Batman University Journal of Life Sciences | Batman Üniversitesi Yaşam Bilimleri Dergisi
Volume 7, Issue 2/2 (2017) | Cilt 7 Sayı 2/2 (2017)

Katlılığı 6 Olan Saturated Sayısal Yarıgruplar Üzerine

Meral SÜER[1], Sedat İLHAN[2], Ahmet ÇELİK[3]

[1] *Yrd. Doç. Dr., Batman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,BATMAN,*
meral.suer@batman.edu.tr
[2] *Doç. Dr., Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, DİYARBAKIR,*
sedati@dicle.edu.tr
[3] *Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, DİYARBAKIR,*
Celk_ahmet@hotmail.com

Geliş Tarihi/Received:	Kabul Tarihi/Accepted:	Yayın Tarihi/Published:
23.10.2017	30.11.2017	27.12.2017

ÖZ

İlk olarak sayısal yarıgrup problemi, “ Sayısal yarıgruba ait olmayan en büyük tamsayıyı üreteçleri cinsinden nasıl ifade edilebilir?” şeklinde olup, 19. yy sonunda karşımıza çıkmıştır. Sayısal yarıgrup çalışan ilk matematikçiler Frobenius ve Sylvester’dır. Sayısal yarıgrup kavramı günümüzde de hala matematikçilerin ilgi alanındadır. Sayısal yarıgrup problemleri, sayılar teorisi ile bağlantılı olduğu gibi matematiğin diğer alanlarında ve bilgisayar bilimleri ile de ilgilidir. Diophant moduler eşitsizliklerin çözümünde, liner tamsayı programlamada, şifrelemede, değişmeli cebir ve cebirsel geometrinin uygulamalarında özel ilgi alanı oluşturmuştur. Bu bağlamda saturated sayısal yarıgruplarda literatürde önemli çalışmalarda yer almış. Özellikle saturated halkaların, yarıgruplar teorisine geçişi olarak karşımıza çıkmış. Bu çalışmadaki amacımız katlılığı 6 ve kondüktörü C olan saturated sayısal yarıgruplar üzerine çalışmaktır. Burada C, 6 dan büyük veya eşit ve k negatif olamayan tamsayı olmak üzere 6k+1 den farklı olarak yazılabilen pozitif bir tamsayıdır. Katlılığı 6 ve kondüktörü C olan tüm saturated sayısal yarıgrupları elde edip bu sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı, belirteç sayısı ve cinsini bu yarıgrupların üreteçleri ile ifade edeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Saturated sayısal yarıgrup, Frobenius sayısı, cins.

On Saturated Numerical Semigroups With Multiplicity 6

ABSTRACT

The numerical semigroup problem is first encountered as "How can the largest integer that do not belong to the numerical semigroup be expressed in terms of its generators?" at end of the 19th century. The first mathematicians working on the numerical semigroup are Frobenius and Sylvester. The concept of the numerical semigroup is still interested of mathematicians. Numerical semigroup problems are related to other areas of mathematics and computer science, as well as to number theory. It has created a special interest in the solution of Diophant modular inequalities, in linear integer programming, in cryptography, in the applications of algebraic algebra and algebraic geometry. In this context, the saturated numerical semigroups have taken place in important studies in the literature. Especially, we encounter transition to semigroup theory of saturated rings. The aim of this work is to study the saturated numerical semigroups with the multiplicity 6 and the conductor C. Where C is an integer greater than or equal to 6, however, C is different from 6k+1 with non-negative integer k. We will express the Frobenius number, the determiner number and the genus of these numerical semigroups with the generators of these semigroups.

Keywords: Saturated numerical semigroup, Frobenius number, genus.

1. GİRİŞ

$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ sırasıyla tamsayılar kümesi ve negatif olmayan tamsayılar kümesi olarak verilsin. $S \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere, eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa S ye sayısal yarıgrup denir:

(1) $\forall\ a,b \in S$ için $a+b \in S$ dir. (2) $\mathbb{N} \backslash S$ kümesi sonludur. (3) $0 \in S$ dir.

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $s_1, s_2, s_3, ..., s_n \in S$ için $s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n$ olacak şekilde $S =< s_1, s_2, s_3, ..., s_n >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i n_i : n_i \in \mathbb{N} \right\}$ şeklinde yazılabildiği ve

$$\#(\mathbb{N} \setminus S) < \mathbb{N} \Leftrightarrow obeb(s_1, s_2, ..., s_n) = 1$$

olduğu bilinmektedir (Fröberg vd., 1987). Bu çalışmada bir M kümesinin eleman sayısını $\#(M)$ ile göstereceğiz.

Eğer S sayısal yarıgrubu için $S = \langle A \rangle$ ise $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesine S nin bir *üreteç sistemi* denir. S yi üreten A nın özalt kümesi yoksa A kümesine S nin *minimal üreteç sistemi* denir.

Bununla birlikte, her sayısal yarıgrubun minimal üreteç sisteminin tek olduğu ve üreteç sisteminin sonlu elemana sahip olduğu bilinmektedir. Eğer $\{s_1 < ... < s_n\}$, S nin minimal üreteç sistemi ise, S deki en küçük sayı olan s_1 sayısına S *nin katlılığı* denir ve $m(S)$ ile gösterilir. S nin minimal üreteç sisteminin eleman sayısına S nin *indirgenme boyutu* denir ve $e(S)$ ile gösterilir. Genelde, $e(S) \leq m(S)$ dir. Eğer $e(S) = m(S)$ oluyorsa S sayısal yarıgrubuna *maksimal indirgenme boyutludur* denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Bir S sayısal yarıgrubunda $F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\}$ ve $n(S) = \#(\{0, 1, ..., F(S)\} \cap S)$ sayılarına, sırasıyla S sayısal yarıgrubunun *Frobenius* ve *belirteç sayısı* denir. Bu durumda $S =< s_1, s_2, s_3, ..., s_n >= \{0, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, F(S)+1, \rightarrow ...\}$ şeklinde yazılabilir ki burada $s_i < s_{i+1}$, $n = n(S)$ ve "$\rightarrow$" sembolü $F(S)+1$ sayısından sonraki tamsayıların S sayısal yarıgrubunda olduğu anlamındadır (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

$\mathbb{N} \setminus S$ kümesinin elemanlarına S nin *boşlukları* denir ve bu elemanların kümesi $H(S)$ ile gösterilir. Bu durumda, $H(S) = \mathbb{N} \setminus S$ olarak ifade edilir. Ayrıca, $H(S)$ kümesinin eleman sayısına S nin *cinsi(türü)* denir ve $G(S)$ ile gösterilir. Yani $G(S) = \#(H(S))$ yazılır. Bununla birlikte, bir S sayısal yarıgrubunda, $G(S) + n(S) = F(S) + 1$ eşitliği mevcuttur.

Bir S sayısal yarıgrubunda $x \geq y \geq z$ olacak şekilde $\forall\, x, y, z \in S$ için $x + y - z \in S$ oluyorsa S ye *Arf sayısal grubu* adı verilir. Öte yandan, Arf sayısal yarıgrubunun maksimal indirgenme boyutlu olduğu ama tersinin doğru olmadığı bilinmektedir (Rosales vd., 2004b).

S bir sayısal yarıgrup, $i = 1, 2, ..., m$ için $s_i \leq s$ olacak şekilde $s, s_i \in S$ ve $d_1 s_1 + d_2 s_2 + ... + d_m s_m \geq 0$ olsun. Eğer $s + d_1 s_1 + d_2 s_2 + ... + d_m s_m \in S$ olsuyorsa S ye *saturated sayısal yarıgrup* denir. Ayrıca, her saturated sayısal yarıgrup bir Arf yarıgruptur. Ama tersi doğru olmayabilir (Rosales vd., 2004a).

Son zamanlarda, Arf ve saturated sayısal yarıgrupları üzerine litaratürde bir çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları, belirli kondüktörlü ve katlılığı 7 ye kadar olan bütün Arf sayısal yarıgrupları elde edilmiş ve bunlardan (katlılığı 6 olanlar hariç) bütün saturated sayısal yarıgruplarının yapıları ve bunların değişmezleri hakkında bazı sonuçlar verilmiştir (Garcia-Sanchez vd., 2016; İlhan, 2016; İlhan ve Süer, 2016a,2016b; Süer, 2016; Çelik vd., 2016).

Bu çalışmada, katlılığı 6 ve kondüktötü $C \geq 6$, $C \neq 6k + 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ olan bütün saturated sayısal yarıgruplarını ve bunların Frobenius sayıları, belirteç sayıları ve boşluklarının sayısı olan cinsleri için formüller vereceğiz.

2. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, katlılığı 6 ve kondüktörü $C \geq 6$ ve $C \neq 6k + 1$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ olan S saturated sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı, belirteç sayısı ve cinsi için formüller vereceğiz.

Önerme 1. S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, aşağıdakiler denktirler:

[1] S bir saturated sayısal yarıgruptur.

[2] Her $y \in S$, $y > 0$ için $d_S(y) = obeb\{x \in S : x \leq y\}$ olmak üzere, $y + d_S(y) \in S$ dir.

[3] Her $y \in S$, $y > 0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $y + m.d_S(y) \in S$ (Rosales, 2009).

Teorem 2. Katlılığı 6 ve kondüktörü $C \neq 6k + 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ olan Arf sayısal yarıgruplar aşağıdakilerden biridir:

(a) $C \equiv 0 (\bmod 6)$ ise

(1) $S = <6, C+1, C+2, C+3, C+4, C+5>$

(2) $S = <6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5>$

(3) $S = <6, 6u+3, C+1, C+2, C+4, C+5>$

(4) $S = <6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5>$

burada $u = 1, 2, ..., \frac{C-6}{6}$ dir.

(b) $C \equiv 2 (\bmod 6)$ ise

(1) $u = 1, 2, ..., \frac{C-2}{6}$ için $S = <6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5>$

(2) $u = 1, 2, ..., \frac{C-8}{6}$ için $S = <6, 6u+3, C, C+2, C+3, C+5>$

(3) $u = 1, 2, ..., \frac{C-8}{6}$ için $S = <6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5>$ dir.

(c) $C \equiv 3 (\bmod 6)$ ise $u = 1, 2, ..., \frac{C-3}{6}$ için $S = <6, 6u+3, C+1, C+2, C+4, C+5>$ dir.

(d) $C \equiv 4 (\bmod 6)$ ise

(1) $S = <6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5>$

(2) $S = <6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5>$

burada $u = 1, 2, ..., \frac{C-2}{6}$ dir.

(e) $C \equiv 5 (\bmod 6)$ ise

(1) $u = 1, 2, ..., \frac{C-5}{6}$ için $S = <6, 6u+3, C, C+2, C+3, C+5>$ dir.

(2) $S = <6, C, C+2, C+3, C+4, C+5>$ dir. (Rosales vd., 2016).

Teorem 3. Katlılığı 6, kondüktörü $C \neq 6k + 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ olan ve Teorem 2'de verilen Arf sayısal yarıgruplarının hepsi saturated sayısal yarıgrupturlar.

İspat:

(a) $C \equiv 0 (\bmod 6)$ için, yani $C = 6k$, $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ için

(1) $S = <6, C+1, C+2, C+3, C+4, C+5>$ ise o zaman

$S = <6, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5> = \{0, 6, 12, ..., 6(k-1), 6k, \rightarrow ...\}$

yazarız. Bu durumda, $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 6$ olup $s + d_S(s) = s + 6 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(2) $u = 1, 2, ..., \frac{C-6}{6}$ için, yani $u = 1, 2, ..., k-1$ için

$S = < 6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5 >$ ise o zaman

$$S = < 6, 6u+2, 6u+4, 6k+1, 6k+3, 6k+5 > \\ = \{0, 6, 12, 14, 16, 18, ..., 6(k-1)+2, 6(k-1)+4, ..., 6k, \to ...\}$$

yazarız. Bu durumda $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 2$ olup $s + d_S(s) = s + 2 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(3) $u = 1, 2, ..., \frac{C-6}{6}$ için, yani $u = 1, 2, ..., k-1$ için

$S = < 6, 6u+3, C+1, C+2, C+4, C+5 >$ ise o zaman

$$S = < 6, 6u+3, 6k+1, 6k+2, 6k+4, 6k+5 > \\ = \{0, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 6(k-1)+3, ..., 6(k-1), 6k, \to ...\}$$

yazarız. Bu durumda, $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 3$ olup $s + d_S(s) = s + 3 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(4) $u = 1, 2, ..., \frac{C-6}{6}$ için, yani $u = 1, 2, ..., k-1$ için $S = < 6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5 >$ ise o zaman

$$S = < 6, 6u+4, 6u+8, 6k+1, 6k+3, 6k+5 > \\ = \{0, 6, 10, 12, 14, 16, 18, ..., 6(k-1)+4, 6(k-1)+8, ..., 6(k-1), 6k, \to ...\}$$

yazarız. Bu durumda, $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 2$ olup $s + d_S(s) = s + 2 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(b) $C \equiv 2 \pmod 6$, yani $C = 6k+2$, $k \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$ için

(1) $u = 1, 2, ..., \frac{C-2}{6}$ için $S = < 6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5 >$ ise o zaman

$S = < 6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5 > = \{0, 6, 8, 10, 14, 16, 18, ..., 6(k-1)+2, 6k+2, \to ...\}$

yazarız. Bu durumda, $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 2$ olup $s + d_S(s) = s + 2 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(2) $u=1,2,\dots,\frac{C-8}{6}$ için $S=\langle 6,6u+3,C,C+2,C+3,C+5\rangle$ ise o zaman $u=1,2,\dots,k-1$ için

$$S=\langle 6,6u+2,6k+2,6k+4,6k+5,6k+7,\rangle$$
$$=\{0,6,12,14,16,18,\dots,6(k-1)+2,6(k-1)+4,\dots,6k+2,\to\dots\}$$

yazarız. Bu durumda, $s>0,\ s\in S$ için

(i) $s\leq C$ ise $d_S(s)=obeb\{x\in S: x\leq s\}=2$ olup $s+d_S(s)=s+2\in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s>C$ ise $d_S(s)=1$ olup $s+d_S(s)=s+1\in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(3) $u=1,2,\dots,\frac{C-8}{6}$, yani $u=1,2,\dots,k-1$ için

$S=\langle 6,6u+4,6u+8,C+1,C+3,C+5\rangle$ ise o zaman

$$S=\langle 6,6u+4,\ 6u+8,6k+3,6k+5,6k+7\rangle$$
$$=\{0,6,10,12,14,16,18,\dots,6(k-1)+4,\dots,6k+2,\to\dots\}$$

yazarız. Bu durumda, $s>0,\ s\in S$ için

(i) $s\leq C$ ise $d_S(s)=obeb\{x\in S: x\leq s\}=2$ olup $s+d_S(s)=s+2\in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s>C$ ise $d_S(s)=1$ olup $s+d_S(s)=s+1\in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(c) $C\equiv 3(\bmod 6)$, $C=6k+3$ ve $u=1,2,\dots,\frac{C-3}{6}$ için

$S=\langle 6,6u+3,\ C+1,C+2,C+4,C+5\rangle$ olsun. O zaman

$$S=\langle 6,6u+3,\ 6k+4,6k+5,\ 6k+7,6k+8\rangle$$
$$=\{0,6,9,12,15,18,\dots,6k+3,\to\dots\}$$

yazarız. Bu durumda,

(i) $s\leq C$ ise $d_S(s)=obeb\{x\in S: x\leq s\}=3$ olup $s+d_S(s)=s+3\in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s>C$ ise $d_S(s)=1$ olup $s+d_S(s)=s+1\in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(d) $C\equiv 4(\bmod 6)$ ise

(1) $u=1,2,\dots,\frac{C-4}{6}$ yani $u=1,2,\dots,k$ için

$S=\langle 6,6u+2,6u+4,C+1,C+3,C+5\rangle$ sayısal yarıgrup ise o zaman $S=\langle 6,6u+2,6u+4,C+1,C+3,C+5\rangle=\{0,6,8,10,12,14,18,\dots,6k+2,6k+4,\to\dots\}$ yazarız.

Bu durumda, $s>0,\ s\in S$ için

(i) $s\leq C$ ise $d_S(s)=obeb\{x\in S: x\leq s\}=2$ olup $s+d_S(s)=s+2\in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s>C$ ise $d_S(s)=1$ olup $s+d_S(s)=s+1\in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(2) $u=1,2,\dots,\frac{C-4}{6}$ yani $u=1,2,\dots,k$ için

$S=\langle 6,6u+4,6u+8,C+1,C+3,C+5\rangle$ ise o zaman

$S=\langle 6,6u+4,6u+8,C+1,C+3,C+5\rangle=\{0,6,10,12,14,16,18,\dots,6k+2,6k+4,\to\dots\}$

yazarız. Bu durumda, $s>0,\ s\in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 2$ olup $s + d_S(s) = s + 2 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(e) $C \equiv 5(\bmod 6)$ ise

(1) $u = 1, 2, ..., \frac{C-5}{6}$ yani $u = 1, 2, ..., k$ için $S = < 6, 6u+3, C, C+2, C+3, C+5 >$ sayısal yarıgrup ise o zaman $S = < 6, 6u+3, C, C+2, C+3, C+5 > = \{0, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 6k+3, 6k+5, \rightarrow ...\}$ yazarız. Bu durumda, $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 3$ olup $s + d_S(s) = s + 3 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

(2) $S = < 6, C, C+2, C+3, C+4, C+5 >$ sayısal yarıgrubu ise o zaman $S = < 6, C, C+2, C+3, C+4, C+5 > = \{0, 6, 12, 18, ..., 6k+5, \rightarrow ...\}$

yazarız. Bu durumda, $s > 0$, $s \in S$ için

(i) $s \le C$ ise $d_S(s) = obeb\{x \in S : x \le s\} = 6$ olup $s + d_S(s) = s + 6 \in S$ çıkar. Böylece, Önerme 1'den S saturated sayısal yarıgrup olur.

(ii) $s > C$ ise $d_S(s) = 1$ olup $s + d_S(s) = s + 1 \in S$ çıkar. Bu durumda, Önerme 1'den S sayısal yarıgrubunun saturated olduğunu elde ederiz.

Sonuç 4. $C \equiv 0(\bmod 6)$ ve $u = 1, 2, ..., \frac{C-6}{6}$ için

(1) $S = < 6, C+1, C+2, C+3, C+4, C+5 >$ ise

(a) $F(S) = 6k - 1$,

(b) $n(S) = k$,

(c) $G(S) = 5k$,

(2) $S = < 6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5 >$ ise

(a) $F(S) = 6k - 1$,

(b) $n(S) = 3k - 2u$,

(c) $G(S) = 3k + 2u$,

(3) $S = < 6, 6u+3, C+1, C+2, C+4, C+5 >$ ise

(a) $F(S) = 6k - 1$,

(b) $n(S) = 2k - u$,

(c) $G(S) = 4k + u$,

(4) $S = < 6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5 >$ ise

(a) $F(S) = 6k - 1$,

(b) $n(S) = 3k - 2u - 1$,

(c) $G(S) = 3k + 2u + 1$

şeklindedir.

Sonuç 5. $C \equiv 2 \pmod 6$ ise

(1) $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-2}{6}$ için $S = <6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+1$,

(b) $n(S) = 3k-2u+1$,

(c) $G(S) = 3k+2u+1$

burada $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-2}{6}$.

(2) $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-8}{6}$ için $S = <6, 6u+3, C, C+2, C+3, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+1$,

(b) $n(S) = 2k-u+1$,

(c) $G(S) = 4k+u+1$,

(3) $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-8}{6}$ için $S = <6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+1$,

(b) $n(S) = 3k-2u$,

(c) $G(S) = 3k+2u+2$

şeklindedir.

Sonuç 6. $C \equiv 3 \pmod 6$ ise $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-3}{6}$ için $S = <6, 6u+3, C+1, C+2, C+4, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+2$,

(b) $n(S) = 2k-u+1$,

(c) $G(S) = 4k+u+2$

olur.

Sonuç 7. $C \equiv 4 \pmod 6$ ve $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-4}{6}$ için

(1) $S = <6, 6u+2, 6u+4, C+1, C+3, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+3$,

(b) $n(S) = 3k-2u+2$,

(c) $G(S) = 3k+2u+2$,

(2) $S = <6, 6u+4, 6u+8, C+1, C+3, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+3$,

(b) $n(S) = 3k-2u+1$,

(c) $G(S) = 3k+2u+3$

şeklindedir.

Sonuç 8. $C \equiv 5 \pmod 6$ için

(1) $u = 1, 2, \ldots, \frac{C-5}{6}$ olmak üzere, $S = <6, 6u+3, C, C+2, C+3, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k+4$,

(b) $n(S) = 2k-u+2$,

(c) $G(S) = 4k+u+3$,

(2) $S = <6, C, C+2, C+3, C+4, C+5>$ ise

(a) $F(S) = 6k + 4$,

(b) $n(S) = k + 1$,

(c) $G(S) = 5k + 4$

şeklindedir.

Örnek 9. $k = 1$ için $C = 6k + 5 = 11$ alalım. Bu durumda, katlılığı 6 ve kondüktörü $C = 11$ olan S saturated sayısal yarıgruplarını düşünelim. Eğer

a) $S = < 6, 6u + 3, C, C + 2, C + 3, C + 5 >$ ise $u = 1$ için $S = < 6, 9, 11, 13, 14, 16 > = \{0, 6, 9, 11, \rightarrow ...\}$ saturated sayısal yarıgrubu olup burada $F(S) = 6k + 4 = 10$, $n(S) = 2k - u + 2 = 2 - 1 + 2 = 3$ ve $G(S) = 4k + u + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$ elde ederiz.

b) Eğer $S = < 6, C, C + 2, C + 3, C + 4, C + 5 >$ ise $S = < 6, 11, 13, 14, 15, 16 > = \{0, 6, 11, \rightarrow ...\}$ saturated sayısal yarıgrubu olup burada $F(S) = 6k + 4 = 10$, ve $n(S) = k + 1 = 2$ ve $G(S) = 5k + 4 = 9$ buluruz.

KAYNAKÇA

Çelik, A., İlhan, S. & Süer, M. (2016). Bazı saturated sayısal yarıgruplar üzerine. *International Engineering,Science and Education Conference (INESEC) Science Proceeding Book,*, 127-131 http://inesec2016.ineseg.org/ Erişim Tarihi: 03.12.2016.

Fröberg, R., Gotlieb, C., & Haggkvist, R. (1987). On numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 35, 63-68.

Garcia-Sanchez, P. A., Heredia, B.A., Karakaş, H.İ., & Rosales, J.C. (2016). Parametizing Arf numerical semigroups. http://adsabs.harvard.edu/abs/2016arXiv160408929G Erişim Tarihi: 01.04.2016

İlhan, S., & Süer M. (2016a). On the saturated numerical semigroups, *Open Math. 14*, 827-831.

İlhan, S. (2016b). On the saturated numerical semigroups with multiplicity 3 and 5. *International Engineering,Science and Education Conference (INESEC) Science Proceeding Book,* 583-589, http://inesec2016.ineseg.org/ Erişim Tarihi: 03.12.2016.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I., & Branco, M.B. (2004). Saturated numerical semigroups, *Houston J. Math.*, 30,321-330.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I., & Branco, M.B. (2004). Arf numerical semigroups, *Journal of Algebra,* 276, 3-12.

Rosales, J.C., & Garcia-Sanchez, P.A. (2009). Numerical semigroups. New York: Springer 181.

Süer, M. (2016). Katlılığı 7 olan saturated veya Arf sayısal yarıgrupları. *International Engineering,Science and Education Conference (INESEC) Science Proceeding Book,* 387-396. http://inesec2016.ineseg.org/ Erişim Tarihi: 03.12.2016.

Süer, M., & İlhan, S. (2016). On a family saturated numerical semigroups, *Turkish Journal of Mathematics*, 41, 132-137.