl^2) c^2 \quad (30d)$$

$$K_{23}^D = K_{32}^D = K_{26}^D = K_{62}^D = -K_{35}^D = -K_{53}^D = -K_{56}^D = -K_{65}^D = \frac{6}{L_f^2} (EI + GAl^2) c \quad (30e)$$

$$K_{33}^D = K_{66}^D = \frac{4}{L_f} (EI + GAl^2) \quad (30f)$$

$$K_{36}^D = K_{63}^D = \frac{2}{L_f} (EI + GAl^2) \quad (30g)$$

DGÇT'nin rijitlik matrisine dahil edilmesi ile türetilen  $K^D$  matrisi, malzeme uzunluk ölçeği parametresi olan  $l$ 'yi formülasyonuna dahil ederek, mikro ve nano boyutlarda belirgin olan gerilme çifti ve eğrilik tensörlerini formülasyona dahil ederek klasik teoriden ayrılır. DGÇT ile dahil edilen boyut etkisi, nano yapı malzemelerin rijitlik özelliklerinin, özellikle iç malzeme uzunluk ölçeği yapının dış boyutlarıyla karşılaştırılabilir olduğunda, daha büyük bir doğrulukla hesaplanmasını sağlar.  $l$  sıfır alındığında teori, boyut etkilerinin ortadan kalktığı klasik elastisite modeline dönüşmekte ve rijitlik matrisi  $K^D$  daha basit bir hal almaktadır. Bu sayede, geliştirilen formülasyon hem boyut etkilerinin önemli olduğu nano ölçekli elemanlarda hem de klasik elastisitenin hakim olduğu makro ölçekli elemanlarda kullanılabilir.

### 2.3. Malzeme Özellikleri

Bu çalışmada, farklı gözeneklilik modellerine dayalı olarak nano boyutlu FD kirişin eğilme davranışı DGÇT'ye göre incelenmiştir. Homojen malzemelerin elastisite modülü ( $E$ ), kayma modülü ( $G$ ) ve Poisson oranı ( $\nu$ ) gibi malzeme özellikleri sabit değerlere sahiptir. FD kompozit malzemeler ise değişik malzeme katmanlarının kontrollü bir biçimde bir araya getirilmesiyle oluşturulurlar. Bu sebeple bu malzemelere ait mekanik özellikler sabit değerlere sahip değildir. FD kirişler, üstün mekanik dayanım özelliklerine sahip metal ve ısı kararlılığı yüksek seramik katmanların bir araya getirilmesiyle ortaya çıkan malzemelerdir. Bu heterojen yapının modellenmesi sürecinde, malzemenin kesit boyunca özellik değişimlerini tanımlamak amacıyla çeşitli matematiksel dağılımlar kullanılmaktadır. Bu kapsamda, malzeme özelliklerinin dağılımını ifade etmek için başvurulan temel modeller arasında, kuvvet yasası dağılımı (Reddy, 2022), sigmoid dağılım (Zahedinejad vd., 2020) ve üstel dağılım (Arshad vd., 2007) gibi çeşitli fonksiyonel ilişkilere dayanan dağılım modelleri bulunmaktadır. Bu makalede, FD nano-kiriş malzemesi için kuvvet yasası dağılımı kullanılmıştır.

Kuvvet yasası dağılımı modelinde, kirişin kesit yüksekliği olan  $z$  yönünde malzeme dağılımının değiştiği ve kiriş kesit üst noktasında tamamen seramik malzemedan yapıldığı ve  $z = 0,5h$  olduğu ve alt noktasında da tamamen metal malzemedan oluştuğu ve  $z = -0,5h$  olduğu varsayımıyla, FD nano-kiriş için seramik malzeme hacmi aşağıdaki gibi gösterilir (Eltaher ve diğ., 2012, Uzun ve Yaylı, 2024):

$$V_s = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (31)$$

burada  $V_s$  seramik bileşenin hacim oranını,  $h$  kesit yüksekliğini ve  $n$  de kuvvet yasası parametresini temsil etmektedir. Daha önce belirtildiği gibi FD nano-kiriş seramik ve metal

fazlarla oluşturulmuştur, bu çerçevede metal bileşenin hacim oranı  $V_m$  ise şu şekilde gösterilebilir (Eltaher ve diğ., 2012, Uzun ve Yayli, 2024):

$$V_m = 1 - V_s \quad (32)$$

Bu çerçevede, karışım kuralı uygulanarak aşağıdaki ifade tanımlanabilir (Eltaher ve diğ., 2012, Uzun ve Yayli, 2024):

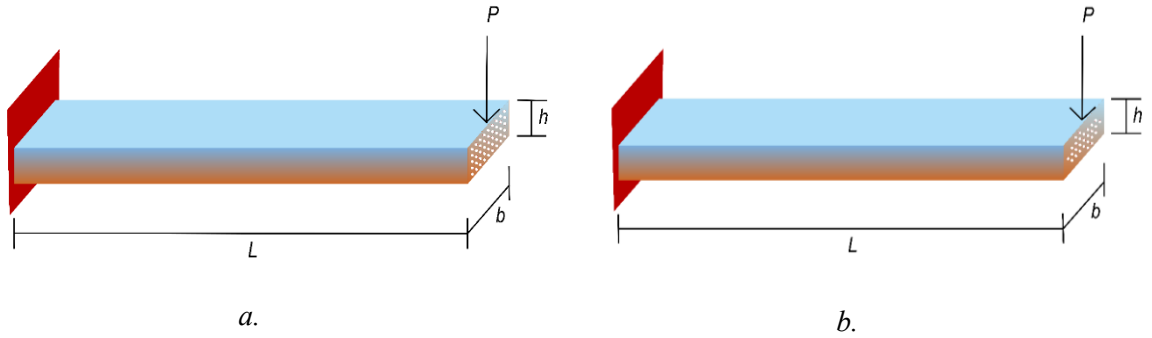
$$P(z) = P_s V_s + P_m (1 - V_s) \quad (33)$$

burada,  $P(z)$  gözeneksiz FD malzemenin herhangi bir mekanik özelliğini,  $P_s$  seramik malzemeye ait aynı mekanik özelliği ve  $P_m$  de metal malzemeye ait aynı mekanik özelliği ifade etmektedir. Bu çalışma, gözenekli ve gözeneksiz FD malzemelerden yapılmış Euler-Bernoulli kirişinin DGÇT'ye bağlı eğilme analizini incelemektedir. Bu nedenle, FD nano-malzeme için elastisite modülü ve kayma modülü tanımlanmalıdır. Yukarıdaki denklemler bağlamında, gözeneksiz durum için elastisite modülü ve kayma modülü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(z) = (E_s - E_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + E_m \quad (34)$$

$$G(z) = (G_s - G_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + G_m \quad (35)$$

Üretim sürecindeki teknik ve infiltrasyon sorunları nedeniyle, gözenekler FD kirişlerde bir kusur olarak ortaya çıkabilir ve bu da Şekil 1'de gösterildiği gibi düzenli ve düzensiz dağılımlar olmak üzere iki tür gözenekliliğe yol açar.



**Şekil 1:**

Gözenekli FD konsol kiriş

a. Düzenli gözenek dağılımına sahip b. Düzensiz gözenek dağılımına sahip

Wattanasakulpong ve Ungbhakorn (2014) çalışmalarında, FD kirişin  $E$ ,  $G$  ve  $\nu$  gibi malzeme özelliklerini,  $\psi$  gözeneklilik parametresi ile belirtilen gözeneklilik hacim oranının her bir bileşenin malzeme hacim oranını ortalama olarak etkilediği değiştirilmiş karışım kuralını kullanarak belirlemişlerdir. Denklem (33)'te verilen karışım kuralı dikkate alınarak düzenlenirse, düzenli ve düzensiz gözenekli FD kirişler için malzeme özellikleri aşağıdaki denklemler yardımıyla hesaplanabilir:

$$P(z) = (P_s - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + P_m - \left[ \frac{\psi}{2} (P_s + P_m) \right] \quad (36)$$

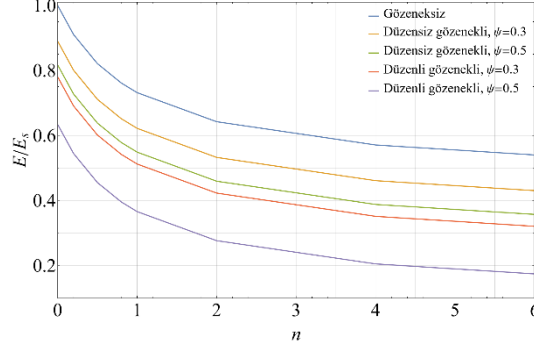
$$P(z) = (P_s - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n + P_m - \left[ \frac{\psi}{2} (P_s + P_m) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right] \quad (37)$$

burada  $\psi$  gözeneklilik parametresidir ve 0 ila 1 arasında sayısal değerler alır.

Malzeme özelliklerinin FD kirişin, gözenek durumuna bağlı olarak nasıl değiştiğinin bir örneği Şekil 2'de sunulmuştur. Burada kuvvet yasası parametresinin değişimine göre,  $(E/E_s)$ 'nin değişimi, gözeneksiz ve farklı gözenek durumları için gösterilmiştir. Şekil 2'de de görüldüğü gibi eğer  $n = 0$  ve gözeneksiz durum dikkate alınırsa, FD nano-kirişin tamamının seramik



malzemeden yapıldığı durum elde edilmektedir. Bu çerçevede  $n$  değeri 1'e eşit olduğu durumda da tam olarak eşit biçimde bir dağılım söz konusu olup, FD nano-kirişin yarısı seramik malzemeden, yarısı metal malzemeden teşekkül ettiği duruma işaret etmektedir.  $n$  değeri büyüdükçe de malzeme dağılımı metal malzeme baskın olmaktadır. Gözenekli durumlar söz konusu olduğunda ise görüldüğü gibi malzeme özellikleri, gözeneklilik parametresi arttıkça düşme eğilimindedir. Düşüş oranı, gözenek durumu düzenli olduğunda daha fazla olmaktadır.



Şekil 2:

FD malzemenin elastisite modülünün kuvvet yasası parametresine ve gözeneklilik durumuna göre değişimi

### 3. BULGULAR

Sayısal çalışmanın gösterildiği bu bölümde, gözenekli ve gözeneksiz FD nano-kirişler detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışmada, FD kuvvet yasası nano-kiriş için seramik ve metal bileşenler dikkate alınmıştır. Seramik bileşen olarak  $E_s = 151$  GPa,  $\nu_s = 0,3$  malzeme özelliklerine sahip Zirkonya ( $ZrO_2$ ) ve metal bileşen olarak da  $E_m = 70$  GPa,  $\nu_m = 0,3$  malzeme özelliklerine sahip Alüminyum (Al) kullanılmıştır (Talha ve Singh, 2010).  $h$ , enkesit yüksekliği olmak üzere, FD nano-kirişin uzunluğu  $20h$  ve  $b = 2h$  olarak alınmıştır. Konsol kiriş, serbest ucundan aşağı yönde düşey tekil  $P$  yükü ile yüklenmiştir ve  $P = 10$  nN olarak alınmıştır.

Öncelikle kullanılan modelin doğruluğunu ortaya koyabilmek için bir karşılaştırma çalışması sunulacaktır. Gözeneksiz dolu bir izotropik Euler-Bernoulli nano-kirişinin DGÇT'ye göre düşey yer değiştirme fonksiyonu Park ve Gao (2006) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$w(x) = \frac{Px^2(3L - x)}{6(EI + GAl^2)} \quad (38)$$

Karşılaştırma çalışması için Lam ve diğ. (2003) tarafından yapılan çalışma kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan malzeme özellikleri şu şekildedir:  $E = 1,44$  GPa,  $\nu = 0,38$  ve  $l = 17,6$   $\mu$ m. Burada da mikro-kiriş için uzunluk  $20h$   $\mu$ m,  $b = 2h$  ve  $P = 10$   $\mu$ N olarak alınmıştır. Sonlu eleman çözümünde her biri  $0,1L$  uzunluğunda olan 10 adet sonlu eleman kullanılmıştır. Karşılaştırma sonuçları Tablo 1'de verilmiştir. Karşılaştırma çalışmasından da görüleceği üzere kullanılan modelin sonuçları ile Park ve Gao (2006)'nın sonuçları birebir örtüşmektedir.

**Tablo 1. Konsol kiriş eksenî boyunca düşey yer değiştirmeler**

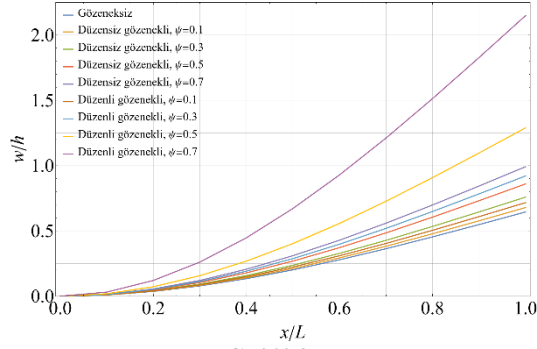
$x/L$	Park ve	Bu	Park ve	Bu	Park ve	Bu	Park ve	Bu
	Gao	alışma	Gao	alışma	Gao	alışma	Gao	alışma
	(2006)		(2006)		(2006)		(2006)	
	$h = 20 \mu\text{m}$		$h = 38 \mu\text{m}$		$h = 75 \mu\text{m}$		$h = 115 \mu\text{m}$	
	$w/h$		$w/h$		$w/h$		$w/h$	
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0092	0,0092	0,0058	0,0058	0,0023	0,0023	0,0011	0,0011
0,2	0,0356	0,0356	0,0223	0,0223	0,0089	0,0089	0,0043	0,0043
0,3	0,0773	0,0773	0,0484	0,0484	0,0194	0,0194	0,0093	0,0093
0,4	0,1323	0,1323	0,0828	0,0828	0,0331	0,0331	0,0159	0,0159
0,5	0,1988	0,1988	0,1244	0,1244	0,0498	0,0498	0,0238	0,0238
0,6	0,2748	0,2748	0,1720	0,1720	0,0688	0,0688	0,0329	0,0329
0,7	0,3584	0,3584	0,2244	0,2243	0,0898	0,0898	0,0430	0,0430
0,8	0,4478	0,4478	0,2803	0,2803	0,1122	0,1122	0,0537	0,0537
0,9	0,5410	0,5410	0,3386	0,3386	0,1355	0,1355	0,0649	0,0649
1	0,6361	0,6361	0,3981	0,3981	0,1594	0,1594	0,0763	0,0763

Karşılaştırma için kullanılan örnekten konsol kiriş serbest ucundan düşey tekil kuvvet ile yüklendiğinden, moment ifadesi lineer fonksiyon olmaktadır. Buna bağlı olarak da Denklem (38)'de verilen düşey yer değiştirme fonksiyonu üçüncü dereceden polinomdur. Sonlu eleman formülasyonu için seçilen iki düğüm noktalı ve her düğüm noktası iki serbestlikli elemana göre elde edilen düşey yer değiştirme fonksiyonu da üçüncü dereceden polinom olmaktadır. Bu bağlamda, düşey yer değiştirme için analitik çözüm ile sonlu eleman modeli birebir aynı sonucu vermektedir. Bu nedenle sonlu eleman modeli için elde edilen sonuç, kullanılan eleman sayısından bağımsız olmaktadır.

Karşılaştırma çalışmasının ardından konsol kiriş için bölümün başında verilen malzeme özellikleri kullanılarak DGÇT'ye göre gözenekli ve gözeneksiz FD nano-kiriş için yapılan çeşitli sayısal çözümlerin sonuçları bu bölümde sunulacaktır. Şekil 1'de görüldüğü gibi konsol kiriş serbest ucundan  $P = 10 \text{ nN}$  düşey tekil kuvvetle yüklenmiş,  $h = 20 \text{ nm}$  olan konsol kiriş için eksenî boyunca farklı gözeneklilik durumlarında düşey yer değiştirmelerin kirişin kesit yüksekliğine oranı Tablo 2 ve Şekil 3'te verilmiştir. Burada  $l = h$  ve  $n = 1$  olarak alınmiştır.

**Tablo 2. Konsol kiriş eksenî boyunca farklı gözeneklilik durumları için düşey yer değiştirmeler**

$x/L$	Gözeneksiz	Düzenli Gözenekli				Düzensiz Gözenekli			
		$\psi$							
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,1	0,3	0,5	0,7
		$w/h$							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,036	0,040	0,052	0,072	0,120	0,038	0,042	0,048	0,056
0,4	0,134	0,149	0,192	0,268	0,447	0,141	0,158	0,179	0,206
0,6	0,278	0,309	0,398	0,557	0,928	0,293	0,328	0,371	0,428
0,8	0,454	0,504	0,648	0,908	1,513	0,478	0,534	0,605	0,698
1	0,645	0,716	0,921	1,289	2,149	0,679	0,758	0,860	0,992



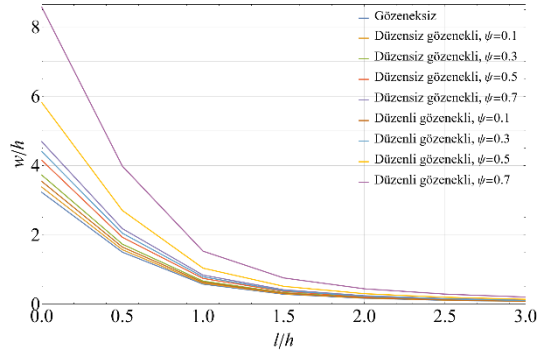
Şekil 3:

Konsol giriş ekseninde farklı gözeneklilik durumları için düşey yer değiştirmeler

Tablo 2 ve Şekil 3 incelendiğinde, en düşük düşey yer değiştirme değerleri kirişin gözeneksiz olduğu durumda gerçekleşmektedir. Gözeneklilik parametresi arttıkça düşey yer değiştirmeler de artmaktadır. Gözeneklerin düzenli halde bulunmasının da kirişin düşey yer değiştirme değerini arttırdığı yani kirişi düzensiz hale göre daha zayıflattığı görülmektedir. Gözeneklerin düzensiz olduğu ve  $\psi = 0,5$  olduğu durumda bile düzenli gözenekli ve  $\psi = 0,3$  olduğu durumdan daha düşük düşey yer değiştirme değerleri söz konusudur. Elbette burada unutulmaması gereken önemli bir nokta da DGÇT'ye göre uzunluk ölçeği parametresinin kirişin kesit yüksekliği ile eşit olarak alındığı ve kuvvet yasası parametresinin de 1 olarak alındığıdır. Uzunluk ölçeği parametresinin etkisinin ortaya koyulması adına Tablo 3-4 ve Şekil 4-5 sunulmuştur.

**Tablo 3. Farklı uzunluk ölçeği parametreleri için en büyük yer değiştirmeler ( $n = 0,5$ )**

$l/h$	Gözeneksiz	Düzenli Gözenekli				Düzensiz Gözenekli			
		$\psi$							
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,1	0,3	0,5	0,7
		$w/h$							
0	3,226	3,541	4,403	5,818	8,574	3,376	3,724	4,150	4,688
0,5	1,498	1,644	2,044	2,701	3,981	1,568	1,729	1,927	2,177
1	0,574	0,631	0,784	1,036	1,527	0,601	0,663	0,739	0,835
1,5	0,283	0,311	0,387	0,511	0,753	0,297	0,327	0,365	0,412
2	0,166	0,182	0,226	0,299	0,441	0,173	0,191	0,213	0,241
2,5	0,108	0,119	0,148	0,195	0,287	0,113	0,125	0,139	0,157
3	0,076	0,083	0,104	0,137	0,202	0,079	0,088	0,098	0,110

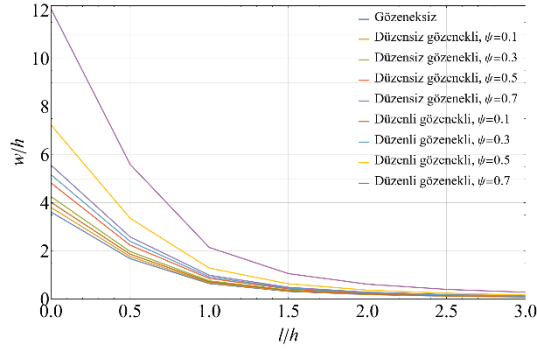


Şekil 4:

Farklı uzunluk ölçeği parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler ( $n=0,5$ )

**Tablo 4. Farklı uzunluk ölçeği parametreleri için en büyük yer değiştirmeler ( $n = 1$ )**

$l/h$	Gözeneksiz	Düzenli Gözenekli				Düzensiz Gözenekli			
		$\psi$							
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,1	0,3	0,5	0,7
		$w/h$							
0	3,620	4,022	5,171	7,240	12,066	3,810	4,259	4,827	5,569
0,5	1,681	1,867	2,401	3,361	5,602	1,769	1,977	2,241	2,586
1	0,645	0,716	0,921	1,289	2,149	0,679	0,758	0,860	0,992
1,5	0,318	0,353	0,454	0,636	1,060	0,335	0,374	0,424	0,489
2	0,186	0,207	0,266	0,372	0,620	0,196	0,219	0,248	0,286
2,5	0,121	0,135	0,173	0,243	0,404	0,128	0,143	0,162	0,187
3	0,085	0,095	0,122	0,170	0,284	0,090	0,100	0,113	0,131

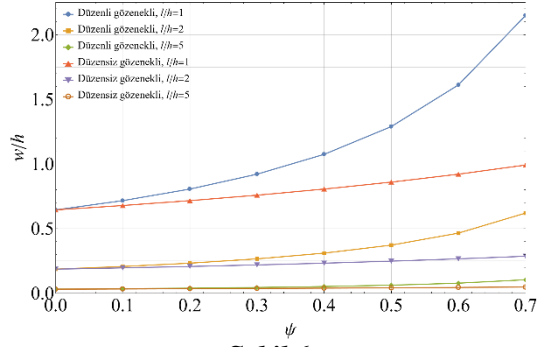
**Şekil 5:**

*Farklı uzunluk ölçeği parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler ( $n=1$ )*

Uzunluk ölçeği parametresinin artmasıyla, kirişin eğilme rijitliğinin arttığı Tablo 3-4 ve Şekil 4-5'te görülmektedir. Düzensiz gözenekli kirişlerin düzenli gözenekli kirişlere göre daha az düşey yer değiştirme yaptıkları bir kez daha ortaya çıkmıştır.  $l$  değeri arttıkça düşey yer değiştirmeler düşüş göstermektedir.  $l$ 'nin dikkate alınan değerlerinde, yine gözeneklerin düzensiz olduğu ve  $\psi = 0,5$  olduğu durumdaki düşey yer değiştirme değerleri, düzenli gözenekli ve  $\psi = 0,3$  olduğu durumdan daha düşüktür. Bu çerçevede DGÇT'nin uzunluk ölçeği parametresinin niteliksel davranışı değiştirmedeği anlaşılmaktadır. Farklı  $l$  değerlerinde ve farklı gözeneklilik durumlarında nano-kirişlerin gözeneklilik parametresinin etkilerini daha anlayabilmek için Tablo 5 ve Şekil 6 sunulmuştur.

**Tablo 5. Farklı gözeneklilik parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler ( $n = 1$ )**

$\psi$	Düzenli Gözenekli			Düzensiz Gözenekli		
	$l/h = 1$	$l/h = 2$	$l/h = 5$	$l/h = 1$	$l/h = 2$	$l/h = 5$
	$w/h$					
0	0,64464	0,18600	0,03110	0,64464	0,18600	0,03110
0,1	0,71627	0,20667	0,03456	0,67857	0,19579	0,03274
0,2	0,80580	0,23250	0,03888	0,71627	0,20667	0,03456
0,3	0,92092	0,26572	0,04443	0,75840	0,21883	0,03659
0,4	1,07440	0,31001	0,05184	0,80580	0,23250	0,03888
0,5	1,28928	0,37201	0,06221	0,85952	0,24800	0,04147
0,6	1,61160	0,46501	0,07776	0,92092	0,26572	0,04443
0,7	2,14880	0,62001	0,10368	0,99176	0,28616	0,04785

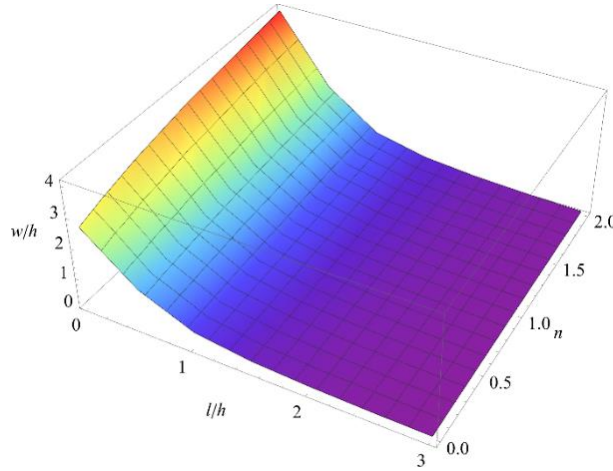


**Şekil 6:**

*Farklı gözeneklilik parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler (n=1)*

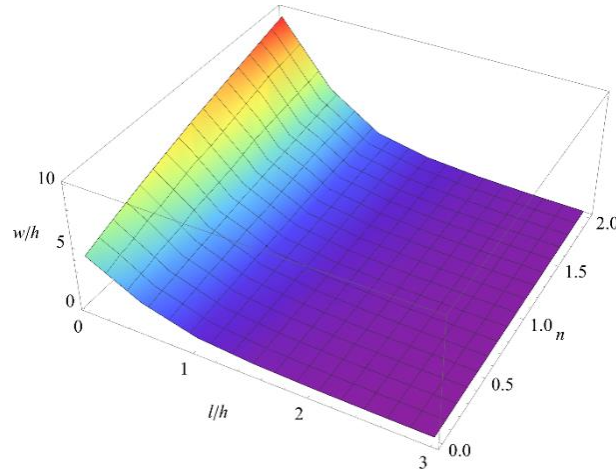
Tablo 5 ve Şekil 6'ya bakıldığında, öncelikle  $\psi = 0$  ile gözeneksiz durum belirtilmektedir.  $l/h = 5$  durumunda özellikle düzenli gözenekli nano-kirişin en büyük yer değiştirmeleri neredeyse bir doğruya yakın haldedir, buradan da  $l$  değerinin nano-kiriş üzerinde güçlendirici bir etkisi olduğu tekrar ortaya çıkmaktadır. Düzenli ve düzensiz gözenek dağılımına sahip nano-kirişlere bakıldığında ise  $\psi$  değeri arttıkça, düzenli gözenek dağılımına sahip nano-kirişlerin daha fazla düşey yer değiştirme gerçekleştirdiği görülmektedir. Özellikle yüksek  $\psi$  değerlerinde aradaki makasın açıklığı artmaktadır. Fakat bu fark  $l$  değerleri büyüdükçe gitgide azalmaktadır.

Son olarak da DGÇT'ye göre uzunluk parametresi ve kuvvet yasası parametresinin nano-kirişin düşey yer değiştirme davranışına etkisinin daha net biçimde gösterilebilmesi için Şekil 7-9 sunulmuştur.



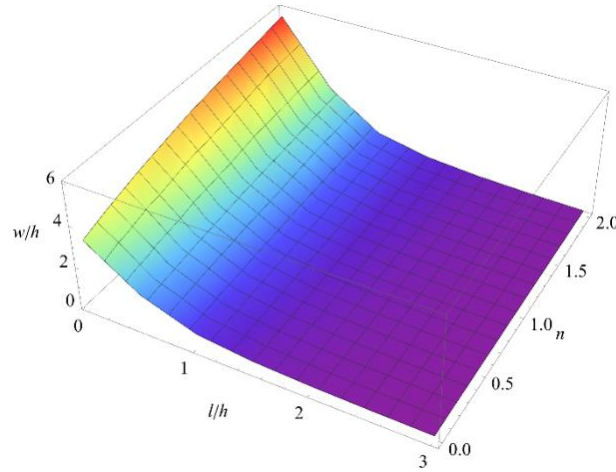
**Şekil 7:**

*Farklı uzunluk ölçeği ve kuvvet yasası parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler (Gözeneksiz)*



**Şekil 8:**

*Farklı uzunluk ölçeği ve kuvvet yasası parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler (Düzenli Gözenekli  $\psi = 0,5$ )*



**Şekil 9:**

*Farklı uzunluk ölçeği ve kuvvet yasası parametreleri için en büyük düşey yer değiştirmeler (Düzensiz Gözenekli  $\psi = 0,5$ )*

Öncelikle gözeneksiz durum için bakıldığında, en büyük düşey yer değiştirmelerin  $l/h$  oranının en düşük olduğu durumlarda gerçekleştiği görülmektedir. Özellikle  $l$  değerlerinin düşük olduğu ve  $n$  değerlerinin büyüdüğü durumlarda bu eğilim çok daha belirgin hale gelmektedir. Aynı eğilim hem gözeneksiz hem de gözenekli nano-kirişler için söz konusudur.  $l$  değeri arttıkça ve  $n$  değeri düştükçe yer değiştirme değerleri azalmaktadır. Düzensiz gözenek dağılımına sahip nano-kirişlerin düzenli dağılıma sahip nano-kirişlerden daha düşük düşey yer değiştirme yaptıkları da Şekil 8 ve 9'dan görülmektedir. Özellikle düzenli gözenek dağılımına sahip nano-kirişlerin  $l/h$  oranının düşük olduğu değerlerde,  $n$  değerinin artmasından kaynaklı düşey yer değiştirmelerdeki artış çok daha belirgindir.

#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada; FD gözenekli konsol nano-kirişlerin statik yükler altında düşey yer değiştirmeleri, sonlu elemanlar yöntemi kullanarak DGÇT ve Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre incelenmiştir. Klasik sürekli ortam teorilerinden farklı olarak DGÇT, malzeme uzunluk ölçeği parametresi ile boyut etkisini göz önüne almaktadır.

İstenilmeyen bir durum olsa bile gözeneklilik oluşumu üretim sürecinin kaçınılmaz bir sonucudur. Bu nedenle formülasyona dahil edilmesi önemlidir. Düzenli ve düzensiz tipteki iki farklı gözeneklilik dağılımı için sonlu eleman formülasyonu türetilmiştir. Oluşturulan sonlu eleman modeli için, literatürden seçilen bir örnekle karşılaştırma çalışması yapılmış ve modelin doğru sonuç verdiği gösterilmiştir.

Gözenek dağılım tipinin, gözeneklilik parametresinin, malzeme uzunluk ölçeği parametresinin ve kuvvet yasası parametresinin düşey yer değiştirme üzerindeki etkisi incelenmiştir. Gözeneklilik parametresinin sıfır alınması durumunda gözeneksiz FD nano-kirşlere ait sonuçlar elde edilmektedir.

Çalışma sonucunda;

- Malzeme uzunluk ölçeği parametresinin, nano-kirşin eğilme rijitliğini artırıcı bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Bu parametrenin değeri arttıkça düşey yer değiştirmeler hem gözeneksiz hem de gözenekli durumda azalmaktadır. Bu durum, Denklem (38)'de  $l$  parametresinin payda da yer alması ile açıklanabilir.

- Sayısal örneklerde kuvvet yasası parametresinin artması ile eğilme rijitliğinin azaldığı ortaya konulmuştur. Bunun nedeni, sayısal örneklerde kullanılan seramik malzemenin elastisite modülünün metal malzeme elastisite modülünden büyük olması ve bu parametrenin artması ile seramik malzemenin tüm malzemeye göre oranının azalmasıdır.

- Gözeneklilik parametresinin artması ile düşey yer değiştirmeler de artmaktadır.

- Gözenek dağılımı düzensiz hale geldiğinde ise düşey yer değiştirmeler azalmaktadır. Azalmanın sebebi, Denklem (36)'dan elde edilen malzeme mekanik özelliklerinin Denklem (37)'den elde edilene göre daha büyük olması (bkz. Şekil 2) ve malzeme mekanik özelliklerinin Denklem (38)'de payda kısmında yer almasıdır.

- Seçilen bir gözeneklilik parametresi için en büyük sehim değerine; malzeme uzunluk ölçeği parametresinin sıfır, kuvvet yasası parametresinin ise en büyük değeri alındığı zaman ulaşılmaktadır.

## ÇIKAR ÇATIŞMASI

Yazar, bilinen herhangi bir çıkar çatışması veya herhangi bir kurum/kuruluş ya da kişi ile ortak çıkar bulunmadığını onaylamaktadırlar.

## YAZAR KATKISI

Çalışmanın tüm süreçleri yazar Uğur Kafkas tarafından yürütülmüştür.

## KAYNAKLAR

1. Akbaş, Ş. D. (2017). Static, Vibration, and Buckling Analysis of Nanobeams. Nanomechanics. InTech. <https://doi.org/10.5772/67973>
2. Akbaş, Ş. D. (2018). Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams. Composite Structures, 186, 293-302. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.013>
3. Akgöz, B. ve Civalek, Ö. (2011). Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams. International Journal of Engineering Science, 49(11), 1268-1280. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.12.009>
4. Akgöz, B., ve Civalek, Ö. (2012). Investigation of Size Effects on Static Response of Single-Walled Carbon Nanotubes Based on Strain Gradient Elasticity. International Journal of Computational Methods, 09(02), 1240032. <https://doi.org/10.1142/S0219876212400324>

5. Akgöz, B. ve Civalek, Ö. (2015). Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity. *Composite Structures*, 134, 294-301. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.095>
6. Alnujaie, A., Akbas, S. D., Eltahir, M. A. ve Assie, A. E. (2021). Damped forced vibration analysis of layered functionally graded thick beams with porosity. *Smart Structures and Systems*, 27(4), 679-689. <https://doi.org/https://doi.org/10.12989/sss.2021.27.4.669>
7. Arefi, M., ve Amabili, M. (2021). A comprehensive electro-magneto-elastic buckling and bending analyses of three-layered doubly curved nanoshell, based on nonlocal three-dimensional theory. *Composite Structures*, 257, 113100. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113100>
8. Arefi, M., Mohammad-Rezaei Bidgoli, E., Dimitri, R., Baccocchi, M. ve Tornabene, F. (2019). Nonlocal bending analysis of curved nanobeams reinforced by graphene nanoplatelets. *Composites Part B: Engineering*, 166, 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.092>
9. Arshad, S. H., Naeem, M. N., ve Sultana, N. (2007). Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 221(12), 1483-1495. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES738>
10. Askari, A. R. ve Tahani, M. (2015). Analytical determination of size-dependent natural frequencies of fully clamped rectangular microplates based on the modified couple stress theory. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(5), 2135-2145. <https://doi.org/10.1007/s12206-015-0435-0>
11. Avcar, M. (2019). Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.6.603>
12. Chen, D., Gao, K., Yang, J. ve Zhang, L. (2023). Functionally graded porous structures: Analyses, performances, and applications – A Review. *Thin-Walled Structures*, 191, 111046. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111046>
13. Civalek, Ö., Ersoy, H., Uzun, B. ve Yaylı, M. Ö. (2023). Dynamics of a FG porous microbeam with metal foam under deformable boundaries. *Acta Mechanica*, 234(11), 5385-5404. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03663-7>
14. Civalek, Ö., Uzun, B., ve Yaylı, M. Ö. (2020). Frequency, bending and buckling loads of nanobeams with different cross sections. *Advances in Nano Research*, 9(2), 91-104. <https://doi.org/10.12989/anr.2020.9.2.091>
15. Daghigh, H., Daghigh, V., Milani, A., Tannant, D., Lacy, T. E. ve Reddy, J. N. (2020). Nonlocal bending and buckling of agglomerated CNT-Reinforced composite nanoplates. *Composites Part B: Engineering*, 183, 107716. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107716>
16. Dastjerdi, S., ve Akgöz, B. (2019). On the statics of fullerene structures. *International Journal of Engineering Science*, 142, 125-144. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.002>
17. Dastjerdi, S., Malikan, M., Akgöz, B., Civalek, Ö., Wiczenbach, T. ve Eremeyev, V. A. (2022). On the deformation and frequency analyses of SARS-CoV-2 at nanoscale. *International Journal of Engineering Science*, 170, 103604. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2021.103604>



18. Demir, Ç. ve Civalek, Ö. (2017). On the analysis of microbeams. *International Journal of Engineering Science*, 121, 14-33. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.016>
19. Eltaher, M. A., Emam, S. A. ve Mahmoud, F. F. (2012). Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 218(14), 7406-7420. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.12.090>
20. Eltaher, M. A., Khairy, A., Sadoun, A. M. ve Omar, F.-A. (2014). Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 229, 283-295. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.072>
21. Esen, I. ve Özmen, R. (2022). Thermal vibration and buckling of magneto-electro-elastic functionally graded porous nanoplates using nonlocal strain gradient elasticity. *Composite Structures*, 296, 115878. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115878>
22. Fouda, N., El-Midany, T. ve Sadoun, A. M. (2017). Bending, buckling and vibration of a functionally graded porous beam using finite elements. *Journal of applied and computational mechanics*, 3(4), 274-282. <https://doi.org/10.22055/JACM.2017.21924.1121>
23. Güçlü, G., ve Artan, R. (2020). Large elastic deflections of bars based on nonlocal elasticity. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 100(4), e201900108. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900108>
24. Hamed, M. A., Sadoun, A. M. ve Eltaher, M. A. (2019). Effects of porosity models on static behavior of size dependent functionally graded beam. *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 71(1), 89-98. <https://doi.org/10.12989/sem.2019.71.1.089>
25. Ike, C. C. (2019). Point Collocation Method for the Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Winkler Foundation. *International Journal of Darshan Institute on Engineering Research and Emerging Technologies*, 7(2), 1. <https://doi.org/10.32692/IJDI-ERET/7.2.2018.1801>
26. Jalaei, M. H. ve Civalek, Ö. (2019). On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, 143, 14-32. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.013>
27. Jia, X. L., Ke, L. L., Zhong, X. L., Sun, Y., Yang, J. ve Kitipornchai, S. (2018). Thermal-mechanical-electrical buckling behavior of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory. *Composite Structures*, 202, 625-634. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.025>
28. Kafkas, U., Uzun, B., Yaylı, M. Ö., ve Güçlü, G. (2023). Thermal vibration of perforated nanobeams with deformable boundary conditions via nonlocal strain gradient theory. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 78(8). <https://doi.org/10.1515/zna-2023-0088>
29. Kafkas, U., Ünal, Y., Yaylı, M. Ö., ve Uzun, B. (2023). Buckling analysis of perforated nano/microbeams with deformable boundary conditions via nonlocal strain gradient elasticity. *Advances in Nano Research*, 15(4), 339-353. <https://doi.org/10.12989/anr.2023.15.4.339>
30. Kahya, V. ve Turan, M. (2018). Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element. *Composites Part B: Engineering*, 146, 198-212. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.04.011>
31. Karamanli, A., ve Vo, T. P. (2022). Finite element model for free vibration analysis of curved zigzag nanobeams. *Composite Structures*, 282, 115097. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2021.115097>

32. Lam, D. C. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J. ve Tong, P. (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8), 1477-1508. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00053-X)
33. Li, Y. S. ve Pan, E. (2015). Static bending and free vibration of a functionally graded piezoelectric microplate based on the modified couple-stress theory. *International Journal of Engineering Science*, 97, 40-59. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.08.009>
34. Logan, D. L. (2011). *A first course in the finite element method* (4. bs). Thomson.
35. Ma, H., Gao, X. ve Reddy, J. (2008). A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(12), 3379-3391. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.09.007>
36. Ma, H. M., Gao, X.-L. ve Reddy, J. N. (2011). A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. *Acta Mechanica*, 220(1-4), 217-235. <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0480-4>
37. Mercan, K., Numanoglu, H. M., Akgöz, B., Demir, C. ve Civalek, Ö. (2017). Higher-order continuum theories for buckling response of silicon carbide nanowires (SiCNWs) on elastic matrix. *Archive of Applied Mechanics*, 87(11), 1797-1814. <https://doi.org/10.1007/s00419-017-1288-z>
38. Mollamahmutoğlu, Ç., ve Mercan, A. (2019). A novel functional and mixed finite element analysis of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory. *Composite Structures*, 223, 110950. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.110950>
39. Murmu, T., ve Pradhan, S. C. (2009). Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(7), 1232-1239. <https://doi.org/10.1016/J.PHYSE.2009.02.004>
40. Najafzadeh, M., Adeli, M. M., Zarezadeh, E. ve Hadi, A. (2020). Torsional vibration of the porous nanotube with an arbitrary cross-section based on couple stress theory under magnetic field. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1733602>
41. Numanoğlu, H. M. (2021). Examination of How Size-Effect Modifies the Stiffness and Mass Matrices of Nanotrusses/Nanoframes. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(4), 155-165. <https://doi.org/10.24107/ijeas.1036574>
42. Numanoğlu, H. M., Akgöz, B. ve Civalek, Ö. (2018). On dynamic analysis of nanorods. *International Journal of Engineering Science*, 130, 33-50. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.001>
43. Park, S. K. ve Gao, X.-L. (2006). Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16(11), 2355-2359. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/16/11/015>
44. Polat, S. C. ve Bağdatlı, S. M. (2023). Investigation of stepped microbeam vibration motions according to modified couple stress theory. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 78(5), 379-393. <https://doi.org/10.1515/zna-2022-0286>
45. Reddy, J. N. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8), 288-307. <https://doi.org/10.1016/J.IJENGSCI.2007.04.004>
46. Reddy, J. N. (2022). *Theories and Analyses of Beams and Axisymmetric Circular Plates*. Boca Raton: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781003240846>

47. Saraçoğlu, M. H., Güçlü, G. ve Uslu, F. (2022). Deflection analysis of functionally graded equal strength beams. *European Mechanical Science*, 6(2), 119-128. <https://doi.org/10.26701/ems.1015629>
48. Soltani, M., Atoufi, F., Mohri, F., Dimitri, R. ve Tornabene, F. (2021). Nonlocal elasticity theory for lateral stability analysis of tapered thin-walled nanobeams with axially varying materials. *Thin-Walled Structures*, 159, 107268. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107268>
49. Tadi Beni, Y., Mehralian, F. ve Zeighampour, H. (2016). The modified couple stress functionally graded cylindrical thin shell formulation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(7), 791-801. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1029167>
50. Talha, M. ve Singh, B. N. (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 3991-4011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.034>
51. Togun, N. ve Bağdatlı, S. M. (2016). Size dependent nonlinear vibration of the tensioned nanobeam based on the modified couple stress theory. *Composites Part B: Engineering*, 97, 255-262. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.074>
52. Tran, T. T. ve Le, P. B. (2023). Nonlocal dynamic response analysis of functionally graded porous L-shape nanoplates resting on elastic foundation using finite element formulation. *Engineering with Computers*, 39(1), 809-825. <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01679-6>
53. Tsiatas, G. C. (2009). A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory. *International Journal of Solids and Structures*, 46(13), 2757-2764. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.03.004>
54. Turan, M. (2022). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Gözenekli Kirişlerin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Statik Analizi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 10(4), 1362-1374. <https://doi.org/10.21923/jesd.1134356>
55. Turan, M., ve Kahya, V. (2018). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 8(2), 119-130. <https://doi.org/10.31466/kfbd.453833>
56. Turan, M., ve Kahya, V. (2021). Fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin Navier yöntemiyle serbest titreşim ve burkulma analizi. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 36(2), 743-758. <https://doi.org/10.17341/gazimmfd.599928>
57. Uzun, B., Kafkas, U., Deliktaş, B. ve Yaylı, M. Ö. (2022). Size-Dependent Vibration of Porous Bishop Nanorod with Arbitrary Boundary Conditions and Nonlocal Elasticity Effects. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00610-z>
58. Uzun, B., Kafkas, U. ve Yaylı, M. Ö. (2020). Axial dynamic analysis of a Bishop nanorod with arbitrary boundary conditions. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 100(12), e202000039. <https://doi.org/10.1002/ZAMM.202000039>
59. Uzun, B., Kafkas, U. ve Yaylı, M. Ö. (2021). Free vibration analysis of nanotube based sensors including rotary inertia based on the Rayleigh beam and modified couple stress theories. *Microsystem Technologies*, 27(5), 1913-1923. <https://doi.org/10.1007/s00542-020-04961-z>
60. Uzun, B. ve Yaylı, M. Ö. (2022a). Porosity dependent torsional vibrations of restrained FG nanotubes using modified couple stress theory. *Materials Today Communications*, 32, 103969. <https://doi.org/10.1016/J.MTCOMM.2022.103969>

61. Uzun, B. ve Yaylı, M. Ö. (2022b). A Finite Element Solution for Bending Analysis of a Nanoframe using Modified Couple Stress Theory. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 14(1), 1-14. <https://doi.org/10.24107/ijeas.1064690>
62. Uzun, B. ve Yaylı, M. Ö. (2024). Rotary inertia effect on dynamic analysis of embedded FG porous nanobeams under deformable boundary conditions with the effect of neutral axis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 46(2), 111. <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04605-z>
63. Wang, L. (2010). Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes. *Journal of Fluids and Structures*, 26(4), 675-684. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.02.005>
64. Wang, Y. Q. ve Zu, J. W. (2017). Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment. *Aerospace Science and Technology*, 69, 550-562. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.07.023>
65. Wattanasakulpong, N. ve Ungbhakorn, V. (2014). Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerospace Science and Technology*, 32(1), 111-120. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002>
66. Xia, W., Wang, L. ve Yin, L. (2010). Nonlinear non-classical microscale beams: Static bending, postbuckling and free vibration. *International Journal of Engineering Science*, 48(12), 2044-2053. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.04.010>
67. Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C. ve Tong, P. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10), 2731-2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
68. Yaylı, M. Ö. (2018). Torsional vibrations of restrained nanotubes using modified couple stress theory. *Microsystem Technologies*, 24(8), 3425-3435. <https://doi.org/10.1007/s00542-018-3735-3>
69. Yaylı, M. Ö. (2019). Stability analysis of a rotationally restrained microbar embedded in an elastic matrix using strain gradient elasticity. *Curved and Layered Structures*, 6(1), 1-10. <https://doi.org/10.1515/cls-2019-0001>
70. Zahedinejad, P., Zhang, C., Zhang, H., ve Ju, S. (2020). A Comprehensive Review on Vibration Analysis of Functionally Graded Beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 20(04), 2030002. <https://doi.org/10.1142/S0219455420300025>
71. Zghal, S., Ataoui, D. ve Dammak, F. (2022). Static bending analysis of beams made of functionally graded porous materials. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(3), 1012-1029. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1748053>