Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dergisi, Cilt 22, Sayı 3, 2017 ARAŞTIRMA

DOI: 10.17482/uumfd.310529

TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN GENEL ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA FOURİER SERİLERİ KULLANILARAK TİTREŞİM ANALİZİ

Hayrullah Gün KADIOĞLU *
Mustafa Özgür YAYLI *

Alınma: 04.05.2017; düzeltme: 27.12.2017; kabul: 31.12.2017

Öz: Bu çalışmada kirişlerin genel elastik sınır koşullarında titreşim analizi, Timoshenko kiriş teorisiyle incelenmiştir. Bu teori kaymanın elastik eğriye etkisini dikkate alır. Bu yüzden bu teori Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre daha doğru sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada dikey yer değiştirme fonksiyonu olarak Fourier sinüs serisi seçilmiştir. Benzer şekilde dönme fonksiyonu olarak Fourier kosinüs serileri seçilmiştir. Bu fonksiyonlar Fourier katsayılarını hesaplamak için hareket denklemlerin de kullanılmıştır. Sonra lineer denklemleri elde etmek için Stoke dönüşümü sınır koşullarına dahil edilmiştir. Lineer denklemler kullanılarak bir katsayılar matrisi oluşturulmuştur. Bu katsayılar matrisinin öz değeri açısal frekansları vermiştir. Bu çalışmanın sonuçları literatürdeki diğer çalışmalar ile kıyaslanmıştır. Ayrıca bulunan sonuçlar tablolar ve şekillerde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Timoshenko kiriş teorisi, Serbest titreşim analizi, Stoke dönüşümü, Fourier serileri.

Vibration Analysis of Timoshenko Beams Under General Elastic Boundary Conditions by Using Fourier Series

Abstract: In this study, the free vibration analysis of beams with general elastic boundary conditions is investigated based on Timoshenko beam theory. This theory considers effect on elastic curve. So, this theory has more accurate result than Euler-Bernoulli beam theory. In this study, lateral displacement function is chosen as a Fourier cosine series. Similarly, slope function is chosen as a Fourier sine series. These functions are used in the equation of motion to calculate the Fourier coefficients. Then Stoke transformation is applicated to boundary conditions to obtain to the linear equations. A coefficients matrix is created by using the linear systems of equations. The eigenvalues of this coefficient matrix gives the angular frequencies. Results of this study are compared with other studies in the literature. Moreover, calculated results are presented in a series of figures and tables.

Keyword: Timoshenko beam theory, Free vibration analysis, Stoke transformation, Fourier series.

1. GİRİŞ

Euler Bernoulli kiriş teorisinde elastik sınır koşullarına sahip kirişlerin titreşim analiziyle ilgili literatürde birçok çalışma olmasına rağmen, elastik sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin titreşim analizi konusunda pek fazla çalışma yoktur. Araştırmacılar rijit sınır koşulları için kapalı çözümleri rahatlıkla hesaplayabilmektedir. Fakat deforme olabilir sınır koşulları için çözümler oldukça kısıtlıdır.

Literatürde rijit ve elastik sınır koşulları için yapılmış bazı çalışmalar bu bölümde sıralanmıştır. Bozyiğit ve diğ. (2015) Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini diferansiyel transformasyon metodu ile incelemiştir. Rose (1994) iki parametreli elastik zemine oturan Timoshenko kirişinin serbest titreşim analizini analitik yöntem ile incelemiştir. Kim ve Kim (2001) kirişlerin elastik sınır koşullarında titreşim analizini Fourier serilerini ve Euler-

* UludağÜniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, BURSA
İletişim Yazarı: Hayrullah Gün KADIOĞLU (hyrllh_1113@hotmail.com)

Bernoulli kiriş teorisini kullanarak incelemiştir. Zhou (2001) Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak çok açıklıklı Timoshenko kirişleri için serbest titreşim analizini yapmıştır. Farghaly (1994) doğal frekans ve kritik burkulma yükü katsayılarını çok açıklıklı Timoshenko kirişleri için incelemiştir. Banerjer (1998) eksenel yükle yüklenmiş Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini dinamik rijitlik metodu ile incelemiştir. Gül ve Aydoğlu (2015) elastik zemin üzerine oturan kirişlerin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri ile dalga sayısı yönünden titreşimlerini incelemiştir. Develi (2007) Winkler zemini ve Vlasov elastik zemini üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir Timoshenko kirişinin serbest titreşim problemlerini incelemiştir. Yeşilce ve Çatal (2011) elastik zemine oturan değişken kesitli, yarı rijit bağlı Reddy-Bickford kirişlerinin titreşim analizini diferansiyel transformasyon metodu incelemiştir. Demirdağ ve Yeşilce (2011) tepe noktasında toplanmış kütleye sahip zemine dönmeye karşı elastik yayla bağlı Timoshenko kolonunun serbest titreşimini diferansiyel transformasyon metodu ile incelemişlerdir. Kocatürk ve Şimşek (2005) elastik mesnetli kirişlerin serbest titreşimini Lagrange denklemlerini ve Kuvvet serilerini kullanarak Timoshenko kiriş teorisiyle incelemiştir.

Bu çalışmada dönmeyi engelleyici elastik yay ve sabit mesnet ile mesnetli Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizi Fourier serileri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilmiş katsayılar matrisini kullanarak birçok farklı sınır koşuluna sahip Timoshenko kirişinin titreşim analizi yapılabilmektedir. Bu bakımdan bulunmuş olan çözümlerin ilerde yapılacak elastik mesnetli çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bulunan değerler tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur ve literatürde yapılmış olan diğer çalışmalar ile karşılaştırılarak doğruluğu test edilmiştir.

2. YAPILAN KABULLER

Bu çalışma için şu kabuller yapılmıştır:

1.Malzeme homojen ve izotropiktir.
2.Malzeme davranışı doğrusal elastiktir.
3.İkinci mertebe etkiler ihmal edilmiştir.
4.Sönüm etkisi ihmal edilmiştir.
5.Eksenel deformasyon göz önüne alınmamıştır.

3. PROBLEM VE ÇÖZÜMÜ

Timoshenko kiriş teorisine göre φ(z,t) kiriş eksenine dik yer değiştirme fonksiyonu, θ(z,t) kesitin dönme fonksiyonunu göstermektedir. Rose(1994) iki parametreli elastik zemine oturan Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimini analitik yöntemle incelemiştir. Onun bu çalışmasında elde ettiği hareket denklemleri şunlardır.

$$\frac{AG}{K_s}\left(\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2}-\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}\right)-m\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

$$EI\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2}-m\frac{I}{A}\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial t^2}+\frac{AG}{K_s}\left(\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}-\theta(z,t)\right)=0. \tag{2}$$

Yukarıdaki denklemlerde; m kirişin yayılı kütlesini, A kirişin en kesit alanını, G kirişin yapıldığı malzemenin kayma modülünü, E kirişin yapıldığı malzemenin elastisite modülünü, I kirişin alan atalet momentini ve K_s kesme düzeltme katsayısını göstermektedir.

3.1. Fourier Serileri

Basit harmonik hareket kabulü yapılırsa; yer değiştirme ve dönme fonksiyonları aşağıdaki gibi Fourier serileriyle gösterilebilir.

$$\varphi(z,t)=\ \varphi(z).cos(\omega t), \tag{3}$$

$$\varphi(z) = \varphi_0 \qquad z = 0, \tag{4}$$
$$\varphi(z) = \varphi_L \qquad z = L, \tag{5}$$
$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \, sin(\alpha_n \, z)) \qquad 0 < z < L, \tag{6}$$
$$\theta(z,t) = \theta(z).cos(\omega t), \tag{7}$$
$$\theta(z) = \theta_0 \qquad z = 0, \tag{8}$$
$$\theta(z) = \theta_L \qquad z = L, \tag{9}$$
$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \, cos(\alpha_n \, z)) \qquad 0 < z < L. \tag{10}$$

Burada şu tanım geçerlidir.

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}. \tag{11}$$

3.2. Stoke Dönüşümleri

Kurulan modelden görüleceği gibi rijit olmayan sınır koşullarını, problem çözümüne dâhil etmek için matematiksel bir dönüşüm yapılması gereklidir. Bu çalışmada Fourier sinüs serisi, Stoke dönüşümü ile birlikte kullanılarak hareketli sınır şartları da probleme dâhil edilecektir.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(z) \, sin(\alpha_n \, z) \partial z. \tag{12}$$

Yukarıdaki yer değiştirme fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n A_n \, cos(\alpha_n \, z)), \tag{13}$$

elde edilir. Üstteki bu fonksiyon Fourier kosinüs serisi ile gösterilebilir;

$$\varphi'(z) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, cos(\alpha_n \, z), \tag{14}$$

(14) denklemindeki (f_0,f_n) katsayıları aşağıdaki formdadır.

$$f_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(z) \, \partial z = \frac{2}{L} \big(\varphi(L) - \varphi(0)\big), \tag{15}$$

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(z) \, cos(\alpha_n \, z) \partial z \;\; n = 1,2,3 \, ... \tag{16}$$

Son olarak kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$f_n = \frac{2}{L} [\varphi(z) \, cos(\alpha_n \, z)]_0^L + \frac{2}{L} [\alpha_n \int_0^L \varphi(z) \, sin(\alpha_n \, z) \partial z], \tag{17}$$

$$f_n = \frac{2}{L} [(-1)^n \varphi(L)) - \varphi(0)] + A_n \alpha_n, \tag{18}$$

bulunur. Yukarıda gerçekleştirilen işlemler Stoke dönüşümü olarak bilinmektedir. Daha yüksek mertebeli türevler benzer şekilde bulunabilir. Üçüncü mertebeden türeve kadar olan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}=\frac{(\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}cos(\alpha_n\,z)(\frac{2((-1)^n\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\alpha_nA_n), \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n sin(\alpha_n\,z)(\frac{2((-1)^n\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\alpha_nA_n), \tag{20}$$

$$\frac{\partial^3\varphi(z)}{\partial z^3}=\frac{(\varphi''_L-\varphi''_0)}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}cos(\alpha_n\,z)[\frac{2}{L}\left(\varphi''_L(-1)^n-\varphi''_0\right)-\alpha_n{}^2(\frac{2}{L}(\varphi_L(-1)^n-\varphi_0)+\alpha_nA_n)]. \tag{21}$$

Benzer dönüşümler dönme fonksiyonu için de tekrarlanabilir. Dönme fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\theta'(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_nB_n\,sin(\alpha_n\,z)), \tag{22}$$

bulunur. Bu fonksiyonu Fourier kosinüs serisi olarak gösterebilmek için bir kez daha türev alınırsa;

$$\theta''(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n{}^2B_n\,cos(\alpha_n\,z)), \tag{23}$$

bulunur. Yukarıda yapılan yer değiştirme fonksiyonu için yapılan işlemlerin benzerleri yapıldığında dönme fonksiyonlarının üçüncü mertebeye kadar olan türevleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial\theta(z)}{\partial z}=-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_nB_n\,sin(\alpha_n\,z)), \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2\theta(z)}{\partial z^2}=\frac{(\theta'_L-\theta'_0)}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}cos(\alpha_n\,z)(\frac{2((-1)^n\theta'_L-\theta'_0)}{L}-\alpha_n{}^2B_n), \tag{25}$$

$$\frac{\partial^3\theta(z)}{\partial z^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n sin(\alpha_n\,z)(\frac{2(\theta'_0-\theta'_L(-1)^n)}{L}+\alpha_n{}^2B_n). \tag{26}$$

3.3. Fourier Katsayılarının Bulunması

(3) ve (7) numaralı denklemler (1) ve (2) numaralı denklemlerde yerine yazılırsa;

$$\frac{AG}{K_s}(\frac{\partial^2\varphi(z)cos(\omega t)}{\partial z^2}-\frac{\partial\theta(z)\,cos(\omega t)}{\partial z})+m\omega^2\varphi(z)cos(\omega t)=0, \tag{27}$$

$$EI\frac{\partial^2\theta(z)cos(\omega t)}{\partial z^2}+m\frac{I\omega^2}{A}\theta(z)cos(\omega t)+\frac{AG}{K_s}(\frac{\partial\varphi(z)cos(\omega t)}{\partial z}-\theta(z)cos(\omega t))=0, \tag{28}$$

bulunur. (27) ve (28) denklemleri cos(ωt) ye bölünürse;

$$\frac{AG}{K_s}(\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2}-\frac{\partial\theta(z)}{\partial z})+m\omega^2\varphi(z)=0, \tag{29}$$

$$EI\frac{\partial^2\theta(z)}{\partial z^2}+m\frac{I\omega^2}{A}\theta(z)+\frac{AG}{K_s}(\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}-\theta(z))=0, \tag{30}$$

elde edilir. Denklem (30) ‘un z ye bağlı bir defa daha türevi alınırsa;

$$EI\frac{\partial^3\theta(z)}{\partial z^3}+m\frac{I\omega^2}{A}\frac{\partial\theta(z)}{\partial z}+\frac{AG}{K_s}\left(\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2}-\frac{\partial\theta(z)}{\partial z}\right)=0, \tag{31}$$

bulunur. (6), (20), (24) ve (26) denklemleri (29) ve (31) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\frac{AG}{K_s}\left(-\alpha_n sin(\alpha_n\, z)\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\alpha_n A_n\right)+\alpha_n B_n\, sin(\alpha_n\, z)\right) + m\omega^2 A_n\, sin(\alpha_n\, z)=0, \tag{32}$$

$$EI\,\alpha_n sin(\alpha_n\, z)\left(\frac{2(\theta'_0-\theta'_L(-1)^n)}{L}+\alpha_n{}^2B_n\right)-m\frac{I\omega^2}{A}\alpha_n B_n\, sin(\alpha_n\, z) + \frac{AG}{K_s}\left(-\alpha_n sin(\alpha_n\, z)\left(\frac{2((-1)^n\varphi_L-\varphi_0)}{L}+\alpha_n A_n\right)+\alpha_n B_n\, sin(\alpha_n\, z)\right) = 0, \tag{33}$$

elde edilir. Bu denklemlerden A_n ve B_n değerleri elde edilir.

$$A_n=(2AGI\alpha_n(-m\omega^2\varphi_0+AE\alpha_n{}^2\varphi_0+(-1)^n m\omega^2\varphi_L+(-1)^{n+1}AE\alpha_n{}^2\varphi_L-AE\theta'_0 + (-1)^n AE\theta'_L)) /(L(-A^2Gm\omega^2+Im^2\omega^4K_s-AGIm\omega^2\alpha_n{}^2-AEIm\omega^2K_s\alpha_n{}^2 - A^2GEI\alpha_n{}^4)), \tag{34}$$

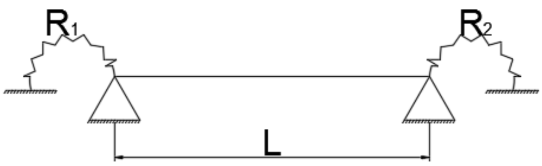
$$B_n= -((2A(-AGm\omega^2\varphi_0+(-1)^n AGm\omega^2\varphi_L-EIm\omega^2K_s\theta'_0+AGEI\alpha_n{}^2\,\theta'_0+(-1)^n EIm\omega^2K_s\theta'_L+(-1)^{n+1}AGEI\,\alpha_n{}^2\theta'_L))/(L(-A^2Gm\omega^2+Im^2\omega^4K_s-AGIm\omega^2\alpha_n{}^2-AEIm\omega^2K_s\alpha_n{}^2 - A^2GEI\alpha_n{}^4))). \tag{35}$$

3.4. Sınır koşulları

Timoshenko kirişine ait eğilme momenti M(z) ve kesme kuvveti T(z) fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılır.

$$M(z)=EI\frac{\partial\theta(z)}{\partial x}, \tag{36}$$

$$V(z)=\frac{AG}{K_s}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}-\frac{AG}{K_s}\,\theta(z), \tag{37}$$



Şekil 1:
Sınır koşulları.

(36) denklemindeki M(z) moment fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$$R\theta=EI\frac{\partial\theta(z)}{\partial z},\quad R\theta-\ EI\frac{\partial\theta(z)}{\partial z}, \tag{38}$$

elde edilir. Yukarıdaki fonksiyondaki R rijitlik değeridir bu değer Şekil 1. deki gibi daha sonra R_1 ve R_2 olarak yazılmıştır.

3.5. Katsayılar Matrisinin Oluşturulması ve Problemin Çözümü

θ(z) fonksiyonunu denklem (30)'dan elde edilirse;

$$\theta(z) = \frac{EI\frac{\partial^2\theta(z)}{\partial z^2} + \frac{AG}{K_s}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}}, \tag{39}$$

elde edilir. (19) ve (25) denklemleri (39) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\theta(z) = {} & (EI(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n z)(\frac{2((-1)^n\theta'_L - \theta'_0)}{L} - \alpha_n{}^2 B_n)) \\ & + \frac{AG}{K_s}(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n z)(\frac{2((-1)^n\varphi_L - \varphi_0)}{L} \\ & + (\alpha_n A_n)))/(\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}),\end{aligned} \tag{40}$$

bulunur. φ_0 ve φ_L değerleri mesnet şartları gereği 0 dır. Yani (40) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\theta(z) = {} & (EI(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n z)(\frac{2((-1)^n\theta'_L - \theta'_0)}{L} - \alpha_n{}^2 B_n)) \\ & + \frac{AG}{K_s}(\sum_{n=1}^{\infty} cos(\alpha_n z)(\alpha_n A_n)))/(\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}),\end{aligned} \tag{41}$$

(34) ve (35) denklemleri (41) denkleminde yerine yazılırsa ve (41) denklemi z=0 ve $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ için (38)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}& (-EI - (\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}})\ R_1 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_1(-AGn^2\pi^2 + L^2m\omega^2K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)K_s})\ \theta'_0 \\ & + ((\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}})\ R_1 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_1(AGn^2\pi^2 - L^2m\omega^2K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)K_s})\ \theta'_L = 0,\end{aligned} \tag{42}$$

bulunur. (34) ve (35) denklemleri (41) denkleminde yerine yazılırsa ve (41) denklemi z=L ve $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ için (38)'de yerine yazılırsa;

$$\left(-\left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}} \right) R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_1 (AGn^2\pi^2 - L^2 m\omega^2 K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2 m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2)K_s} \right) \theta'_0 + \left(-EI + \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}} \right) R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_1(-AGn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2 K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2 m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2)K_s} \right) \theta'_L = 0\,, \tag{43}$$

(42) ve (43) denklemleri katsayılar matrisi formunda gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta'_0 \\ \theta'_L \end{bmatrix} = 0, \tag{44}$$

buradaki Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{21} ve Φ_{22} parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_{11} = -EI - \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}} \right) R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_1(-AGn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2 K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2 m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2)K_s}, \tag{45}$$

$$\Phi_{12} = \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}} \right) R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_1(AGn^2\pi^2 - L^2 m\omega^2 K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2 m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2)K_s}, \tag{46}$$

$$\Phi_{21} = -\left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}} \right) R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_2(AGn^2\pi^2 - L^2 m\omega^2 K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2 m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2)K_s}, \tag{47}$$

$$\Phi_{22} = -EI + \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{K_s} - m\frac{I\omega^2}{A}} \right) R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_2(-AGn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2 K_s)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2 m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2 m\omega^2)K_s}. \tag{48}$$

4. SONUÇLAR

Problemin çözüm kısmında bulunan denklemlerdeki rijitlik değerleri (R_1 ve R_2) çok büyük alınması durumunda ankastre mesnet gibi davranacaktır. Çok küçük alınması durumunda da basit mesnet gibi davranacaktır.

Kiriş modeli için L=8 m, A=0,15m^2, m=0,382263kN.sn^2/m, I=0,003125m^4, E=30000000kN/m^2, G=11538461,54kN/m^2, K_s=1,2 alınmıştır. Verilen değerler matriste yerine yazılıp çözüldüğünde açısal frekanslar elde edilir.

4.1. Literatürde Yapılan Çalışmalar ile Kıyaslama

Tablo 1.Bozyiğit ve diğ. (2015) yapmış oldukları çalışmada DTM ile elde ettikleri, farklı mesnetlenme koşulları için bulunan açısal frekanslar ile bu çalışmadan elde edilen açısal frekansların değeri.

Sınır koşulları									
	Ankastre-Ankastre			Ankastre-Basit			Basit-Basit		
Yöntem	ω1	ω2	ω3	ω1	ω2	ω3	ω1	ω2	ω3
Analitik	168.62	449.98	847.58	117.48	371.08	747.49	75.87	297.77	650.40
DTM	168.62	449.98	847.58	117.48	371.08	747.79	75.87	297.77	650.40
Sap2000	168.90	452.70	847.58	117.62	373.29	756.37	75.98	299.48	658.17
Bu çalışma	168.74	453.58	848.07	117.52	371.20	747.72	75.87	297.77	650.40

4.2. Sonuçların Değerlendirilmesi

Bu çalışmada dönmeyi engelleyici elastik yay ve sabit mesnet ile mesnetli Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizi Fourier serileri kullanılarak yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo (1)'de literatürde yapılan sonuçlar ile kıyaslandığında bulunan sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu da, bu çalışmada kullanılan bu yöntemin doğruluğunu göstermektedir. Ayrıca bu çalışmanın diğer çalışmalardan farkı rijit olmayan sınır koşulları içinde hesap yapılmasına imkân sağlamasıdır. Bu yönden de bu çalışmada bulunan sonuçlar mühendislik açısından fayda sağlamasının yanında bundan sonra yapılacak olan çalışmalar içinde referans olacaktır.

Diğer taraftan elde edilen sonuçlarda, iki ucu basit mesnet ile mesnetli kirişin en küçük açısal frekans değerlerine sahip olduğu iki ucu ankastre mesnet ile mesnetli kirişin ise en büyük açısal frekans değerlerine sahip olduğu saplanmıştır. Ayrıca aşağıda bu durumu destekleyici nitelikte olan Şekil (2, 3, 4, 5 ve 6) ve Tablo (2, 3, 4, 5 ve 6)'da rijitlik arttıkça açısal frekansların arttığı gözlenmiştir. Bunun dışında Tablo (7) ve Şekil (7, 8, 9, 10, 11 ve 12)' de kiriş boyu arttıkça açısal frekans değerlerinin azaldığı gözlenmiştir.

Şekil (2, 3, 4, 5 ve 6) ve Tablo (2, 3, 4, 5 ve 6) kendi arasında bütündür ve iki ucu basit mesnet ve dönmeyi engelleyici elastik yaylar ile mesnetli bir kirişin rijitliklerinin değişimine bağlı olarak değişen ilk beş moddaki açısal frekansları tablolar ve grafikler şeklinde göstermektedir. Tablo (7) ve Şekil (7, 8, 9, 10, 11 ve 12) de kendi arasında bütündür ve basit-basit, basit-ankastre ve ankastre-ankastre mesnetli bir kirişin kiriş boyuna (L) bağlı ilk üç moddaki açısal frekansları tablo ve grafiksel biçimde gösterilmiştir. Bu tablolar ve şekiller oluşturulurken sonuçlar bölümünde belirtilen değerler ile işlemler yapılmıştır.

Tablo 2. 1.moda ait rijitliklere göre açısal frekanslar.

		R_1						
		10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
R_2	10^1	75,884	75,942	76,517	81,487	101,288	115,247	117,525
	10^2	75,942	76,001	76,575	81,554	101,346	115,306	117,585
	10^3	76,517	76,575	77,149	82,110	101,914	115,898	118,181
	10^4	81,495	81,553	82,119	87,036	106,912	121,134	123,468
	10^5	101,463	101,521	102,089	107,081	128,198	144,139	146,813

	10^6	115,666	115,726	116,318	121,555	144,414	162,427	165,551
	10^7	117,993	118,054	118,651	123,939	147,145	165,569	168,735

Tablo 3. 2.moda ait rijitliklere göre açısal frekanslar.

		R_1						
		10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
R_2	10^1	297,783	297,839	298,392	303,532	332,319	364,625	371,206
	10^2	297,839	297,895	298,447	303,587	332,373	364,679	371,262
	10^3	298,392	298,448	299,000	304,135	332,908	365,224	371,811
	10^4	303,542	303,597	304,144	309,241	337,917	370,336	376,965
	10^5	332,649	332,703	333,239	338,299	366,954	400,536	407,529
	10^6	365,807	365,862	366,407	371,517	401,432	437,704	445,422
	10^7	372,612	372,668	373,218	378,372	408,666	445,671	453,584

Tablo 4. 3.moda ait rijitliklere göre açısal frekanslar.

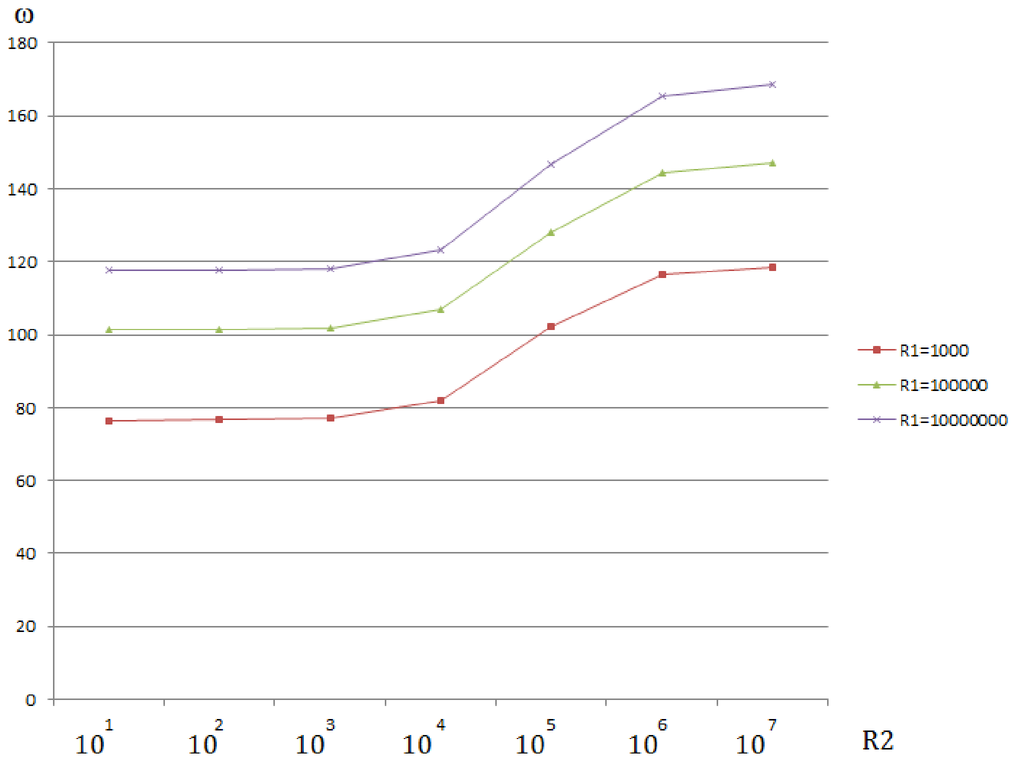
		R_1						
		10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
R_2	10^1	650,411	650,463	650,978	655,879	687,800	735,925	747,723
	10^2	650,463	650,515	651,030	655,930	687,849	735,973	747,772
	10^3	650,978	651,030	651,545	656,441	688,344	736,458	748,257
	10^4	655,888	655,939	656,450	661,317	693,067	741,095	752,896
	10^5	688,219	688,269	688,764	693,476	724,484	772,270	784,162
	10^6	737,996	738,045	738,530	743,158	773,941	822,621	834,969
	10^7	750,343	750,392	750,877	755,510	786,397	835,545	848,071

Tablo 5. 4.moda ait rijitliklere göre açısal frekanslar.

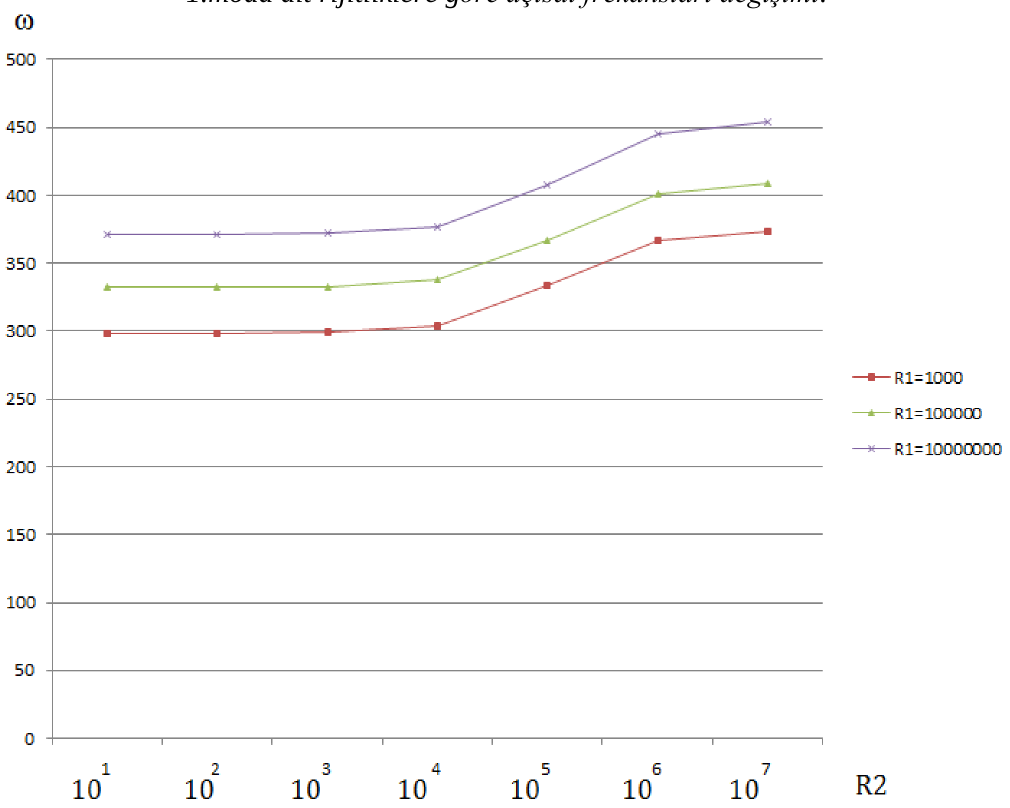
		R_1						
		10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
R_2	10^1	1113,18	1113,23	1113,70	1118,22	1150,14	1208,97	1225,77
	10^2	1113,23	1113,27	1113,74	1118,26	1150,19	1209,02	1225,82
	10^3	1113,70	1113,74	1114,11	1118,73	1150,65	1209,48	1226,29
	10^4	1118,22	1118,27	1118,74	1123,25	1155,14	1213,99	1230,82
	10^5	1150,59	1150,64	1151,11	1155,58	1187,34	1246,56	1263,62
	10^6	1211,86	1211,91	1212,38	1216,88	1249,03	1310,06	1327,90
	10^7	1229,66	1229,71	1230,18	1234,71	1267,11	1328,94	1347,10

Tablo 6. 5.moda ait rijitliklere göre açısal frekanslar.

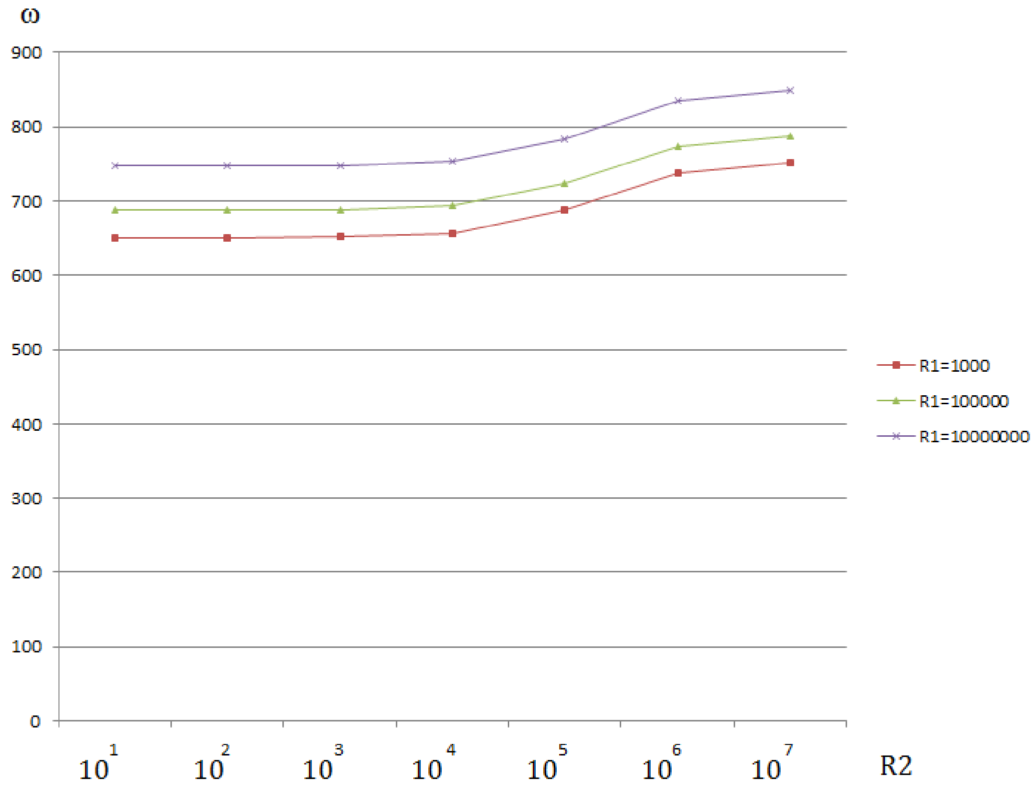
		R_1						
		10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
R_2	10^1	1664,57	1664,61	1665,04	1669,13	1699,44	1763,77	1784,58
	10^2	1664,61	1664,66	1665,08	1669,17	1699,48	1763,81	1784,62
	10^3	1665,04	1665,08	1665,50	1669,59	1699,89	1764,20	1785,01
	10^4	1669,13	1669,18	1669,60	1673,62	1703,86	1768,01	1788,79
	10^5	1699,89	1699,94	1700,35	1704,32	1733,77	1796,81	1817,35
	10^6	1767,31	1767,35	1767,74	1771,54	1799,86	1861,29	1881,57
	10^7	1789,61	1789,65	1790,04	1793,80	1821,90	1883,08	1903,37



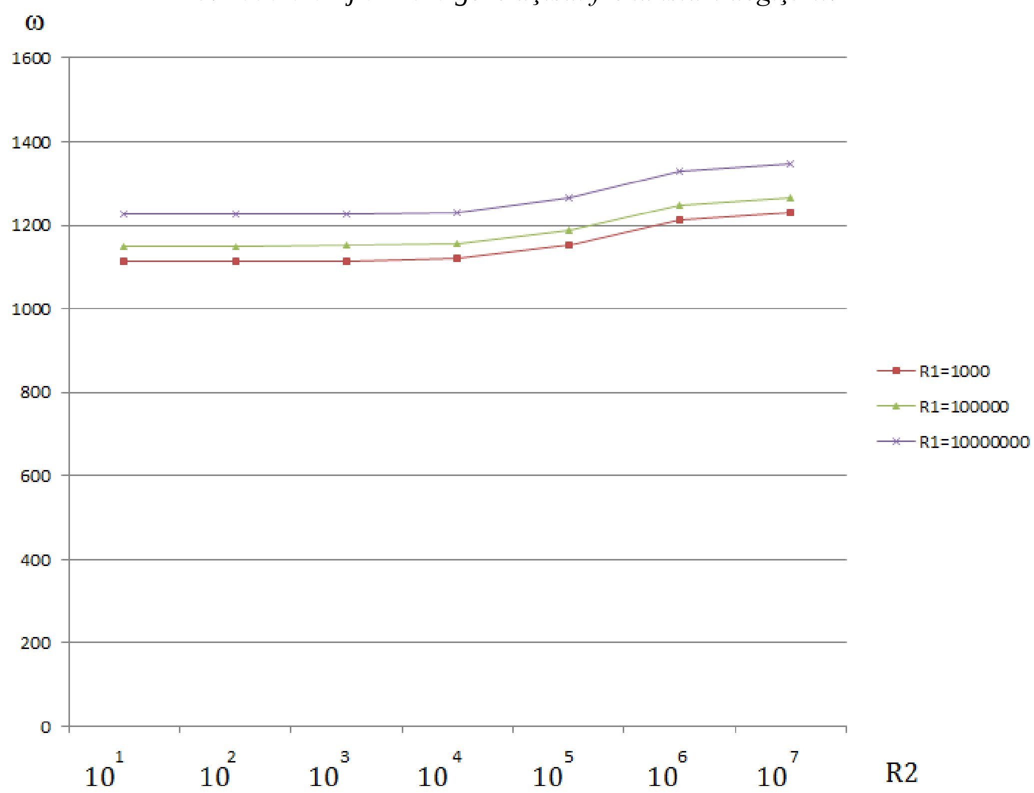
Şekil 2:
1.moda ait rijitliklere göre açısal frekansları değişimi.



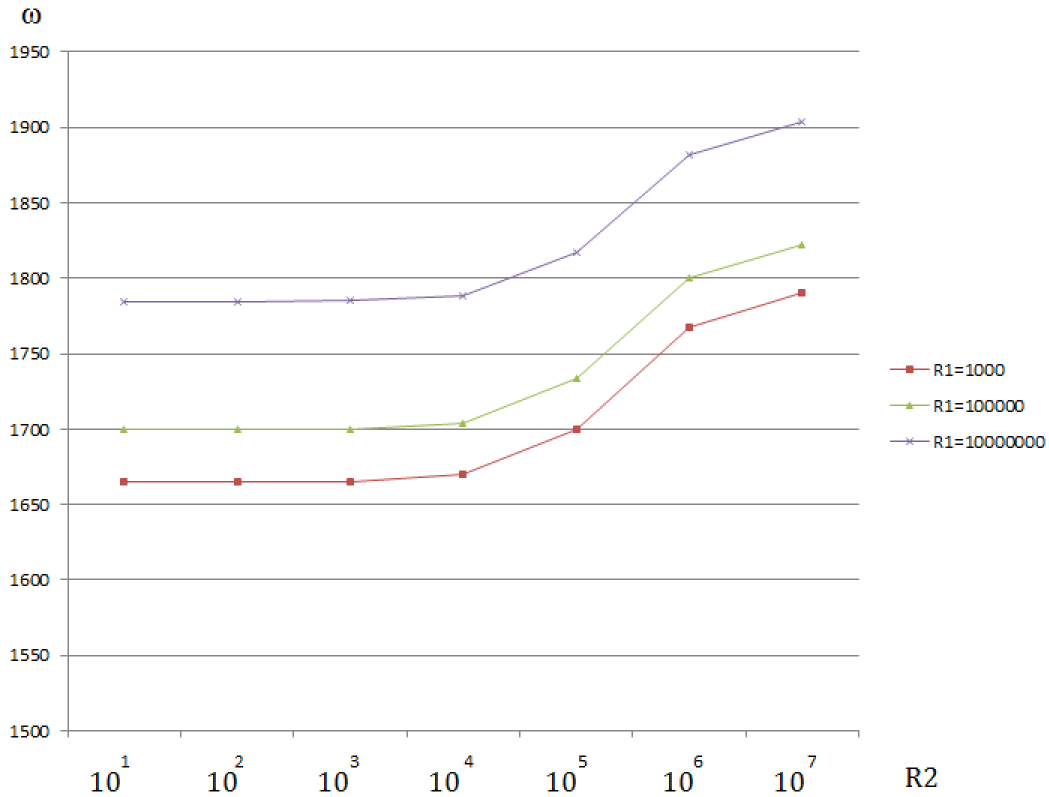
Şekil 3:
2.moda ait rijitliklere göre açısal frekansları değişimi.



Şekil 4:
3.moda ait rijitliklere göre açısal frekansları değişimi.



Şekil 5:
4.moda ait rijitliklere göre açısal frekansları değişimi.



Şekil 6:

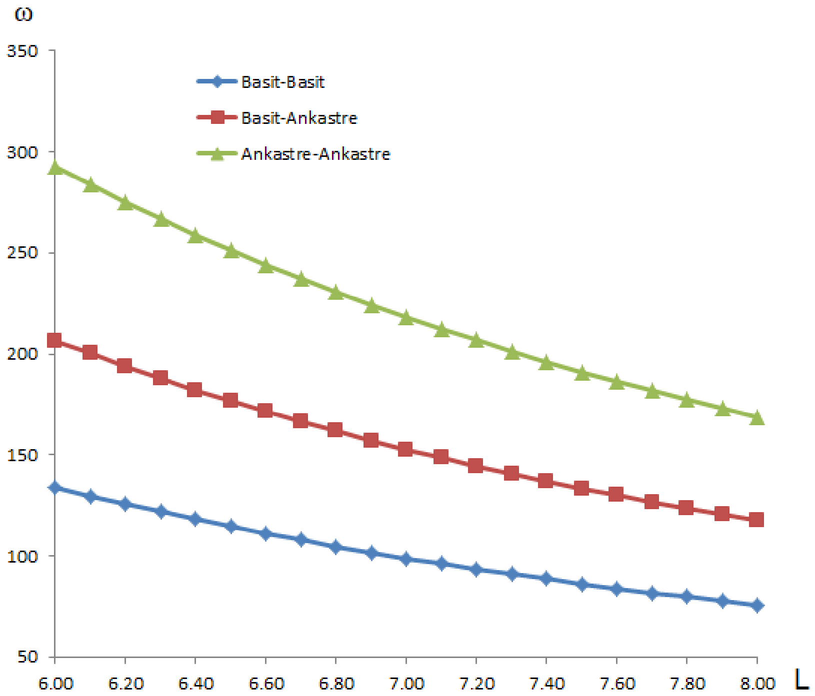
5.moda ait rijitliklere göre açısal frekansları değişimi.

Kiriş modeli için L değişken olmak üzere A=0,15m^2, m=0,382263kN.sn^2/m, I=0,003125m^4, E=30000000kN/m^2, G=11538461,54kN/m^2, K_s=1,2 alınıp rijit sınır koşullarında aşağıdaki tablo ve grafikler oluşturulabilir.

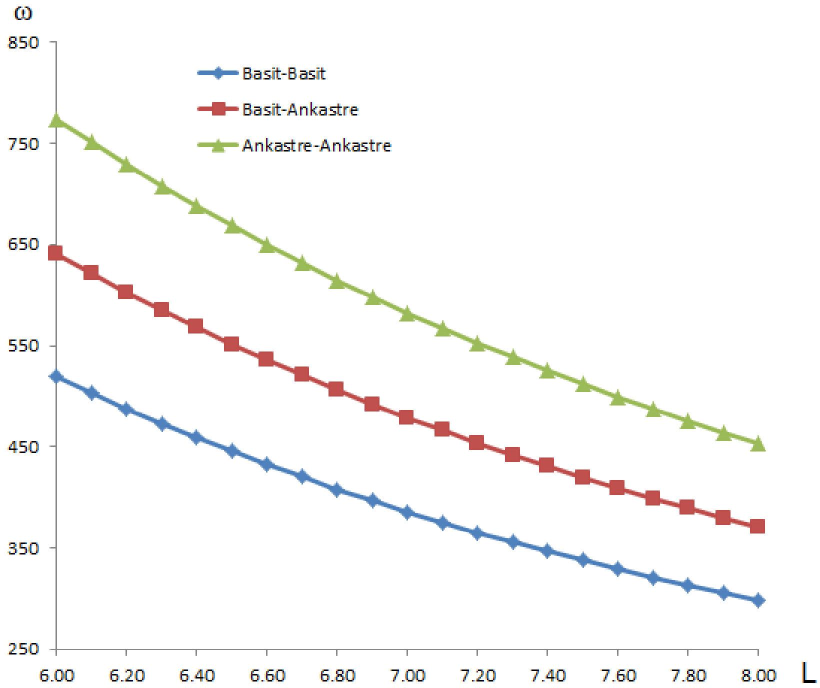
Tablo 7. Farklı rijit sınır koşullarında kiriş boyuna bağlı açısal frekanlar.

	Basit-Basit Mesnet			Basit-Ankaste Mesnet			Ankastre-Ankastre Mesnet		
L	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)
6,0	134,21	519,55	1113,17	206,61	641,13	1263,93	292,74	773,99	1409,07
6,1	129,89	503,34	1079,88	200,05	621,54	1227,13	283,71	750,96	1369,60
6,2	125,78	487,86	1048,03	193,79	602,83	1191,88	275,08	728,93	1331,72
6,3	121,86	473,09	1017,55	187,82	584,94	1158,08	266,84	707,83	1295,35
6,4	118,12	458,96	988,35	182,12	567,82	1125,68	258,96	687,62	1260,41
6,5	114,55	445,46	960,36	176,67	551,43	1094,58	251,42	668,25	1226,82
6,6	111,13	432,53	933,52	171,47	535,73	1064,72	244,20	649,67	1194,53
6,7	107,87	420,16	907,78	166,49	520,69	1036,05	237,28	631,84	1163,46
6,8	104,75	408,30	883,06	161,72	506,26	1008,49	230,66	614,72	1133,55
6,9	101,76	396,93	859,33	157,15	492,41	981,99	224,30	598,28	1104,76
7,0	98,90	386,03	836,52	152,78	479,12	956,51	218,20	582,47	1077,02
7,1	96,16	375,56	814,59	148,58	466,35	931,98	212,34	567,28	1050,29
7,2	93,53	365,51	793,50	144,55	454,07	908,36	206,71	552,66	1024,51
7,3	91,00	355,86	773,20	140,68	442,28	885,61	201,30	538,59	999,65
7,4	88,58	346,58	753,66	136,97	430,92	863,69	196,10	525,04	975,66
7,5	86,25	337,65	734,84	133,40	420,00	842,56	191,10	511,99	952,51
7,6	84,01	329,06	716,71	129,97	409,48	822,18	186,28	499,41	930,15

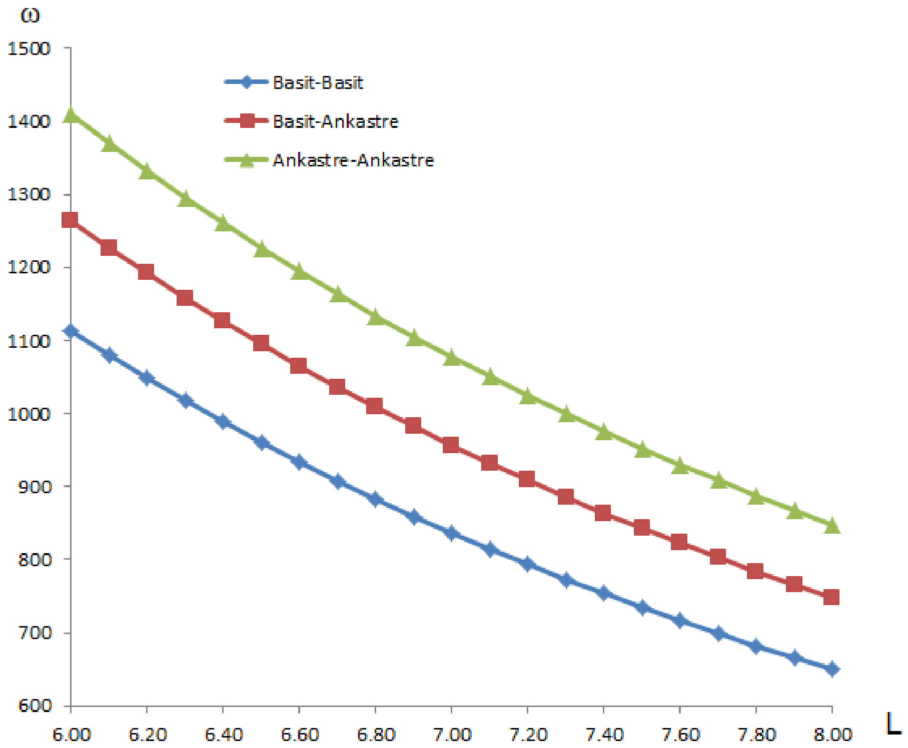
7,7	81,86	320,80	699,23	126,67	399,35	802,52	181,64	487,29	908,55
7,8	79,78	312,84	682,37	123,49	389,58	783,54	177,17	475,59	887,67
7,9	77,79	305,17	666,10	120,43	380,17	765,21	172,87	464,31	867,50
8,0	75,87	297,77	650,40	117,52	371,20	747,72	168,74	453,58	848,07



Şekil 7:
L'e bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 1.moddaki açısal frekansların değişimi.

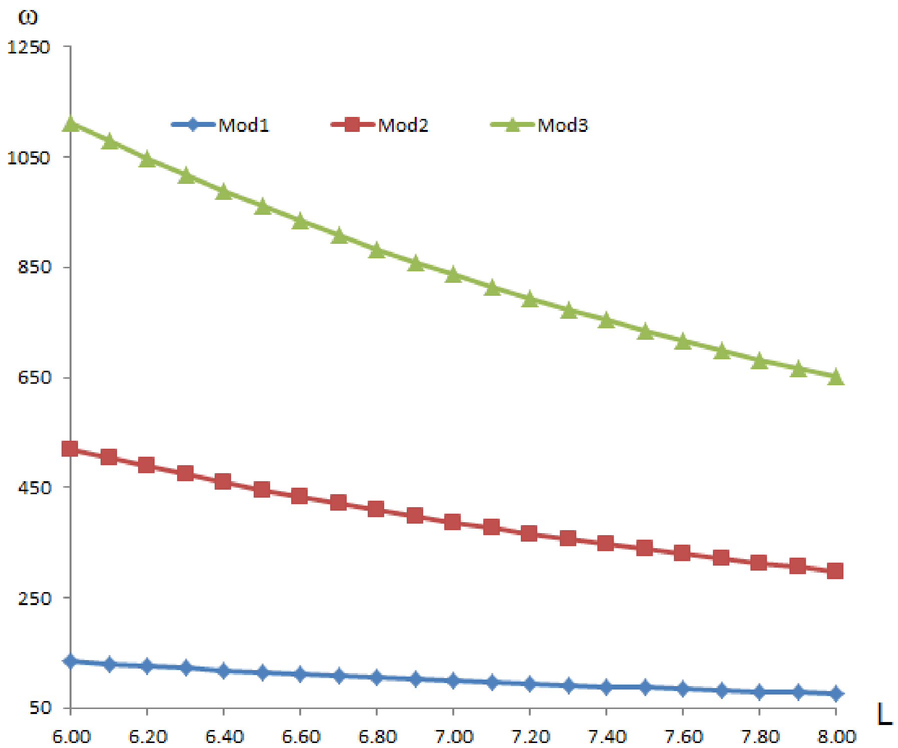


Şekil 8:
L'e bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 2.moddaki açısal frekansların değişimi.



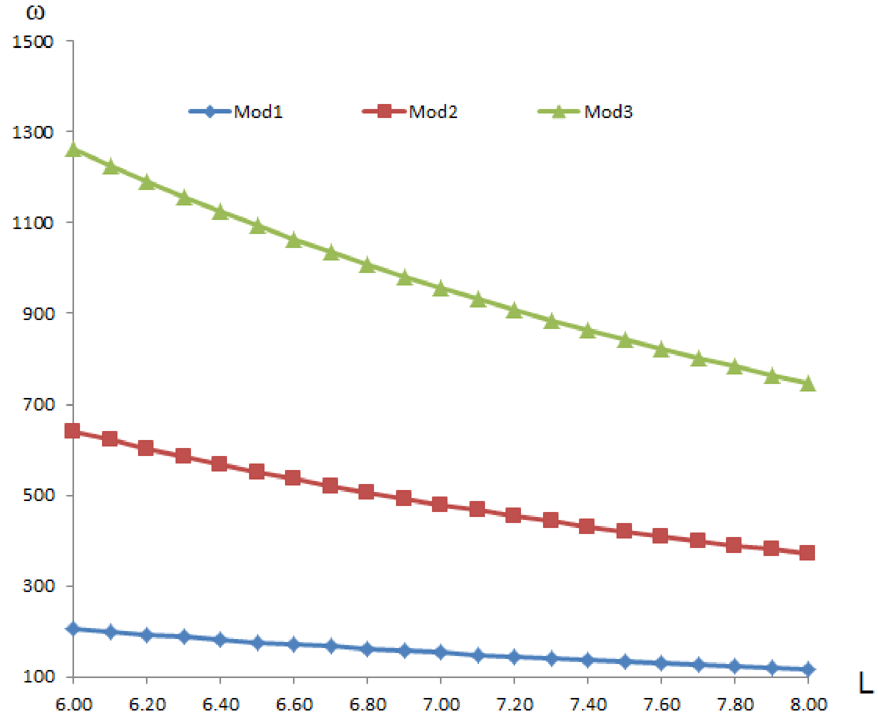
Şekil 9:

L'e bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 3.moddaki açısal frekansların değişimi.

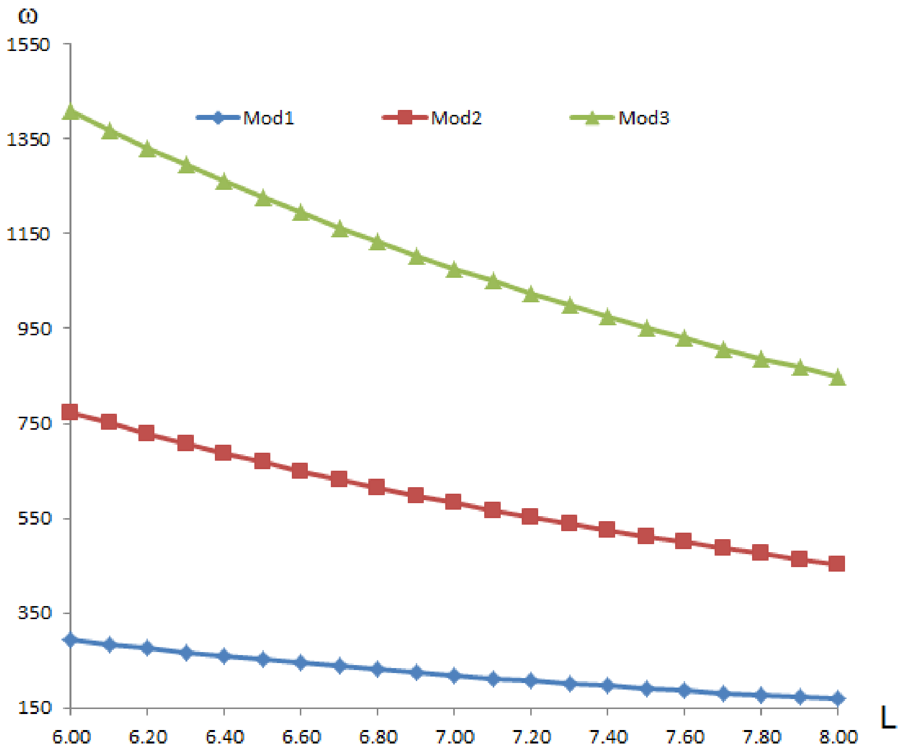


Şekil 10:

L'e bağlı farklı basit-basit mesnetli kirişin 1.mod 2. mod ve 3. moddaki açısal frekanslarının değişimi.



Şekil 11:
L'e bağlı farklı basit-ankastre mesnetli kirişin 1.mod 2. mod ve 3. moddaki açısal frekanslarının değişimi.



Şekil 12:
L'e bağlı farklı ankastre-ankastre mesnetli kirişin 1.mod 2. mod ve 3. moddaki açısal frekanslarının değişimi.

KAYNAKLAR

1. Banerjee, J. R. (1998). Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method, *Computres & Structures*, 69, 197-208. doi:10.1016/S0045-7949(98)00114-X

2. Bozyiğit, B., Çatal, S. and Çatal H. H. (2015) Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizinin diferansiyel transformasyon methodu ile incelenmesi, *3. Türkiye Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı*, D.E.Ü., İzmir.

3. Demirdag, O. and Yesilce, Y. (2011). Solution of free vibration equation of elastically supported Timoshenko columns with a tip mass by differential transform method, *Advances in Engineering Software,* 42(10), 860-867. doi: 10.1016/j.advengsoft.2011.06.002

4. De Rosa, M. A. (1995) Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation, *Computers & Structures,* 57(1), 151-156. doi: 10.1016/0045-7949(94)00594-S

5. Develi, A. G. (2007). Elastik zemin üzerine oturan Timoshenko kirişlerinde titreşim problemi, *Yüksek Lisans Tezi,* İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

6. Farghaly, S. H. (1994). Vibration and stability analysis Timoshenko beams with discontinuities in cross-section, *Journal of Sound and Vibration,* 174, 591-605. doi: 10.1006/jsvi.1994.1296

7. Gül, U. and Aydoğdu, M. (2015). Elastik zemin üzerinde oturan Timoshenko kirişlerinde dalga yayınımı, *Uluslararası Katılımlı 17. Makina Teorisi Sempozyumu*, İzmir.

8. Kim, H. K. and Kim, M. S. (2001). Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series, *Journal of Sound and Vibration,* 245(5), 771-784. doi: 10.1006/jsvi.2001.3615

9. Kocatürk, T. and Şimşek, M. (2005). Free vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams, *Sigma,* (3) 79-93. Doi: 53A40, 74H45.

10. Yesilce, Y. and Catal, H. H. (2011). Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using the differential transform method, *Archive of Applied Mechanics,* 81(2), 199-213. doi: 10.1007/s00419-010-0405-z

11. Zhou, D. (2001). Free vibration of multi-span Timoshenko beams using static Timoshenko beam functions, *Journal of Sound and Vibration,* 241, 725-734.

12. Wolfram Mathematica