

MEIXNER SÜRECİ İLE REEL EFEKTİF DÖVİZ KURU'NUN MODELLENMESİ

Ömer ÖNALAN¹

Özet

Levy süreçleri finans alanında artan bir öneme sahiptir. Bunun temel nedenlerinden bir tanesi, bu süreçlerin menkul kıymet fiyatlarına iyi uyum sağlamasıdır. Meixner süreci dört parametre ile karakterize edilen, özel bir Levy sürecidir. Meixner sürecinin göreceli olarak kapalı formda ifade edilebilen basit bir marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olması uygulamada bu süreçleri öne çıkartmaktadır. Bu çalışmada, reel efektif döviz kurundaki değişimler, Meixner süreci kullanılarak modellenmiştir. Yapılan deneysel çalışmada, Meixner dağılımının gerçek verileri iyi bir şekilde temsil ettiği yapılan simülasyon çalışmaları ile tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lévy süreci, Meixner süreci, Reel efektif döviz kuru Simülasyon

MODELING OF REAL EFFECTIVE EXCHANGE RATE WITH MEIXNER PROCESSES

Abstract

Lévy processes have increasing importance in finance area. One of the essential reasons for this increasing interest is that. These processes good fit to asset prices. Meixner process has got four parameter and it is sub class for general Lévy processes. The marginal probability density function of Meixner process is relatively simple and it can be represented in closed form. These properties makes popular Meixner process in applications. In this study we modelled the changes of real effective Exchange rate with Meixner processes. In the empirical study, we find that Meixner model good fit real data. Finally we investigate validate of the model using the simulations.

Key Words: Lévy process, Meixner process, Real effective exchange rate, Simulation

¹Doç.Dr. Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü öğretim üyesi, email: omeronalan@marmara.edu.tr

1.Giriş

Meixner süreci, Schoutens Teugels(1998)² ve Grigelionis(1999)³ un çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra Schoutens(2001,2002)^{4,5} bu süreci finans alanına uygulamıştır. Meixner dağılımı Meixner-Pollaczek polinomlarının diklik ölçümüdür⁶. Meixner dağılımı aynı zamanda “genelleştirilmiş z- dağılımlarının” özel bir durumudur. Bu dağılımlar sonsuz bölünebilir olduklarından bir Levy süreci doğururlar. Meixner dağılımı esnek bir yapıya sahip olduğundan analitik ve nümerik olarak çalışılması kolay formüllere sahiptir. Meixner dağılımının bileşik parametre uzayı, her bir parametre uzayının kartezyen çarpımına eşittir. Meixner sürecinin en dikkate değer özelliklerinden bir tanesinde sürecin gözlem zamanına göre asimptotik davranışdır. Süreç kısa zaman aralıklarında Couchy Levy sürecine yaklaşırken, uzun zaman aralıklarında, Brownian harekete yaklaşır.

Kısa zaman aralığında gözlenmiş olan finansal mal fiyatlarının logaritmik değişimlerinin Gaussian olmadığı, genelde normal dağılımdan daha kalın kuyruklara sahip olduğu literatürde birçok deneysel çalışma ile tespit edilmiştir⁷. Schoutens(2002) endeks getirilerini modellemek için Meixner dağılımına dayanan bir model önermiştir. Modelin sonuçları ile geleneksel Black-Scholes modelinin sonuçlarını karşılaştırdığında yeni modelin daha iyi oluşuna dair istatistiksel deliller elde etmiştir.

Dalgalı kur sistemine geçilmesi ile birlikte efektif döviz kuru finansal piyasalarda yaygın olarak kullanılan bir kavram haline gelmiştir. Efektif döviz kurlarının küresel piyasalardaki kullanımı yaygınlaştıkça kurlardaki değişimin uluslar arası ticaretteki önemi her geçen gün daha da artmıştır. Bir ulusal paranın diğer ulusların paraları karşısında değerindeki değişme o ülkenin ticari rekabet gücünün önemli bir göstergesidir. Burada ülkedeki enflasyon oranının da dikkate alınması gerekir. Bu durumda reel efektif kurlar iyi bir gösterge olabilir.

Nominal döviz kuru parasal bir kavram olarak, iki para biriminin göreceli fiyatını ifade eder. Reel döviz kuru ise yabancı ülkelerde üretilen malların yurtiçinde üretilen mallar cinsinden göreceli fiyatını yansıtır ve uluslar arası rekabeti ölçmek için kullanılan göstergelerden biridir⁸.

² Schoutens,W.,Teugels,J.L.,**Levy processes,polinomials and martingales**. Communications in statistics; Stochastic Models,14,335-349,1998.

³ Grigelionis,B.,**Pocesses of Meixner type**,Lithuenian Mathematics Journal,39(1),33-41,1999.

⁴ Schoutens,W.,**The Meixner processes in finance**,Eurorandom report,2001-002,Eurorandom,Eindhoven,2001.

⁵ Schoutens,W.,**Meixner processes:theory and applications in finance**. Eurorandom report,2002-004, Eurorandom,Eindhoven,2002.

⁶ Koekoek,R.,Swarttouw,R.F.,**The Askey-scheme of hypergeometric ortogonal polinomials and its q-analogus**.Report 97-17,Delf University of technology,1998.

⁷ Cont,R.,**Empirical properties of asset returns:stylized facts and statistical issues**.Quantitative finance,1,223-236,2001.

⁸ Marsh, I., S. Tokarick, **An Assesment Of Three Measures Of**

Reel döviz kuru, nominal döviz kurunun yurtdışı fiyat seviyesi ile çarpımının yurtiçi fiyat seviyesine oranı olarak hesaplanır⁹. Şu halde reel döviz kuru, ulusal para birimi cinsinden yurtdışı mal fiyatlarının yurtiçi mal fiyatlarına oranı olarak tanımlanır. Bu durumda reel kur, ticarete konu olan malların yurtiçindeki üretim maliyeti olarak yorumlanabilir. Reel kur seviyesindeki artma ticari malların yurt içi üretim maliyetinin arttığını gösterir. Diğer bir deyişle reel kurlardaki artma ülkenin uluslar arası rekabet gücünün azaldığını tersine kurdaki azalma ise ülkenin rekabet gücündeki artma olarak yorumlanır. Reel kur yöneticilerin kaynakları ticari ve ticari olmayan mallar arasında, paylaşırma kararı verirken kullanacakları önemli bir göstergedir. Bir ülke uluslararası piyasalarda, birden çok ülke ile hem ticaret hem de rekabet ilişkisi içerisinde olduğundan, reel kurun efektif endeks olarak düşünülmesi makul bir yaklaşım olacaktır. Fakat bu durumda hangi ülkelerin seçileceği bunların ağırlıklarının ne olacağı ve hangi fiyat endekslerin kullanılacağı önemli bir sorun olarak karşımıza çıkar. Efektif endeks oluşturulurken yukarıdaki seçimler, söz konusu efektif kur endeksinin hangi amaçlarla kullanılacağına bağlı olarak farklı olabilmektedir.

Yurtiçi ve yurtdışı fiyat endekslerinin seçimin de tüketici fiyatları, toptan eşya fiyatları, ithalat-ihracat fiyatları, Gayrisafi yurtiçi hasıla vb. endeksler kullanılabilir¹⁰.Uluslar arası rekabeti ölçme açısından TÜFE en yaygın kullanılan fiyat endeksidir¹¹.

Çalışma aşağıdaki gibi organize edilmiştir. 2. kısımda Meixner süreci tanımlanarak temel özellikleri irdelenmiştir. 3. kısımda, Meixner dağılımının simülasyonu konusu ele alınmış, 4. kısımda, Meixner dağılımının efektif döviz kurları için bir model olarak kullanımı araştırılmış, 5. kısımda ise çalışmanın sonuçları yer almıştır.

2. Meixner Süreci

2.1 Levy Modelleri

Black-Scholes modelinde opsiyona konu olan baz menkul kıymetin getirilerinin normal dağılmış olduğu kabul edilir. Bu varsayım deneysel bulgularla tam uyuşmamaktadır. Deneysel gerçekleri daha iyi temsil edebilmek için literatürde farklı yaklaşımlar önerilmiştir. Bu alternatifler arasında en popüler olanı ise üstel Levy modelleri sınıfıdır. Black-Scholes modelinde temel (baz) malın fiyat süreci aşağıdaki geometrik Brownian hareket süreci ile modellenmiştir.

Competitiveness, *Review Of World Economics*, 132 (4), 700 – 722,1996.

⁹ Edwards, S., **Exchange Rate Misalignment in Developing Countries**, World Bank Occasional Papers, No.2,1988.

¹⁰ Clark, P., L. Bartiloni,., T. Bayoumi. ve S. Symansky , **Exchange Rates and Economic Fundamentals**, IMF Occasional Papers, No.115, Eylül 1994.

¹¹ Wickham, P. , **A Revised Weighting Scheme for Indicators of Effective Exchange Rates**, IMF Working Paper, No.87,1987..

$$S_t = S_0 \left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \right) \quad (1)$$

Burada $(B_t)_{t \geq 0}$ standart Brownian hareket sürecini göstermektedir. Yeni önerilen modelde, sürecin artımları durağan, bağımsız fakat bu artımların normal dağılmış olması gerekmemektedir.

Tanım (Levy süreci) Sıfır noktasından başlayan, artımları bağımsız ve durağan, örneklem eğrileri sol limitlerle sağ sürekli (cadlag) olan bir $(X_t)_{t \geq 0}$ stokastik sürecine Levy süreci denir.

Brownian hareket çok genel bir X Levy süreci ile yer değiştirdiğinde aşağıdaki formda ifade edilen üstel Levy modeli elde edilir.

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad (2)$$

2.2 Meixner dağılımı

Meixner dağılımı $Meixner(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ ile gösterilir. Bu dağılım sonsuz bölünebilir ve self-decomposable dır. Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki formdadır.

$$f_{Meixner}(x) = \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{2 \alpha \pi \Gamma(2\delta)} \exp(\beta(x - \mu)/\alpha) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x - \mu)}{\alpha}\right) \right|^2 \quad (3)$$

Burada $x \in \mathfrak{R}, \alpha > 0, \beta \in (-\pi, \pi), \delta > 0, \mu \in \mathfrak{R}, i = \sqrt{-1}$

$$\left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x - \mu)}{\alpha}\right) \right|^2 = \left(\int_0^\infty \text{Cos}\left(\frac{x - \mu}{\alpha} \log z\right) z^{\delta-1} e^{-z} dz \right) \quad (4)$$

$$+ \left(\int_0^\infty \text{Sin}\left(\frac{x - \mu}{\alpha} \log z\right) z^{\delta-1} e^{-z} dz \right)$$

$|\Gamma(x + iy)|^2 \sim 2\pi|y|^{2x-1} \exp(-\pi|y|)$, $|y| \rightarrow \infty$ Olduğundan,

$$f(x) = \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{2 \alpha \pi \Gamma(2\delta)} \exp\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{ix}{\alpha}\right) \right|^2, \quad (\mu = 0)$$

$$\sim \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{2 \alpha \pi \Gamma(2\delta)} \exp\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) 2\pi \left| \frac{x}{\alpha} \right|^{2\delta-1} \exp\left(-\pi \left| \frac{x}{\alpha} \right|\right)$$

Olarak ifade edilebilir. $\beta = 0$ için Meixner dağılımı μ mod'u civarında simetrik olur. Meixner dağılımının karakteristik fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir¹².

$$\phi_X(u) = \left(\frac{\cos(\beta/2)}{\cosh\left(\frac{\alpha u - i\beta}{2}\right)} \right)^{2\delta} \exp(iu\mu) \quad (5)$$

İspat:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E(e^{iux}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp\left(\frac{\beta(x-\mu)}{\alpha} + iux\right) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x-\mu)}{\alpha}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp\left(\left(\frac{\beta + iu\alpha}{\alpha}\right)(x-\mu) + iu\mu\right) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x-\mu)}{\alpha}\right) \right|^2 dx \\ &= \frac{(2 \cos(\beta/2))^{2\delta}}{\left(2 \cos\left(\frac{\beta + iu\alpha}{2}\right)\right)^{2\delta}} \exp(iu\mu) \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(2 \cos\left(\frac{\beta + iu\alpha}{2}\right)\right)^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(a\delta)} \exp\left(\left(\frac{\beta + iu\alpha}{\alpha}\right)(x-\mu)\right) \left| \Gamma\left(\delta + \frac{i(x-\mu)}{\alpha}\right) \right|^2 dx \\ &= \left(\frac{\cos(\beta/2)}{\cos\left(\frac{\beta + iu\alpha}{2}\right)} \right)^{2\delta} \exp(iu\alpha) \\ &= \left(\frac{\cos(\beta/2)}{\cosh\left(\frac{u\alpha - i\beta}{2}\right)} \right)^{2\delta} \exp(iu\mu) \quad \square \end{aligned}$$

¹² Grigelionis, B., **Generalized Z-distributions and related stochastic processes.**

Mathematics Informatikos Institutas preprintas Nr.2000-22, Vilnius.2000.

X Meixner sürecinin kümülant doğuran süreci:

$$\kappa_X(u) = 2\delta \log(\cos(\beta/2)) - 2\delta \log\left(\cos\left(\frac{u\alpha + \beta}{2}\right)\right) + u\mu \quad (6)$$

Eğer $X_1 \sim \text{Meixner}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ dağılmış ise $X_t \sim \text{Meixner}(\alpha, \beta, t\delta, t\mu)$ dağılmıştır. Meixner dağılımının tüm mertebelerden momentleri mevcuttur. Dağılım her zaman normal dağılımdan daha sivridir.

$X \sim \text{Meixner}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$		
Ortalama	$E(X)$	$\mu + \alpha\delta \tan(\beta/2)$
Varyans	$\text{Var}(X)$	$\frac{\delta\alpha^2}{2\cos(\beta/2)}$
Çarpıklık	$\frac{E((X - E(X))^3)}{(\text{Var}(X))^{3/2}}$	$\sin(\beta/2)\sqrt{2/\delta}$
Basıklık	$\frac{E((X - E(X))^4)}{(\text{Var}(X))^2}$	$3 + \frac{2 - \cos(\beta)}{\delta}$

Meixner dağılımının karakteristik fonksiyonuna bakıldığında, dağılımın sonsuz bölünebilir olduğu görülür.

Genelde bir Levy süreci üç kısımdan oluşur bunlar; lineer bileşen, Brownian hareket bileşeni ve sıçrama bileşenidir. Bu formdaki bir gösterimde Meixner süreci, Brownian hareket bileşenine sahip değildir. Meixner sürecinin sıçramaları aşağıdaki şekilde ifade edilen Levy ölçümü kullanılarak ölçülür.

$$\nu(dx) = \delta \frac{\exp(\beta x/\alpha)}{x \sinh(x\pi/\alpha)} dx \quad (7)$$

$\nu(dx)$ Levy ölçümü sıçramaların nasıl oluştuğunu gösterir.

Meixner süreci kısa zaman aralıklarında, yani $h \downarrow 0$ durumunda,

$$\left\{ \frac{1}{h\alpha\delta} (X_{ht} - h\mu t) \right\}_{t \geq 0}$$

Şeklinde tanımlanan süreç, Cauchy Levy sürecine yakınsar. Daha uzun zaman aralıklarında, yani $h \uparrow +\infty$ durumunda ise

$$\left\{ \frac{\cos(\beta/2)}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{h\delta}} (X_{ht} - ht(\mu + \alpha \delta \tan(\beta/2))) \right\}_{t \geq 0}$$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan süreç, standart Brownian harekete yakınsar¹³.

Meixner Dağılımının Kuyrukları

Meixner dağılımının kuyrukları yarı-kalın kuyruklar olarak adlandırılır. Meixner dağılımı; normal dağılım ile kalın kuyruklu dağılımlar arasında yer alan bir dağılımdır.

$$f_{Meixner}(x) \sim C_- |x|^\rho e^{-\sigma_- |x|}, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$f_{Meixner}(x) \sim C_+ |x|^\rho e^{-\sigma_+ |x|}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (8)$$

$$\rho \in \mathfrak{R}, \quad C_-, C_+, \sigma_-, \sigma_+ \geq 0$$

$$\rho = 2\delta - 1, \quad \sigma_- = \frac{(\pi - \beta)}{\alpha}, \quad \sigma_+ = \frac{(\pi + \beta)}{\alpha}$$

2.2.1 Parametrelerin Moment Takdircileri

Meixner dağılımının momentleri, dağılımın teorik momentleri, örnek momentlerine eşitlenerek elde edilirler.

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_1 = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}}, \quad b_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2} \quad (9)$$

$$\hat{\alpha} = \sqrt{m_2(2b_2 - 3b_1^2 - 6)}$$

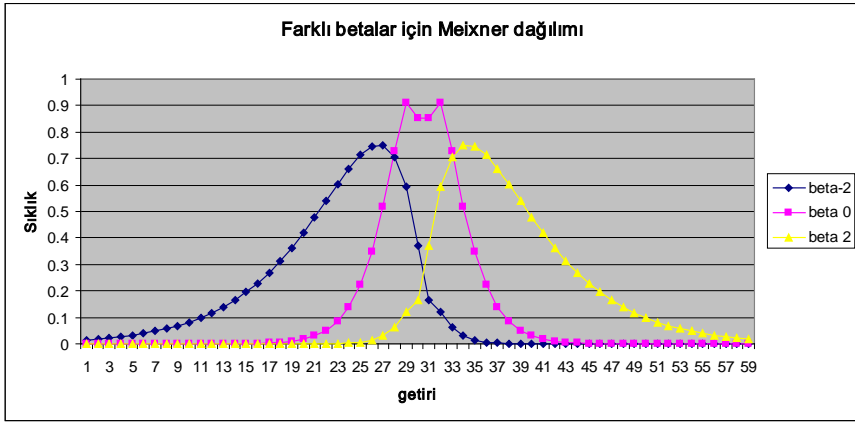
$$\hat{\beta} = \text{sign}(b_1) \arccos\left(\frac{b_2 - 2b_1^2 - 3}{b_2 - b_1^2 - 3}\right)$$

¹³ Rosinski, J., **Tempering stable processes**, Stochastic Processes and their Applications, 117(6), 677-707. 2007.

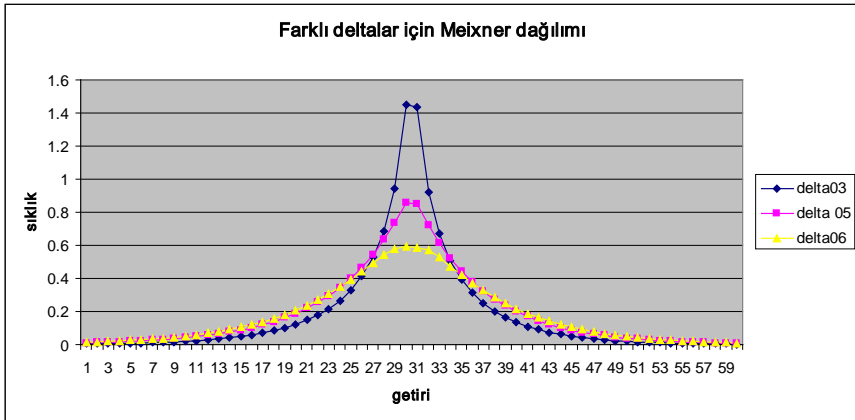
$$\hat{\delta} = \frac{1}{b_2 - b_1^2 - 3} \quad , \quad \hat{\mu} = m_1 - \hat{\alpha} \hat{\delta} \tan\left(\frac{\hat{\beta}}{2}\right) \quad (10)$$

$2b_2 - 3b_1^2 - 6 \geq 0$ ve $b_2 - b_1^2 - 3 \geq 0$ koşullarının sağlanması gerekir. Eğer $b_2 < 2b_1^2 + 3$ ise moment takdircisi metodu uygulanamaz.

Şekil 1: Farklı beta değerleri için Meixner dağılımları



Şekil 2: Farklı delta değerleri için Meixner dağılımları



3. Meixner Dağılımının Simülasyonu

Meixner dağılımının kuantil fonksiyonu kapalı formda yazılmadığından, benzetim için kabul-red metodunu kullanacağız. $f(x)$ Meixner dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere, x in her değeri için $f(x) \leq k g(x)$

olacak şekilde uygun bir $g(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu seçilir. $k \geq 1$ sabitinin bilinmesi gerekir¹⁴. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer hususta $g(x)$ in kümülatif dağılım fonksiyonunun, tersi kolayca belirlenebilen bir fonksiyon olmasıdır. Meixner dağılımının herhangi bir parametre değeri için $f(x)$ fonksiyonuna göre daha baskın olan uygun bir $g(x)$ dağılımı olarak Johnson dağılım ailesinden bir dağılım seçilebilir¹⁵. Seçilecek olasılık yoğunluk fonksiyonunun kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$G(x; a, b, c, d) = \Phi\left(c + dh\left(\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad (11)$$

Burada Φ standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Johnson ailesinden seçilen olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(y)$, bu fonksiyonu doğuran rastsal değişkende Y olsun¹⁶. Bu durumda, $g(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun açık formu aşağıdaki gibi verilir.

$$g(y; a, b, c, d) = \frac{1}{a} f_{JS}\left(\frac{y-a}{b}; 0, 1, c, d\right) \quad (12)$$

$$f_{JS}(t; 0, 1, c, d) = \frac{d}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t^2 + 1}} \exp\left(-\frac{1}{2}(c + d \sinh^{-1}(t))^2\right), t \in \mathfrak{R}$$

$$Z = c + dh\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

olmak üzere yukarıdaki Johnson dağılımının momentleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$E(Y^k) = \int_{\mathfrak{R}} \left[a + b \sinh\left(\frac{z-c}{d}\right) \right]^k \phi(z) dz, k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Burada ϕ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. Y rassal değişkenin sıfır civarındaki momentleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

¹⁴ Devroye, L., **Non uniform random variate generation**, New York, Springer Verlag, 1986.

¹⁵ Grigelletto, M., Provasi, C., **Simulation and estimation of the Meixner distribution**. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 38, 2009, s.58-77.

¹⁶ Johnson, N., Kotz, S., Balakrishnan, N., **Continuous univariate distributions**. Vol.1. 2nd ed. Wiley, New York, 1994.

$$E(Y) = \mu_{JS} = a - b\sqrt{\xi} \sinh(\nu)$$

$$Var(Y) = \sigma_{JS}^2 = \frac{b^2}{2} (\xi - 1)(\xi \cosh(2\nu) + 1)$$

$$b_1^{JS} = -\frac{\sqrt{\xi} (\xi - 1)^2 [\xi (\xi + 2) \sinh(3\nu) + 3 \sinh(\nu)]}{\sqrt{2} [(\xi - 1)(\xi \cosh(2\nu) + 1)]^{3/2}}$$

Yukarıdaki formülde,

$$\xi = \exp(1/d^2) \quad \text{ve} \quad \nu = c/d \quad \text{dir.}$$

Meixner dağılımının momentleriyle Johnson dağılımının momentleri eşitlenerek buradan (a, b, c, d) parametreleri tahmin edilir. Bu tahmin işleminde ilk olarak, yukarıdaki dört moment denkleminde son ikisi kullanılarak c ve d parametreleri belirlenir. Sonrada ilk iki denklemden a ve b parametreleri elde edilir. k sabiti ise Meixner dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun Johnson dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonuna oranının en büyük değeri olarak seçilir.

Meixner dağılımının simülasyon işlemi aşağıdaki gibi özetlenebilir¹⁷.

1. Johnson dağılımının parametreleri $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ tahmin edilir.
2. k sabitinin değeri belirlenir.
3. $U \sim N(0,1)$ değerleri türetilir.
4. Johnson dağılımından aşağıdaki dönüşüm kullanılarak bir x^* değeri türetilir.

$$x^* = \hat{a} + \hat{b} \sinh \left[\left(\frac{z - \hat{c}}{\hat{d}} \right) \right], \quad z \sim N(0,1)$$

5. Eğer

$$U \leq \frac{1}{k} \frac{f_{Meixner}(x^*; \alpha, \beta, \delta, \mu)}{g_{JS}(x^*; \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})}$$

ise x^* $Meixner(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ dağılımından elde edilmiş bir değer olarak kabul edilir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik sağlanmıyorsa, 3. adıma gidilerek yeni bir U değeri seçilerek işlemler benzer şekilde tekrarlanır.

¹⁷ Grigelletto, M., Provasi, C., 2009, a.g.e. s.62-63.

Meixner Dağılımının Tam Simülasyonu¹⁸

$\alpha = 1$ ve $\delta = 1/2$ Sabit değerleri için,

$$\left(\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{K_1}{K_2} \right) \right) \sim \text{Meixner}(1, \beta, 1/2, 0)$$

$K_1 \sim \text{Gamma}((1/2 + \beta)/2\pi, 1)$ ve $K_2 \sim \text{Gamma}((1/2 - \beta)/2\pi, 1)$

Algoritma:

$\text{Meixner}(\alpha, 0, \delta, \mu)$ Dağılımının simülasyonu ;

$$V = \frac{\alpha}{2} \max(\sqrt{2\delta}, 2\delta) \frac{U_1}{U_2}$$

U_1 ve U_2 $(-1, +1)$ Aralığın da düzgün (üniform) dağılmış bağımsız rastsal değişkenlerdir.

Adım1: U ve V rastsal değişkenleri türetilir.

Eğer $|V| < \left[\alpha \max(\sqrt{2\delta}, 2\delta) \right] / 2$ ise adım 3'e gidilir.

$$\text{Adım 2: Eğer, } \frac{\max(1, 2\delta) \alpha^2 \Gamma(\delta + 1)^2}{2\delta} U < \left| \Gamma\left(\delta + i \frac{V}{\alpha}\right) \right|^2 V^2$$

İse $X \leftarrow V$ aksi takdirde, adım 1'e gidilir.

$$\text{Adım 3: Eğer } \Gamma(\delta)^2 U < \left| \Gamma\left(\delta + i \frac{V}{\alpha}\right) \right|^2 \text{ ise } X \leftarrow V$$

Aksi takdirde adım1' geri dönlür.

Ayrıca Essher dönüşümü kullanılarak $\text{Meixner}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ dağılımı, aşağıdaki şekilde türetilbilir.

$$\tilde{X} = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}(X - \mu) + 2\delta \ln \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

¹⁸ Kawai, R, **Parameter sensitivity estimation for Meixner distribution and Levy processes**, Working paper, Department of mathematics, University of Leicester, p.8-10.2010.

4.1. Meixner Dağılımının Esscher Dönüşümü

Bir menkul kıymetin fiyatının $S_t = S_0 e^{X_t}$ süreci ile modellendiğini ve bununla gerçek dünya olasılık ölçümü P altında bir $Meixner(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ dağılımına sahip olduğunu kabul edelim. Burada X_t sürecindeki değişimi $Z_t = X_t - X_{t-1}$ ile göstereceğiz. $M^P(\theta)$ Sonlu, sıfırdan farklı ve $-\pi < \beta + \theta\alpha < \pi$ koşulu sağlanıyorsa, o zaman θ parametresine göre bir Q Esscher dönüşümü vardır. Eğer $-\pi < \beta + \theta\alpha < \pi - \alpha$ koşulu sağlanıyorsa, $M^P(\theta+1)$ mevcuttur ve $E^Q(e^{X_1})$ üstel momenti sonludur. $\alpha < 2\pi$ olması durumunda ise θ için aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$\theta^* = -\frac{1}{\alpha} \left(\beta + \tan \left(\frac{-\cos(\alpha/2) + \exp[(\mu - r)/2\delta]}{\sin(\alpha/2)} \right) \right) \quad (14)$$

Q Esscher dönüşümü altında $Z_t = X_1$, $Meixner(\alpha, \beta + \theta^*\alpha, \delta, \mu)$ dağılmıştır. Ayrıca $(e^{-rt} X_t)$ iskonto edilmiş fiyat süreci Q martingaledir.

Meixner dağılımı Esscher dönüşümü altında kapalıdır. Yani gerçek dünyadan gözlenmiş olan süreç, Meixner dağılımına sahipse bu süreçten elde edilen risk – yansız süreçte Meixner dağılmıştır. Q Denk martingale ölçümü, bir Levy sürecinin ortalama-düzeltilmiş üsteli ile elde edilir. Bu durumda, risk-yansız süreç aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp(X_t) \frac{\exp(rt)}{E(\exp(X_t))} \quad (15)$$

Yukarıdaki \tilde{S} süreci bir Q - $Meixner(\alpha, \beta, \delta, \tilde{\mu})$ süreci izler. Burada $\tilde{\mu}$ risk yansız μ yü gösterir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{\mu} = r - 2\delta \log \left(\frac{\cos(\beta/2)}{\cos[(\alpha + \beta)/2]} \right) \quad (16)$$

Bu durumda risk-yansız olasılık ölçümü altında, Meixner dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki hali alır.

$$f(x, \theta^*) = \frac{\left(2 \cos\left(\frac{\alpha \theta^* + \beta}{2}\right)\right)^{2\delta}}{2\alpha \pi \Gamma(2\delta)} \exp\left(\frac{(\alpha \theta^* + \beta)(x - \mu)}{\alpha}\right) \left|\Gamma\left(\delta + \frac{i(x - \mu)}{\alpha}\right)\right|^2$$

4. Uygulama

Bu çalışmada, T.C. Merkez Bankası'ndan alınan, Tüfe Bazlı Reel Efektif Döviz Kuru Endeksinin Ocak 1980 - Mart 2010 tarihleri arasındaki aylık değerleri ve 03.01.2005 – 07.04.2010 tarihleri arasındaki US Dolar/TL günlük döviz kuru verileri aynı tarihleri kapsayan İMKB 100 bileşik endeks getirileri kullanılmıştır. Çalışmada Tüfe Bazlı Reel Efektif Döviz Kuru Endeksindeki değişimlerin Meixner süreci kullanılarak modellenebileceği gösterilmeye çalışılmıştır.

S_t Efektif kurun t zamanındaki değerini gösterebilir. $X_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$ şeklinde tanımlanan $\{X_t\}_{t \geq 0}$ Reel efektif kurdaki değişimlerin süreci bir Meixner süreci izliyorsa bu durumda, $X_1 \sim \text{Meixner}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ dağılımıdır.

$S_0 > 0, r \geq 0, \sigma > 0, T > 0$ olmak üzere, Reel efektif kur değerleri süreci $\{S_t\}_{t \geq 0}$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_t = S_0 e^{rt} \frac{e^{\sigma X_t}}{E(e^{\sigma X_t})}$$

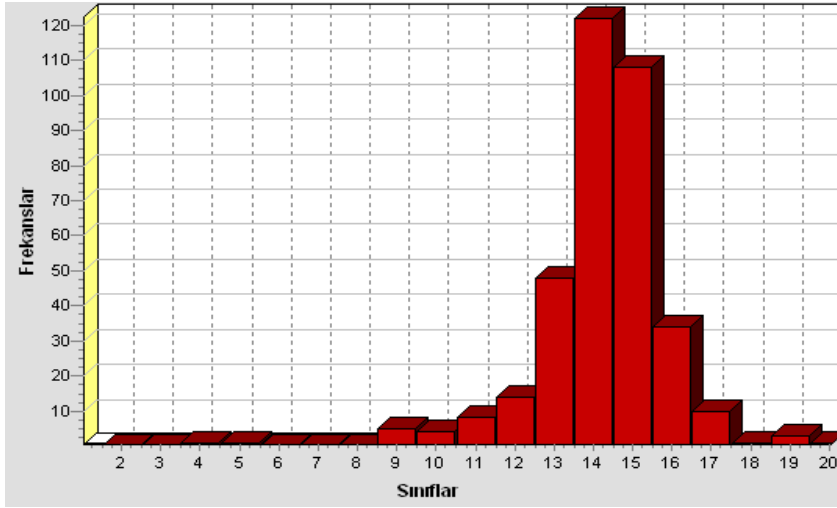
$$\ln S_T = \sigma X_T + \ln S_0 + T \left(r - \sigma \mu - \ln \left(\frac{\cos(\beta/2)}{\cos[(\sigma \alpha - \beta)/2]} \right) \right)^{2\delta}$$

İlk olarak veri kümesinin tanımsal istatistikleri hesaplanmıştır.

Reel efektif kur için tanımsal istatistikler						
Ortlama	Std.Sap	Çarpıklık	Basıklık	Anderson Darling	P değeri	J.B istatistiği
0.0001	0.0397	-2.502	14.331	12.8239	0.0005	2314.169

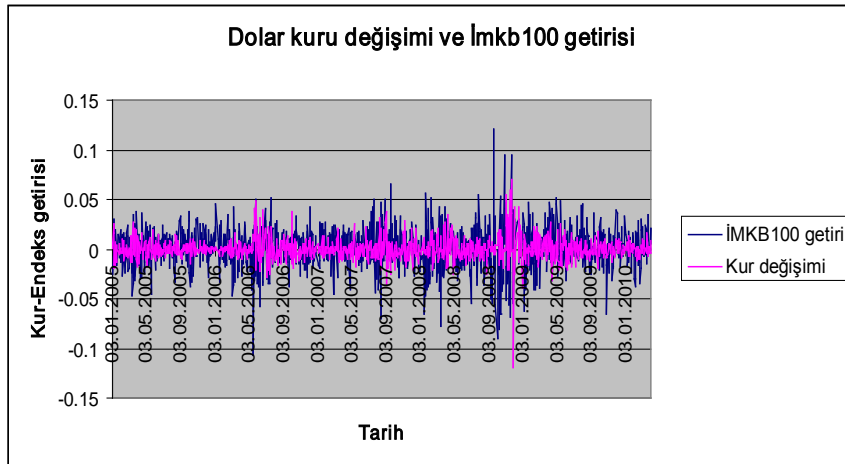
JB-istatistiğinin %95 güven seviyesindeki teorik değeri 5.99, %99 güven seviyesindeki teorik değeri ise 9.21 dir

Şekil 3: Reel efektif kurdaki değişimlerin histogramı



Yukarıdaki tanımsal istatistiklere ve histogram'a bakıldığında reel efektif kurdaki değişimlerin normal dağılım göstermediği açıkça görülmektedir. Dağılım sola çarpık olup, normal dağılımdan çok daha sivridir.

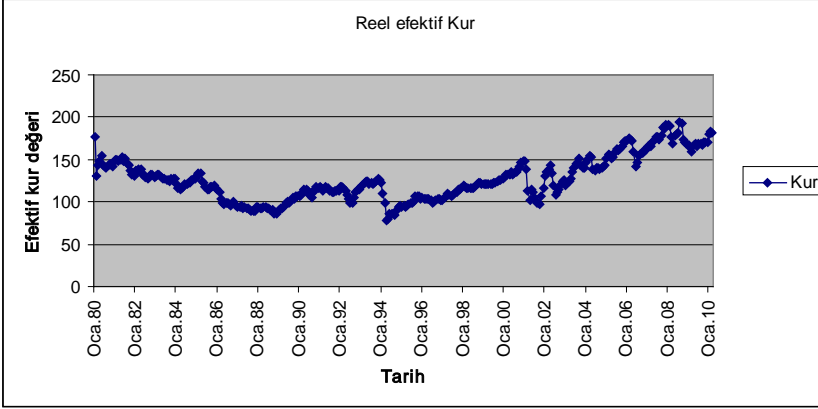
Şekil 4: Dolar kuru değişimi ve İMKB 100 indeksi getirisi



Ekonominin önemli göstergelerinden biri olan İMKB bileşik endeksindeki değişimlerle reel efektif kurdaki değişimin ne ölçüde birlikte hareket ettiğini gözlemlemek efektif kurdaki gelişmeler hakkında önemli bilgiler verecektir. Buna

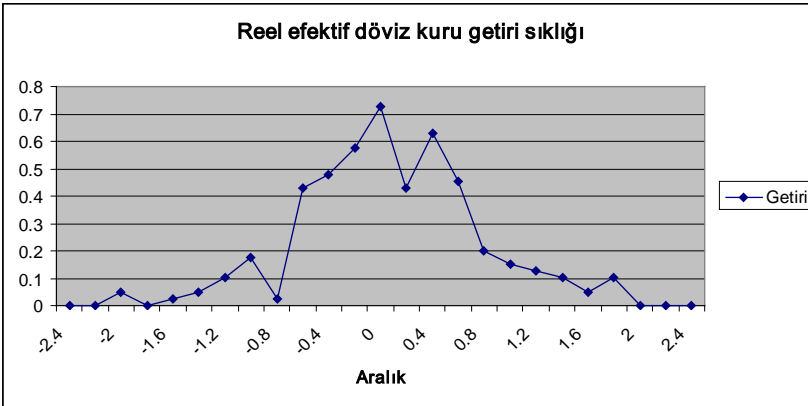
göre incelenen dönem içerisinde İMKB 100 bileşik endeksinin Efektif döviz kuruna göre daha oynak bir yapıya sahip olduğu, efektif kurun bileşik endeksi gecikmeli olarak takip ettiği gözlemlenmektedir.

Şekil 5: Tarihsel reel efektif döviz kuru

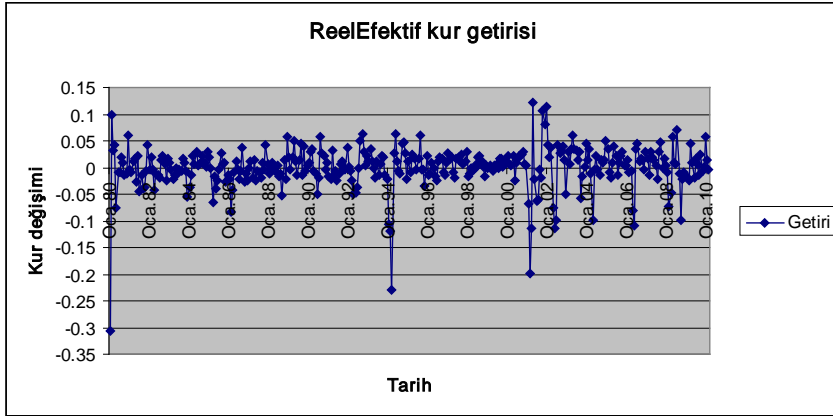


Reel efektif kurun tarihsel verileri incelendiğinde özellikle 1980 ile 1990 yılına kadar monoton bir şekilde azalan bir seyir izlediği, 1990-2004 yılları arasında, oldukça düzgün bir şekilde arttığı ancak 2001 yılında büyük bir kırılma yaşandığı görülmektedir. Bununla birlikte, özellikle 2002 den 2010 yılına kadarki zaman periyodunda ani düşüşlerle birlikte genelde artma eğiliminde olduğu görülmektedir.

Şekil 6: Reel efektif döviz kuru getiri sıklık grafiği



Şekil 7: Reel efektif döviz kuru getiri grafiği



Yukarıdaki şekil 7 grafiğinden de açıkça görülebileceği gibi 1994 yılında çok şiddetli bir değer kaybı, 2001 ve 2009 yıllarında dramatik değışiklikler gerçekleşmiştir.

Şimdi de Tüfe Bazlı Reel Efektif Döviz Kuru Endeksindeki değışimlere Meixner dağılımını uyarlayalım. Bunun için önce kur verileri kullanılarak Meixner dağılımının momentleri, çarpıklığı ve basıklığı hesaplanır. Sonra Meixner dağılımının parametrelerinin moment taktircileri kullanılarak dağılımın dört parametresi takdir edilir.

Tablo 1: Meixner dağılımının ilk dört momentini ile çarpıklık ve basıklık tahmini

m_1	m_2	m_3	m_4	b_1	b_2
8.9367E-05	0.00157	-0.00015	4.23996E-05	-2.33908	17.11682

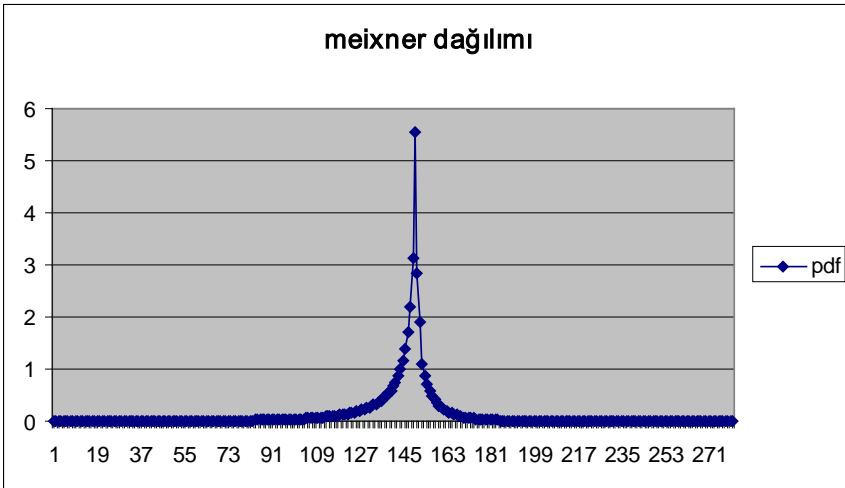
Tablo 2: Reel efektif döviz kuru için Meixner parametrelerinin takdiri

Meixner dağılımının parametrelerinin takdiri			
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$
0.136392	-1.19485	0.115666	0.010823

Şekil 8: Gerçek reel efektif döviz kuru getirisi ve Meixner modeli kullanılarak tahmin edilmiş olan tahmini reel efektif döviz kuru getirisi

Tüfe Bazlı Reel Efektif Döviz Kuru Endeksindeki değişimlerden uyarlanan Meixner dağılımından simüle edilmiş değerlerle endeksin gerçek değişimleri arasındaki uygunluk, grafik olarak yukarıda gösterilmiştir. Bu grafikten de görülebileceği gibi modelden elde edilen değerlerle gerçek değerler iyi bir uyum göstermektedir. Ancak söz konusu modelin kriz dönemlerindeki dramatik değişimleri çok iyi öngöremediği söylenebilir.

Şekil 9: Reel efektif kur için tahmin edilen parametreler kullanılarak elde edilen Meixner dağılımının grafiği



5. Sonuç

Çalışmada, reel efektif kurdaki değişimlerin modellenmesi konusu ele alınmıştır. Reel kur, uluslar arası ticareti yapılan malların yurt içindeki üretim maliyeti olarak yorumlanabilir. Reel kurdaki değişim ülkenin uluslar arası rekabet gücündeki değişimi ifade eder. Reel efektif kur ise bu gösterge için kullanılacak uygun bir endeks olarak düşünülebilir. Şu halde bu endeks'in modellenmesi ve geleceğinin kestirimi oldukça önemli bir konudur. Çalışmamızda kurdaki değişimlerin Meixner süreci kullanılarak modellenmesi araştırılmıştır. Bu süreç, durağan bağımsız artımlar ile esnek bir yapıya sahiptir. Kur değişim verileri için normal dağılımdan ziyade Meixner dağılımının dağılımının daha uygun olacağı tespit edilmiştir. Reel efektif kur verilerine uyarlanmış olan Meixner dağılımdan simülasyon metotları kullanılarak değerler türetilmiştir. Elde edilen bu değerlerin dağılımı ile reel efektif kurdaki gerçek değişim değerleri karşılaştırıldığında modelin gerçek durumu oldukça iyi temsil ettiği görülmüştür. Bununla birlikte herhangi bir modellerin gerçeğin idealleştirilmiş bir temsili olduğu da unutulmamalıdır.

Kaynakça

- CLARK, P., L. BARTILONI,, T. BAYOUMI. VE S. SYMANSKY. **Exchange Rates and Economic Fundamentals**, IMF Occasional Papers, No.115, Eylül 1994.
- CONT,R.,**Empirical Properties of Asset Returns:Stylized Facts and Statistical Issues**. Quantitative finance, 1,223-236,2001.
- DEVROYE,L.,**Non Uniform Random Variate Generation**,New York, Springer-Verlag,1986.
- EDWARDS, S.,**Exchange Rate Misalignment in Developing Countries**, World Bank, Occasional Papers, No.2.1988.
- GRIGELIONIS,B.,**Generalized Z-Distributions and Related Stochastic Processes**.Mathematics Informatikos Institutas preprintas Nr.2000-22,Vilnius.2000.
- GRIGELIONIS,B.,**Pocesses of Meixner Type**, Lithuenian Mathematics Journal, 39(1),33-41,1999.
- GRIGELLETTO,M.,PROVASI,C.,**Simulation and Estimation of the Meixner Distribution**. Communiations in Statistics-Simulation and Computation, 38,2009,s.58-77.
- JOHNSON,N.,KOTZ,S,BALAKRISHNAN,N.,**Continuous Univariate Distributions**. Vol.1.2nd ed. Wiley New York,1994.
- KAWAI, R., **Parameter Sensitivity Estimation for Meixner Distribution and Levy Processes**,Working paper, Department of mathematics, University of Leicester,2010,s.8-10.
- KOEKOEK,R.,SWARTTOUW,R.F.,**The Askey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polinomial and Its q-Analogous**. Report 97-17,Delf University of technology,1998.
- MARSH, I., TOKARIK,S.,**An Assesment of Three Measures of Competitieness**, Review of World Economics,132 (4),700-722,1996.
- ROSINSKI,J.,**Tempering Stable Processes**, Stochastic Processes and Their Applications,117(6), 677-707. 2007.
- SCHOUTENS,W.,TEUGELS,J.L.,**Levy Processes Polinomial and Martingales**. Communications in Statistics; Stochastic Models, 14,335-349, 1998.
- SCHOUTENS,W.,**The Meixner Processes in Finance**, Eurorandom report, 2001-002,Eurorandom,Eindhoven,2001.
- SCHOUTENS,W.,**Meixner Processes: Theory and Applications in Finance**. Eurorandom report,2002-004, Eurorandom,Eindhoven,2002.
- WICKHAM, P.,A.,**Revised Weighting Scheme for Indicators of Effective ExchangeRates**, IMF Working Paper, No.87,1987.

