

Mikrogermeli Bir Akışkanın Halka Kesitli Kanalda Genelleştirilmiş Couette Akımına ait Analitik Çözümler

Mehmet Şirin DEMİR^{1*}

¹İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 34320, İstanbul

¹<https://orcid.org/0000-0002-3965-4760>

*Sorumlu yazar: demirms@iuc.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihiçesi:

Geliş tarihi: 21.04.2024

Kabul tarihi:21.07.2024

Online Yayınlanma: 15.01.2025

Anahtar Kelimeler:

Mikrogermeli akışkan
Genelleştirilmiş Couette akışı
Analitik çözüm
Eş eksenli iki silindir

ÖZ

Klasik sürekli ortamlar mekaniğinde akışkanı oluşturan parçacıkların maddesel nokta olduğu varsayılmaktadır. Ancak, karakteristik uzunluğun çok küçük olduğu mikrokanallarda ve/veya parçacık boyutlarının büyük olduğu, polimer eriyikler, süspansiyonlar ve biyolojik akışkanlar gibi birçok uygulamada bu varsayım geçerliliğini yitirmektedir. Bu durumlarda akışkan parçacıklarının dönmesi ve deformasyonu gibi mikro hareketleri önem kazanmakta ve akışkanın makro hareketine katkı sağlamaktadır. Bu çalışmada, mikrogermeli bir akışkanın alan denklemleri halka kesitli bir kanalda, genelleştirilmiş Couette akımı için çözülmüş ve hız, mikro açısız hız ve mikro genleme alanlarına ait analitik çözümler elde edilmiştir. Hız, mikro açısız hız ve mikro genleme alanları için elde edilen çözümler; parametrelerin farklı değerlerinde grafik olarak sunulmuştur. Elde edilen çözümler, klasik Newtonian akışkan için geçerli hız alanı çözümlerini özel hal olarak içermektedir. Mikrogermeli akışkanlarda, hız alanı, Newtonian akışkanlara kıyasla daha yüksek değerler almaktadır. Mikropolar parametrelerin artması, hem hız hem de mikro açısız hız alanlarını artırırken, mikro genleme parametresinin artması da mikro genleme alanını artırmaktadır.

Analytical Solutions to the Generalized Couette Flow of a Microstretch Fluid in an Annulus

Research Article

Article History:

Received: 21.04.2024

Accepted: 21.07.2024

Published online: 15.01.2025

Keywords:

Microstretch fluid
Generalized Couette flow
Analytical solution
Coaxial cylinders

ABSTRACT

In classical continuum mechanics, fluid particles are assumed to be material points. However, this assumption may lose its validity in micro-channels where the characteristic length is very small and/or in many applications where particle sizes are large, such as in polymer melts, suspensions, and biological fluids. In these cases, micro-motions such as rotation and deformation of fluid particles contribute to the macro motion of the fluid. In this study, the field equations of microstretch fluids are solved for the generalized Couette flow in an annulus, and exact analytical solutions are obtained for velocity, microrotation, and microstretch fields. Results are presented graphically for velocity, microrotation, and microstretch at various values of the pertinent parameters. Present solutions include velocity field solutions for the classical Newtonian fluid as a special case. For microstretch fluids, the velocity field takes on larger values compared to a Newtonian fluid. Increasing the micropolar parameters increases the velocity and microrotation fields while increasing the microstretch parameter increases the microstretch field.

To Cite: Demir MŞ. Mikrogermeli Bir Akışkanın Halka Kesitli Kanalda Genelleştirilmiş Couette Akımına ait Analitik Çözümler. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2025; 8(1): 31-44.

1. Giriş

Bilim ve mühendislikte karşılaşılan süspansiyonlar, biyolojik akışkanlar, polimer eriyikler ve sıvı kristaller gibi büyük parçacıklardan oluşan akışkanlarda deneylerle de gözlemlenen ve klasik sürekli ortam teorileri ile açıklanamayan davranışlar gösterirler. Örneğin; Hoyt ve Fabula (1964) polimerik katkı içeren akışkanlarda, katı cidar yakınlarında yüzey gerilmesinin katkı içermeyen akışkanlara oranla daha az olduğunu deneysel olarak gözlemlemişlerdir. Kan akışı deneylerinde gözlemlenen; hız profillerindeki farklılıklar, damar yarıçapındaki azalmanın görünür viskoziteyi azaltması ve kırmızı kan hücrelerinin damarın merkezine doğru hareket etmeleri (Fahreus-Linqvist etkisi) gibi olaylar Navier-Stokes teorisine açıklanamaz (Eringen, 1999).

Klasik akışkan teorisinin bu gibi durumları açıklamakta yetersiz kalmasının sebebi sürekli ortam yaklaşımıdır. Akışkan parçacıklarının boyutu, karakteristik uzunluğa kıyasla büyüdükçe sürekli ortam yaklaşımından uzaklaşır ve akışkan parçacığının mikro hareketleri (dönme ve deformasyon) önem kazanarak akışkanın makro hareketine katkıda bulunur (Eringen, 2001). Benzer durum mikrokanal akışı gibi uygulamalarda da görülür. Bu nedenle akışkan parçacıklarının boyutlarının büyüdüğü veya karakteristik uzunluğun küçüldüğü durumlarda akışkan parçacıkları maddesel nokta olarak düşünülmemeli ve üzerlerine gelen kuvvet, bir kuvvet ve kuvvet çiftine indirgenerek akışkan parçacıklarının mikro hareketleri hesaba katılmalıdır.

Tüm bu sebeplerden ötürü Eringen (1964) klasik sürekli ortam teorilerini kapsayan, akışkan parçacıklarının üzerine gelen momentleri de hesaba katan mikro akışkan teorilerini geliştirmiştir. Bu teorilerin en genel hali olan mikromorfik akışkanlarda, öteleme serbestliğinin yanı sıra dönme ve deformasyon ile birlikte serbestlik derecesi dokuza yükselir. Mikrogermeli akışkanlarda ise akışkan parçacığının sadece tek bir doğrultuda deformasyona uğradığı varsayılır ve böylece serbestlik derecesi yediye düşer. Mikro akışkan teorilerinin en basit hali olan mikropolar akışkanlarda ise; akışkan parçacıklarının rijit olduğu ve ötelemenin yanı sıra sadece dönme hareketi yaptıkları düşünülür. Mikro akışkan teorileri ile ilgili uygulamaların büyük çoğunluğu mikropolar akışkanlar üzerinedir. Literatürde mikromorfik ve mikrogermeli akışkanlar ile ilgili çalışmaların sayısı çok azdır. Bunun sebebi bu teoriler uygulanırken karşılaşılan matematiksel zorluklar ve malzemeye ait bilinmeyen katsayılarıdır.

Eringen (1964) mikro akışkan teorisini ortaya attıktan sonra akışkan modelinde bazı kısıtlamalara giderek mikrogermeli akışkanlar teorisini ortaya attı (Eringen, 1969). Bu gelişmenin ardından, mikrogermeli akışkan teorisi akışkanlar mekaniğinin temel problemlerine uygulanmaya başlanmıştır. Literatürdeki ilk uygulama Ariman (1970) tarafından yapılan, paralel iki plaka arasında Poiseuille akışına ait analitik çözümlerin bulunduğu çalışmadır. Ariman (1971) daha sonraki bir çalışmada ise mikrogermeli akışkan teorisini kullanarak kan akışını incelemiştir. Eringen (1990) teorisinin farklı uygulama alanlarını düşünerek, termo mikrogermeli akışkanlar teorisini geliştirmiş ve teorisini kabarcıklı akışkanlarda akustik dalga yayılımı problemlerine uygulamıştır. Bu çalışmayı takiben, Aydemir ve Venart (1990) bu teoriyi kullanarak paralel iki plaka arasında zamana bağlı akış ve ısı

transferi problemini incelemiştir. Bu teorinin sınır tabaka problemlerine ilk uygulanması ise Aydemir (1990) tarafından yapılmıştır. Kan akışında önemli bir yeri olan dairesel kesitli kanallarda darbeli akış problemi yine bu akışkan modeli kullanılarak Narasimhan (2003) tarafından incelemiştir. Moosaie ve Atefi (2009) ise içerisinde küresel parçacıklar bulunan bir sıvıyı bu teori ile modellemişler ve boru içerisinde akışını göz önüne almışlardır. Bu akışkan teorisi ile modellenebilen akışkanlar sınırlarda kaymama şartını sağlamayabilirler. Bunu göz önünde bulunduran Sherief ve ark. (2009; 2012) yaptıkları çalışmalarda mikrogermeli akışkan içerisinde dönen ve ötelen bir küreyi kayma sınır şartlarını kullanarak incelemiştir. Daha sonraki bir çalışmada ise, Demir (2017) yine kayma sınır şartlarını kullanarak mikrogermeli bir akışkanın paralel iki levha arasında kayma akışına ait analitik çözümlerini elde etmiştir. Teorinin ilginç bir uygulaması Sherief ve ark. (2018) tarafından yapılan, mikrogermeli bir akışkan içerisindeki damla etrafında akış problemidir. Zamana bağlı problemler ise ilk defa Slayi ve Ashmawy (2018) tarafından göz önüne alınmış ve mikrogermeli bir akışkanın paralel iki plaka arasında Couette ve Poiseuille akışlarını kayma sınır şartları altında incelenmiştir. Son zamanlarda yapılan bir çalışmada ise El-Sapa (2021) manyetik alanın, mikrogermeli bir akışkan damlası etrafında akış problemine etkilerini incelemiştir.

Son yıllarda, mikro akışkan teorileri yeni uygulama alanları bulmaktadır. Bunlardan biri akışkan içerisine nanometre boyutlarında katı parçacıkların ilave edildiği nanoakışkanlardır. Bu parçacıklar, akışkanın ısı iletimini arttırmak suretiyle toplam ısı transferine katkıda bulunur. Nanoakışkanlar; ısı değiştiricileri, elektronik devre elemanlarının soğutulması gibi endüstriyel uygulamalarda kullanılması mümkün görünmektedir (Patil ve ark., 2023). Yeni yapılan bir çalışmada ise Akbar ve ark. (2024) mikropolar bir nanoakışkanda mikro açısız hız alanının termal iletkenliği artırdığını ortaya koymuşlardır. Diğer bir uygulama alanı ise, akışkan içerisine manyetik alandan etkilenen parçacıkların ilave edilmesidir. Manyetik akışkanlar, fiziksel ve kimyasal bakımdan (optik, termal, manyetik vb.) ilginç özellikler göstermektedir. Mikro akışkan teorileri ile modellenebilen bu akışkanlar, biyomedikal teknoloji (kanser tedavisi, çeşitli medikal testler vb.), yapıştırma işlemleri, sıcaklık, pH vb. ölçümünde kullanılan sensörler gibi alanlarda potansiyel vaat etmektedir (Philip, 2023).

Bu çalışmada ise sıkıştırılmaz mikrogermeli bir akışkanın eş eksenli iki silindir arasında geliştirilmiş Couette akımı göz önüne alınmıştır. Eringen (2001) tarafından ortaya atılan alan denklemleri, uygun bir boyutsuzlaştırma yardımıyla, kaymama sınır koşulları altında çözümlenerek hız, mikro açısız hız ve mikro genleme alanlarına ait boyutsuz analitik çözümler elde edilmiştir. Parametrelerin çeşitli değerleri için elde edilen çözümler grafik olarak sunulmuştur. Böylece, mikrogermeli akışkanlar için geliştirilmiş Couette akımı problemi, ilgili boyutsuzlaştırma ile analitik olarak çözülmüş ve literatürdeki mevcut analitik çözümlere bir yenisi eklenmiştir.

2. Materyal ve Metot

Mikrogermeli akışkanların alan denklemleri, ilgili bünye denklemlerinin korunum denklemlerinde yerlerine yazılması ile elde edilir. İzotermal mikrogermeli bir akışkanda dokuz bilinmeyen; yoğunluk (ρ), mikro eylemsizlik (j), hız vektörü (\mathbf{v}), mikro açısız hız vektörü ($\boldsymbol{\nu}$) ve mikrogerme alanı (ν) için toplam dokuz denklem yazılır. Bu bölümde mikrogermeli akışkanlar için alan denklemleri verilmiş, yapılan kabuller ve basitleştirmelerin ardından ilgili problem için elde edilen diferansiyel denklem sisteminin analitik çözümleri bulunmuştur.

İzotermal mikrogermeli bir akışkan için kütle korunumu denklemi aşağıdaki şekildedir (Eringen, 2001).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Burada D/Dt maddesel türev operatörünü, ∇ Nabla operatörünü, ρ yoğunluğu, \mathbf{v} ise hız vektörünü göstermektedir. Bu çalışmada; koyu harflerle yazılan bütün büyüklükler vektörel büyüklükleri göstermektedir.

Mikrogermeli akışkan teorisinde, akışkan parçacıklarına klasik kütle yoğunluğu (ρ) yanında, pozitif tanımlanmış simetrik bir mikro eylemsizlik tansörü (j_{kl}) tekabül ettirilir. Akışın mikro izotropik olduğu varsayımı altında mikro eylemsizlik tansörü $j_{kl} = (1/3)j\delta_{kl}$ olarak yazılır ve mikro eylemsizlik (j) olarak adlandırılan tek bir büyüklük ile temsil edilir. Mikro eylemsizlik ile ilgili denklem, Eringen (2001) tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilerek, alan denklemlerine ilave edilmiştir.

$$\frac{Dj}{Dt} - 2j\nu = 0 \quad (2)$$

Bu denklemde; ν mikrogerme alanını göstermektedir. Mikrogermeli akışkanların diğer bir alan denklemi, bünye denklemlerinin lineer momentum denkleğine yazılması ile elde edilen aşağıdaki denklemdir.

$$(\lambda_v + 2\mu_v + \kappa_v)\nabla\nabla \cdot \mathbf{v} - (\mu_v + \kappa_v)\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} + \kappa_v\nabla \times \boldsymbol{\nu} + \lambda_0\nabla \nu - \nabla\pi + \rho(\mathbf{f} - \frac{D\mathbf{v}}{Dt}) = 0 \quad (3)$$

Bu denklemde; $\lambda_v, \mu_v, \kappa_v$ ve λ_0 öteleme viskozite katsayılarını, π termodinamik basıncı, \mathbf{f} hacim kuvvetleri yoğunluğunu göstermektedir. $\boldsymbol{\nu}$ ise mikro açısız hız vektörü olup, mikro akışkan teorilerinin Newtonian akışkanlardan en önemli farkıdır. Bu teoride; akışkan parçacıkları üzerine etkiyen kuvvet, bir kuvvet ve kuvvet çiftine indirgenir. Bu nedenle açısız momentum denkleği kendiliğinden sağlanmaz ve alan denklemlerine aşağıdaki şekilde ilave bir vektörel denklem olarak eklenir.

$$(\alpha_v + \beta_v + \gamma_v)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_v\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\nu} + \kappa_v\nabla \times \mathbf{v} - 2\kappa_v\boldsymbol{\nu} + \rho(\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (4)$$

(4) denkleminde; α_v, β_v ve γ_v ise dönme için viskozite katsayılarını, σ dönme ataletini ve l ise, hacim momenti yoğunluğunu göstermektedir. Dönme viskozite katsayılarına klasik Newtonian akışkanlarda rastlanmaz ancak, akışkan parçacıklarının üzerlerine etkiyen döndürme momentleri nedeniyle mikrogermeli akışkanların bünye denklemlerinde görünürler. Mikrogermeli akışkan teorisinin klasik Newtonian akışkanlardan bir diğer farkı; akışkan parçacıklarının öteleme ve dönme alanlarına ilave olarak, üzerlerine gelen mikro gerilmeler nedeniyle tek bir doğrultuda deformasyona (şişme/sönme) uğramalarıdır. Bu deformasyon ile ilgili kinematik büyüklük, bünye denklemlerinde ek bir denklem olarak görünür ve mikrogerme alanı (ν) olarak adlandırılır. Bu bünye denkleminin mikrogerme momentum denkleğine yazılması ile mikrogerme alanı için aşağıdaki alan denklemi bulunur (Eringen, 2001).

$$\alpha_0 \nabla^2 \nu + \pi_0 - \lambda_1 \nu - \lambda_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho(l - \sigma) = 0 \quad (5)$$

Bu denklemde, π_0 atalet mikro basıncını, l hacim mikrogerme yoğunluğunu, σ ise, mikrogerme ataletini göstermektedir. Dönme ataleti σ ve mikrogerme ataleti σ ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Eringen, 2001).

$$\sigma = \frac{D}{Dt}(j\nu), \quad \sigma = \frac{1}{2} j \left(\frac{D\nu}{Dt} + \nu^2 \right) - j\nu \cdot \nu \quad (6)$$

Öteleme ve dönme viskozite katsayıları genel halde ρ , j ve sıcaklığa bağlı olabilirler ancak doğrusal yaklaşımda sabit oldukları kabul edilir. Bu çalışmada akışın daimi olduğu ve mikrogermeli akışkanın sıkıştırılmaz olduğu varsayımı altında çözüm yapılmıştır. Bu durumda süreklilik denklemi (1) aşağıdaki şekilde yazılır ve termodinamik basınç π , bilinmeyen bir p basıncı ile değiştirilir.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

Mikro eylemsizliğin (j) küçük olduğu durumlarda, c bir sabit olmak üzere, eylemsizlik mikro basıncı π_0 ;

$$\pi_0 = cj \quad (8)$$

olarak ifade edilir (Eringen, 2001). Ayrıca, (6) numaralı denklemde lineer olmayan terimler ihmal edilir ve j 'nin sabit olduğu düşünülürse, dönme ataleti σ ve mikrogerme ataleti σ ise aşağıdaki şekilde yazılır (Eringen, 2001).

$$\sigma = j \frac{D\nu}{Dt}, \quad \sigma = \frac{1}{2} j \frac{D\nu}{Dt} \quad (9)$$

Tüm bu varsayımlar altında hacim kuvvetleri ve momentlerinin olmadığı durumda (2)-(5) alan denklemleri aşağıdaki şekilde basitleşir.

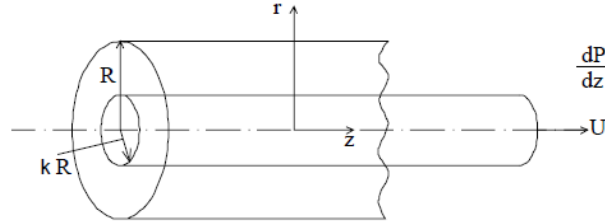
$$\mathbf{v} \cdot \nabla j - 2jv = 0 \quad (10)$$

$$-\nabla p + \lambda_0 \nabla v + (\mu_v + \kappa_v) \nabla^2 \mathbf{v} + \kappa_v \nabla \times \boldsymbol{\nu} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

$$(\alpha_v + \beta_v + \gamma_v) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_v \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\nu} + \kappa_v \nabla \times \mathbf{v} - 2\kappa_v \boldsymbol{\nu} + \rho j (\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (12)$$

$$\alpha_0 \nabla^2 v + cj - \lambda_1 v + \frac{1}{2} \rho j (\mathbf{v} \cdot \nabla v) = 0 \quad (13)$$

Mikrogermeli bir akışkan; Şekil.1 de gösterilen iç içe geçmiş, sonsuz uzunlukta, eş eksenli iki silindirin arasında başlangıçta hareketsiz olarak durmaktadır. Dıştaki silindirin yarıçapı R olup içteki silindirin yarıçapı ise, κR ($\kappa < 1$) büyüklüğündedir. Dıştaki silindir hareketsiz tutulurken, akışkan içteki silindirin z ekseninin pozitif yönü doğrultusunda sabit bir U hızı ile çekilmesi ve aynı anda halka kesitli bölgeye z eksenini boyunca dP/dz büyüklüğünde bir basınç farkı uygulanması ile aniden harekete geçmektedir. Diğer doğrultularda harekete neden olacak bir etken bulunmamaktadır.



Şekil 1. Problemin geometrisi ve koordinat sistemi.

Yeteri kadar uzun bir süre geçtikten sonra akışın daimi hale ulaştığı ve tam gelişmiş olduğu durum için, hız \mathbf{v} , mikro açısız hız $\boldsymbol{\nu}$, mikro genleme v ve mikro eylemsizlik j aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{v} = \{0, 0, w(r)\}, \quad \boldsymbol{\nu} = \{0, \gamma(r), 0\}, \quad v = v(r), \quad j = j(r) \quad (14)$$

(14) denklemi (10)-(13) denklemlerinde yerlerine yazılarak akışkanın hız, mikro açısız hız ve mikro genleme alanlarını belirlemek için çözülmesi gereken diferansiyel sistemi;

$$(\mu_v + \kappa_v) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \kappa_v \frac{d}{dr} (r\gamma) = r \frac{\partial p}{\partial z} \quad (15)$$

$$\gamma_v \frac{d}{dr} \left(\frac{d\gamma}{dr} + \frac{\gamma}{r} \right) - \kappa_v \frac{dw}{dr} - 2\kappa_v \gamma = 0 \quad (16)$$

$$\alpha_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \lambda_1 v = -\pi_m \quad (17)$$

olarak bulunur. İlgili sınır şartları ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} w(\kappa R) &= U, & w(R) &= 0 \\ \gamma(\kappa R) &= 0, & \gamma(R) &= 0 \\ v(\kappa R) &= 0, & v(R) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Mikro açılma hız ve mikrogerme alanlarının kanal cidarında 0 değerini almaları sıkı yapışma koşulu olarak adlandırılır. Katı yüzeyler üzerinde farklı sınır şartları uygulamak mümkündür (Eringen, 2001) .

Bu denklemler;

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{w} = \frac{w}{U}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{U/R}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\pi_m/\lambda_1} \quad (19)$$

boyutsuz büyüklükleri cinsinden ifade edilirse; aşağıdaki boyutsuz diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Buradan itibaren kolaylık olması açısından boyutsuz büyüklükleri gösteren üst çizgi işareti kullanılmayacaktır.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\Delta_m}{(1 + \Delta_m)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\gamma) = p_b \quad (20)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d\gamma}{dr} + \frac{\gamma}{r} \right) - \lambda_m^2 \frac{dw}{dr} - 2\lambda_m^2 \gamma = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \lambda_n^2 v + \lambda_n^2 = 0 \quad (22)$$

Burada, Δ_m ve λ_m mikropolar parametreler, λ_n mikrogerme parametresi ve p_b boyutsuz basınç parametresi olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\Delta_m = \frac{\kappa_v}{\mu_v}, \quad \lambda_m = \frac{\kappa_v R^2}{\gamma_v}, \quad \lambda_n = \frac{\lambda_1 R^2}{\alpha_0}, \quad p_b = \frac{R^2}{(\mu_v + \kappa_v)U} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (23)$$

Bu denklemlerle ilgili boyutsuz sınır şartları ise;

$$\begin{aligned}
w(\kappa) &= 1, & w(1) &= 0 \\
\gamma(\kappa) &= 0, & \gamma(1) &= 0 \\
\nu(\kappa) &= 0, & \nu(1) &= 0
\end{aligned} \tag{24}$$

şeklinde. (20)-(22) diferansiyel denklem sistemi, (24) sınır şartları altında çözümlenir; I_k ve K_k sırasıyla k . mertebeden I. tip ve II. tip değiştirilmiş Bessel fonksiyonları olmak üzere hız, mikro açısal hız ve mikro genleme alanları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
w &= \frac{p_b}{2} \left[-\frac{\Delta m}{2 + \Delta m} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{\lambda} I_0(\lambda r) + \frac{\Delta m}{2 + \Delta m} \frac{A_4}{A_1} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda r) + \frac{1 + \Delta m}{2 + \Delta m} r^2 \right] \\
&+ c_1 \left[-\frac{\Delta m}{2 + \Delta m} \frac{A_3}{A_1} \frac{1}{\lambda} I_0(\lambda r) + \frac{\Delta m}{2 + \Delta m} \frac{A_5}{A_1} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda r) + 2 \frac{1 + \Delta m}{2 + \Delta m} \ln(r) \right] + c_2
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\gamma = c_3 I_1(\lambda r) + c_4 K_1(\lambda r) - \frac{1 + \Delta m}{2 + \Delta m} \frac{p_b}{2} r - \frac{1 + \Delta m}{2 + \Delta m} \frac{c_1}{r} \tag{26}$$

$$\nu = \frac{I_0(\lambda_n r) [K_0(\lambda_n) - K_0(\lambda_n \kappa)] - K_0(\lambda_n r) [I_0(\lambda_n) - I_0(\lambda_n \kappa)]}{I_0(\lambda_n) K_0(\lambda_n \kappa) - I_0(\lambda_n \kappa) K_0(\lambda_n)} + 1 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_m \sqrt{\frac{2 + \Delta_m}{1 + \Delta_m}}, & A_1 &= I_1(\lambda \kappa) K_1(\lambda) - I_1(\lambda) K_1(\lambda \kappa), & A_2 &= \kappa K_1(\lambda) - K_1(\lambda \kappa), \\
A_3 &= \frac{K_1(\lambda)}{\kappa} - K_1(\lambda \kappa), & A_4 &= -\kappa I_1(\lambda) + I_1(\lambda \kappa), & A_5 &= -\frac{I_1(\lambda)}{\kappa} + I_1(\lambda \kappa), \\
A_6 &= -\frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_3}{A_1} \frac{1}{\lambda} I_0(\lambda \kappa) + \frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_5}{A_1} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda \kappa) + 2 \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m} \ln(\kappa), \\
A_7 &= -\frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{\lambda} I_0(\lambda \kappa) + \frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_4}{A_1} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda \kappa) + \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m} \kappa^2, \\
A_8 &= -\frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_3}{A_1} \frac{1}{\lambda} I_0(\lambda) + \frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_5}{A_1} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda), \\
A_9 &= -\frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{\lambda} I_0(\lambda) + \frac{\Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_4}{A_1} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda) + \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m}, \\
c_1 &= \frac{1 - (A_7 - A_9) \frac{p_b}{2}}{A_6 - A_8}, & c_2 &= 1 - A_7 \frac{p_b}{2} - A_6 c_1 \\
c_3 &= \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_2}{A_1} \frac{p_b}{2} + \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_3}{A_1} c_1, & c_4 &= \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_4}{A_1} \frac{p_b}{2} + \frac{1 + \Delta_m}{2 + \Delta_m} \frac{A_5}{A_1} c_1
\end{aligned} \tag{28}$$

I. tip ve II. tip değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarına genelde silindirik geometriye sahip problemlerde karşılaşılır. Bu fonksiyonlar değiştirilmiş Bessel diferansiyel denkleminin

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) w = 0 \text{ çözümleridir (Abramowitz ve Stegun, 1948).}$$

3. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, sıkıştırılmayan mikrogermeli bir akışkan için halka kesitli bir kanal içinde genelleştirilmiş Couette akımı ele alınmış ve hız, mikro açısız hız ve mikro genleme alanlarına ait tam analitik çözümler bulunarak, parametrelerin çeşitli değerleri için grafik olarak sunulmuştur.

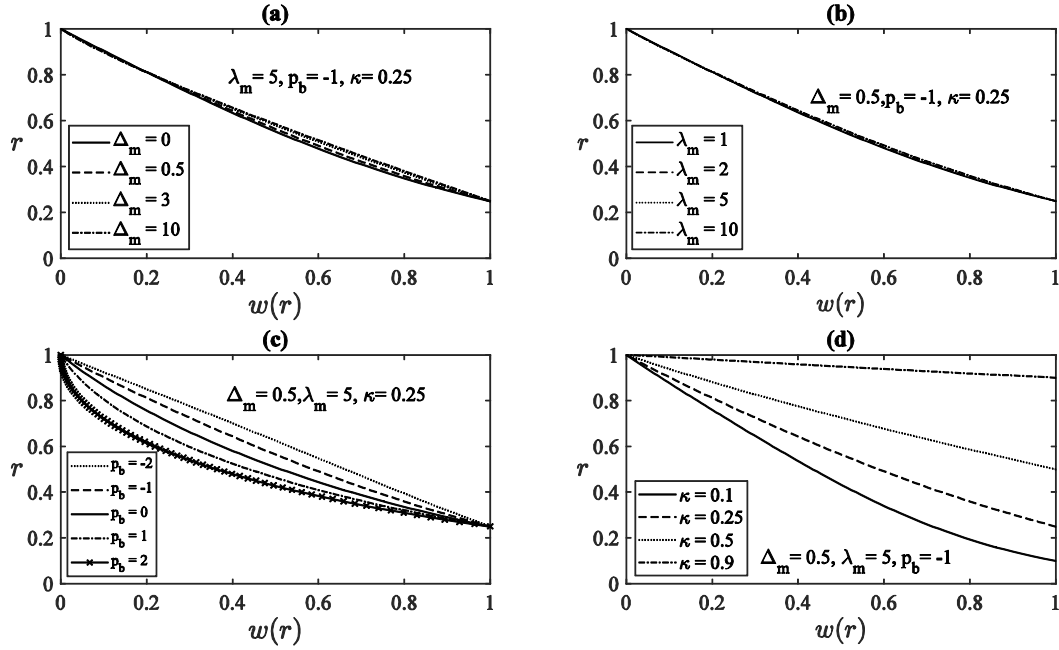
(25), (26) ve (27) numaralı denklemlerde $\Delta_m = \lambda_m = \lambda_n = 0$ olarak alınırsa Newtonian bir akışkan için çözümler elde edilir. $\lambda_n = 0$ durumu ise mikropolar bir akışkanın çözümlerine karşılık gelmektedir. Eringen (2001) küçük damarlar içinde kan akışını mikrogermeli bir akışkan kullanarak modellemiş ve sabit bir basınç farkı altındaki akışını incelemiştir. Elde etmiş olduğu teorik hız değerlerini Goldsmith ve Marlow (1979) tarafından yapılan deneysel çalışma ile mukayese etmiştir. Mevcut çalışmada benzer hız profilleri elde edilmesine karşın geometrinin farklı olması, boyutsuzlaştırmada kullanılan farklı karakteristik büyüklükler ve farklı akış parametreleri nedeniyle doğrudan bir karşılaştırma yapmak mümkün değildir. Bununla beraber, halka kesitli bir kanalda, yazarın bilgisi dahilinde mikrogermeli akışkanlar ile ilgili deneysel çalışma bulunmamaktadır. Yine farklı bir geometride (paralel iki levha arasında) mikrogermeli bir akışkanın kayma akışı problemi Demir (2017) tarafından kayma sınır şartlarını kullanarak incelemiştir. Benzer sebeplerden dolayı mevcut çalışmayı yine doğrudan karşılaştırmak mümkün değildir. Ancak mevcut çalışma ve Demir (2017) tarafından yapılan çalışma karşılaştırıldığında; mikropolar parametreler Δ_m ve λ_m nin arttıkça, her iki çalışmada da hem hız hem de mikro açısız değerlerinin arttığı, mikro genleme alanının ise mikro genleme parametresi λ_n ile arttığı sonucuna varılmıştır.

Şekil 2 hız alanının akış parametreleri ile değişimini göstermektedir. Şekil 2 (a)' da diğer parametreler sabit tutularak, mikropolar parametre Δ_m in arttıkça çözümün Newtonian bir akışkan için olan çözümden ($\Delta_m = 0$ durumu) gittikçe uzaklaştığı görülmektedir. Örneğin; $r = 0.5$ değeri için, Δ_m in arttıkça hız alanının da arttığı gözlemlenmektedir. Bu artış, mikro akışkanların klasik Newtonian akışkanlardan farklı davrandığını ve daha yüksek hız değerlerine ulaşabildiğini göstermektedir. Benzer durumun mikropolar parametre λ_m içinde geçerli olduğu Şekil 2 (b)' de görülmektedir. Mikropolar parametre λ_m arttıkça hız alanında arttığı gözlemlenmektedir. Mikropolar parametreler; denklem (23) te gösterildiği gibi, Eringen'in mikro akışkan teorilerinde karşılaşılan ilave viskozite katsayıları ile ilgili boyutsuz sayılardır. Literatürde bu katsayılarla ilgili deneysel çalışmalar mevcut değildir. Bu nedenle bu çalışmada da bu katsayılar için varsayımsal değerler kullanılmıştır. Ancak bu katsayıların sürekli ortam yaklaşımından ne kadar uzaklaştığını gösterdikleri açıktır. Bu parametreler büyüdükçe akışkanın mikro hareketlerinin makro hareketi üzerine etkilerinin arttığı ve klasik Newtonian akışkan teorisinden önemli ölçüde farklılıklar oluştuğu gözlemlenmektedir.

Şekil 2 (c) diğer parametreler sabit tutularak, hız alanının boyutsuz basınç parametresi p_b ile değişimini göstermektedir. Boyutsuz basınç parametresinin negatif değerlerinin akışkanın z ekseninin pozitif doğrultusunda hareket etmesine neden olduğu unutulmamalıdır. $p_b = 0$ durumu ise; halka

kesitli kanalın iki ucu arasında basınç farkı olmadığı durumu göstermektedir. Bu durumda akışkanın hareketi yalnızca içteki silindirin çekilmesinden kaynaklanmaktadır. Basınç farkı mutlak değerce arttırıldıkça, negatif değerler için, plakanın z ekseninin pozitif doğrultusunda çekilmesi durumuna katkıda bulunarak hızı arttırmakta, pozitif değerler için ise hızı azaltmaktadır. Bununla birlikte, pozitif işaretli boyutsuz basınç parametresinin belirli bir değerinden sonra; basınç farkı, plakanın çekilmesine galip gelerek geri akımlara neden olmaktadır ($p_b = 2$ durumu).

Şekil 2 (d) ise, diğer parametreler sabit tutularak hız alanının κ ile değişimini göstermektedir. κ içteki silindirin yarıçapının, dıştaki silindirin yarıçapına oranını göstermektedir. κ değeri büyüdükçe halka kesitli kanal daralmakta ve hız alanı doğrusal profile yaklaşmaktadır. Halka kesitli kanal daraldıkça hız değeri içteki silindirin hızına yaklaşarak daha yüksek değerler almaktadır ve dıştaki silindire yaklaştıkça kaymama şartına uygun olarak 0 değerine düşmektedir. Bu değişim yüksek κ değerlerinde daha hızlı olmaktadır.

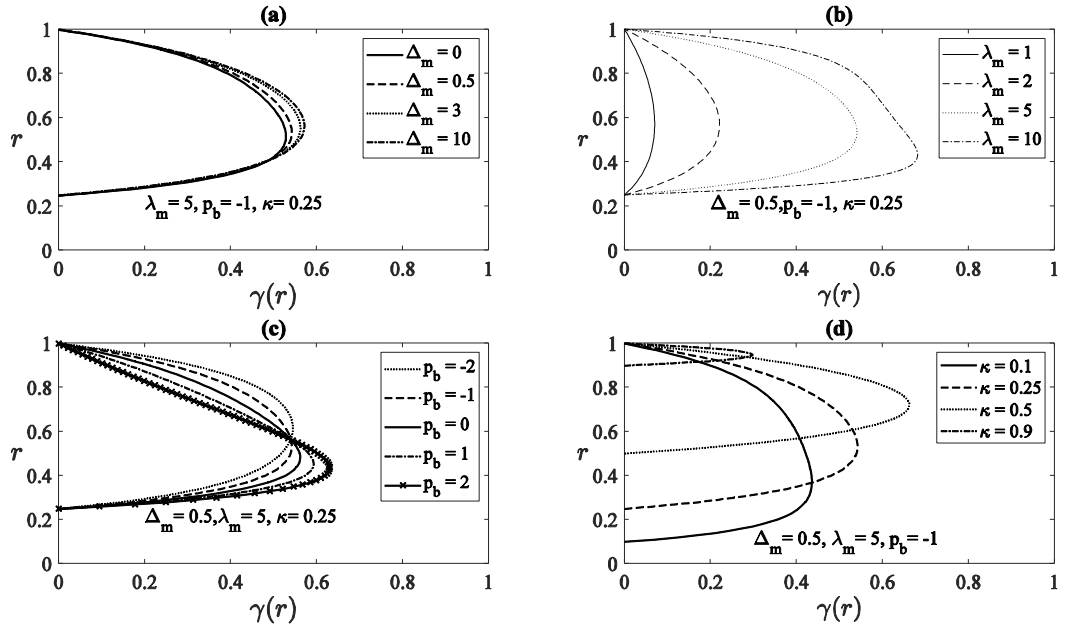


Şekil 2. Hız dağılımı: (a) Δ_m ile değişimi (b) λ_m ile değişimi (c) boyutsuz basınç parametresi p_b ile değişimi (d) silindirlerin yarıçap oranı κ ile değişimi.

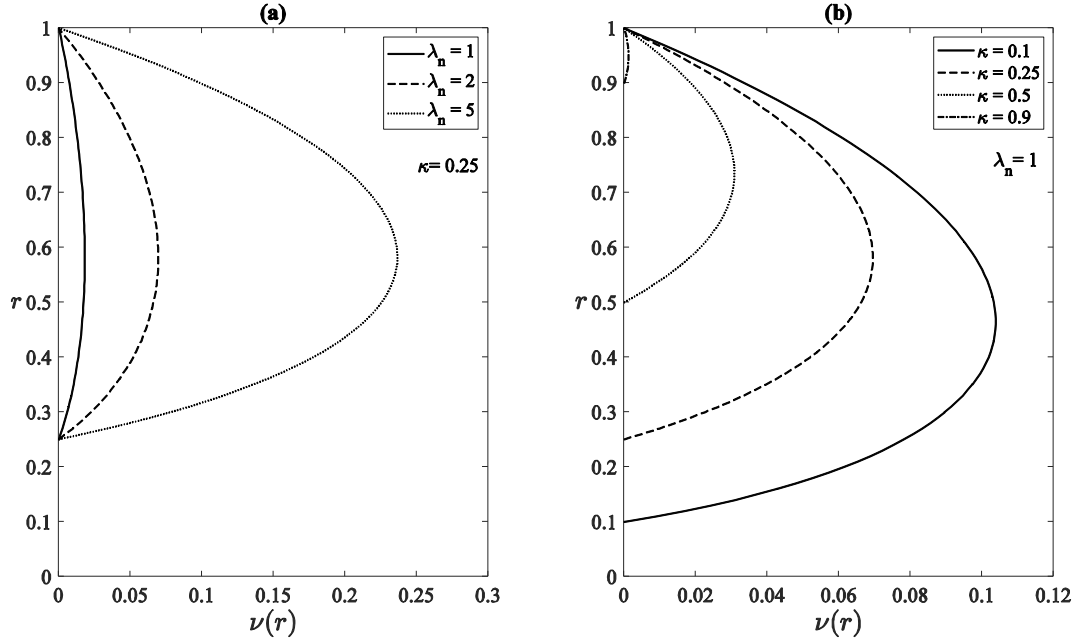
Şekil 3 mikro açısız hız alanının akış parametreleri ile değişimini göstermektedir. Mikro açısız hız alanı, akışkan parçacıklarının θ doğrultusundaki mikroskobik dönme hızlarını göstermektedir. Şekil 3 (a) ve (b) de mikropolar parametreler Δ_m ve λ_m in arttıkça mikro açısız hız alanının arttığı görülmektedir. Örneğin; Şekil 3 (a) da $r=0.6$ değerinde, mikro açısız hız alanı en yüksek değerini $\Delta_m=10$ olduğunda, en düşük değerini ise, $\Delta_m=0$ olduğunda almaktadır. Şekil 3 (b) göz önüne alındığında ise, mikro açısız hız en küçük değerini $\lambda_m=1$ de alırken, en büyük değerini $\lambda_m=10$ olduğunda almaktadır. Mikro açısız hız kanalın orta bölgelerinde en yüksek değerini almakta ve kanal çeperlerinde sıkı yapılaşma koşuluna uygun olarak 0 değerini almaktadır.

Şekil 3 (c), mikro açısız hız alanının boyutsuz basınç parametresi p_b ile değişimini göstermektedir. Boyutsuz basınç parametresinin negatif değerlerinde, içteki silindire yakın bölgelerde basınç farkı arttırıldıkça mikro açısız hızın azaldığı, dıştaki silindire yakın bölgelerde ise, mikro açısız hızın arttığı gözlenmektedir. Yani, basınç farkı içteki silindire yakın bölgelerde akışkan parçacıklarının dönme hızlarını sınırlarken, dış silindire yakın bölgelerde dönme hızlarına katkıda bulunduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Boyutsuz basınç parametresinin pozitif değerlerinde ise, içteki silindire yakın bölgelerde mikro açısız hızın arttığı, dıştaki silindire yakın bölgelerde azaldığı gözlenmiştir.

Şekil 3 (d) ise, κ değeri büyüdükçe daralan kanalda mikro açısız hız alanının değişimini göstermektedir. Mikro açısız hız, halka kesitli kanal daraldıkça artmakta ancak belli bir κ değerinden sonra mikro açısız hızın azaldığı gözlemlenmektedir. Buradan kanalın daraldıkça akışkan parçacıklarının dönme hızlarını düşürdüğü sonucuna ulaşılır.



Şekil 3. Mikro açısız hız dağılımı: (a) Δ_m ile değişimi (b) λ_m ile değişimi (c) boyutsuz basınç parametresi p_b ile değişimi (d) silindirlerin yarıçap oranı κ ile değişimi.



Şekil 4. Mikro genleme dağılımı: (a) λ_n ile değişimi (b) silindirlerin yarıçap oranı κ ile değişimi.

Şekil 4 mikro genleme alanının akış parametreleri ile değişimini göstermektedir. Şekil 4 (a)'da mikro genleme alanının mikro genleme parametresi λ_n ile arttığı görülmektedir. Mikro genleme alanı, akışkan parçacıklarının deformasyonu (şişme/sönme) ile ilgilidir (Eringen, 2001). Şekil 4 (a) mikro genleme parametresinin büyük olduğu durumlarda akışkan parçacıklarının daha çok deformasyona uğradıklarını göstermektedir.

Şekil 4 (b) ise, κ değeri ile mikro genleme alanı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Halka kesitli kanal daraldıkça mikro genleme alanının azaldığı yani akışkan parçacıklarının daha az deforme olduğu gözlenmektedir.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada mikrogermeli bir akışkanın halka kesitli bir kanaldaki akışı incelenmiştir. İlgili alan denklemleri yapılan kabuller altında uygun sınır şartları kullanılarak analitik olarak çözülmüştür. Hız, mikro açısız hız ve mikro genleme alanlarına ait analitik çözümler, fiziksel parametrelerin çeşitli değerleri için grafik olarak sunulmuştur. Mikropolar parametreler Δ_m ve λ_m in arttıkça hız ve mikro açısız hız alanlarının arttığı, mikro genleme alanının da mikro genleme parametresi λ_n ile arttığı gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, akışkan parçacıklarının dönme ve deformasyonu gibi mikroskobik hareketlerinin akışkanın makroskobik hareketine katkıda bulunduğunu ve akışkanın hızında klasik Newtonian teori ile farklılıklar oluştuğunu göstermektedir. Bu farklılıklar mikropolar parametreler arttıkça yani; sürekli ortam yaklaşımından uzaklaşıldıkça daha önemli hale gelmektedir. Bu sebeple, sürekli ortam yaklaşımının geçerliliğini yitirmeye başladığı durumlarda akışkanın mikro hareketlerini göz önüne almak, deneyler ile daha uyumlu sonuçlar bulunabilmesine olanak

sağlayabilir. Ancak, mikro akışkan modellerinin teorik modeller olduğu göz önünde bulundurulmalı ve biyolojik akışkanlar, polimer eriyikler ve süspansiyonlar gibi karmaşık akışkanlar için mikro akışkan modellerinin geçerliliği deneysel verilerle desteklenmelidir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazar makaleye %100 oranında katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

Kaynakça

- Abramowitz M., Stegun IA. (ed.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. US Government printing office, 1948.
- Akbar NS., Rafiq M., Muhammad T., Alghamdi M. Electro osmotically interactive biological study of thermally stratified micropolar nanofluid flow for copper and silver nanoparticles in a microchannel. *Scientific Reports* 2024; 14(1): 518.
- Ariman T. Fluids with microstretch. *Rheologica Acta* 1970; 9: 542-549.
- Ariman T. On the analysis of blood flow. *Journal of Biomechanics* 1971; 4(3): 185-191.
- Aydemir NU., Venart JES. Flow of a thermomicropolar fluid with stretch. *International Journal of Engineering Science* 1990; 28(12): 1211-1222.
- Aydemir NU. Free-convection boundary-layer flow of a thermomicropolar fluid with stretch. *International Journal of Engineering Science* 1990; 28(12): 1223-1233.
- Demir MS. Shear flow of a microstretch fluid with slip. 3rd International Conference on Environmental Science and Technology (ICOEST), 19-23 Ekim 2017, sayfa no:85-89, Budapeşte.
- El-Sapa S. Effect of magnetic field on a microstretch fluid drop embedded in an unbounded another microstretch fluid. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 2021; 85: 169-180.
- Eringen AC. Simple of micro-fluids. *International Journal of Engineering Science* 1964; 2(2): 205-217.
- Eringen AC. Theory of micropolar fluids with stretch. *International Journal of Engineering Science* 1969; 7(1): 115-125.
- Eringen AC. Theory of thermo microstretch fluids and bubbly liquids. *International Journal of Engineering Science* 1990; 28(2): 133-143.
- Eringen AC. *Microcontinuum field theories I: Foundations and solids*. NY: Springer; 1999.
- Eringen AC. *Microcontinuum field theories II: Fluent media*. NY: Springer-Verlag; 2001.
- Goldsmith HL., Marlow JC. Flow behavior of erythrocytes, *Journal of Colloid and Interface Science* 1979; 71(2): 383-407.

- Hoyt JW., Fabula AG. The effect of additives on fluid friction. California: Technical report: US Naval Ordnance Test Station; 1964.
- Moosaie A., Atefi G. Microstretch continuum mechanical description of concentrated suspension flow. *Journal of Dispersion Science and Technology* 2009; 30(1): 124-130.
- Narasimhan MNL. A mathematical model of pulsatile flows of microstretch fluids in circular tubes. *International Journal of Engineering Science* 2003; 41(3-5): 231-247.
- Patil PM., Goudar B., Momoniat E. Magnetized bioconvective micropolar nanofluid flow over a wedge in the presence of oxytactic microorganisms. *Case Studies in Thermal Engineering* 2023; 49: 103284.
- Philip J. Magnetic nanofluids (Ferrofluids): Recent advances, applications, challenges, and future directions. *Advances in Colloid and Interface Science* 2023; 311: 102810.
- Sherief HH., Faltas MS., Ashmawy EA. Galerkin representations and fundamental solutions for an axisymmetric microstretch fluid flow. *Journal of Fluid Mechanics* 2009; 619: 277-293.
- Sherief HH., Faltas MS., Ashmawy EA. Fundamental solutions for axi-symmetric translational motion of a microstretch fluid. *Acta Mechanica Sinica* 2012; 28: 605-611.
- Sherief HH., Faltas MS., El-Sapa S. Slow motion of a slightly deformed spherical droplet in a microstretch fluid. *Microsystem Technologies* 2018; 24(8): 3245-3259.
- Slayi S., Ashmawy EA. Unsteady flow of a microstretch fluid through state space approach with slip conditions. *Applied Mathematics and Information Sciences* 2018; 12(4): 841-850.