
	SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ <i>SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE</i>		 SAKARYA UNIVERSITY
	e-ISSN: 2147-835X		
	Dergi sayfası: http://www.saujs.sakarya.edu.tr		
	<u>Geliş/Received</u> 12-07-2017		
	<u>Kabul/Accepted</u> 13-12-2017	<u>Doi</u> 10.16984/saufenbilder.328076	

İki boyutlu sığ akım denklemlerinin sırasız ağda sayısal çözümü için bilgisayar yazılımı geliştirilmesi

Nuray Öktem*¹

ÖZ

Bu çalışmada, iki boyutlu Sığ Akım Denklemleri'nin (SAD) sırasız ağ üzerinde sayısal çözümü için özgün bir yazılım geliştirilmiştir. Geliştirilen yazılım bazı ölçüt problemler için koşturularak test edilmiştir. Sayısal yöntem sırasız üçgen bir çözüm ağı üzerinde hücre merkezli sonlu hacim yöntemine dayanmaktadır. Süreklilik ve momentum denklemlerindeki akı hesabı için ikinci derece doğruluklu Ağırlık Ortalamalı Akı (Weighted Average Flux, WAF) yöntemi kullanılmıştır. Sığ akım denklemlerinin en belirgin özelliği su yüzeyinde oluşabilecek şok dalgalarından kaynaklanan süreksizliklerdir. Sayısal yöntemin şok dalgalarını ayrıntılı bir şekilde tanımlayabilmesi ve hücreler arası akı hesabında akı sınırlayıcılarını kullanmaya olanak vermesi için WAF yöntemi HLLC Riemann çözücülerıyla birleştirilmiştir. Ayrıca, ikinci dereceden doğruluklu sayısal çözüm nedeniyle oluşabilecek sayısal salınımları söndürmek için de Toplam Salınım Azaltma (Total Variation Diminishing, TVD) teorisinden faydalanılmıştır. Literatürde sıralı çözüm ağları için mevcut olan ara-yüz akı sınırlayıcı fonksiyonlarının içerdiği rüzgar yönlü değişimlerin yerel değişimlere oranı, sırasız çözüm ağları için ilk kez tanımlanmış ve yeni gradyan yaklaşımlarıyla beraber kullanılabilir hale getirilmiştir. Test sonuçları, sayısal yöntemin ve geliştirilen yazılımın doğru çalıştığını ve gerçek problemlere uygulanabilirliğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: sığ akım denklemleri, sırasız ağ, WAF, HLLC Riemann çözücüsü

Computer code development for the numerical solution of two dimensional shallow flow equations on unstructured grid

ABSTRACT

In this paper a novel computer code is developed for numerical solution of two dimensional shallow flow equations on unstructured grid. The code is tested by running on some benchmark problems. The numerical method is based on a cell centered Finite Volume Method (FVM) applied on an unstructured triangular mesh. Weighted Averaged Flux (WAF) method is used for the computation of the fluxes in continuity and momentum equations. The most prominent property of the shallow flow equations is the discontinuities due to shock waves occurring on the free surface of the flow. Therefore, WAF is combined with HLLC

* Corresponding Author

¹ Ankara Yıldırım Beyazıt University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Department of Mathematics, Ankara, nbozkaya@gmail.com

Riemann solvers in order to make the method capable to describe the shock waves and also have the opportunity to use flux limiters in the computation of the interface fluxes. Besides, the Total Variation Diminishing (TVD) theory is utilized for smoothing the oscillations which may occur due to the second order accuracy of the numerical solution. The ratio of the upwind to local variations involved in the interface flux limiter functions available in the literature for the structured grid systems is described here for the first time for the unstructured grids and it is made usable with the new gradient approach. Test results show that the numerical method and the code developed are successful and can be applied to real cases.

Keywords: shallow flow equations, unstructured grid, WAF, HLLC Riemann solver

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Son yıllarda en modern kentler dahi sel felaketlerinde savunmasız kalabilmektedir. İklim değişikliği, nüfus artışı, arazi kullanımında değişim, ormansızlaşma ve taşkın havzalarındaki kentsel yerleşim sel felaketlerinin giderek daha şiddetli ve sık görünmesine sebep olmaktadır. Sel analizlerinin yapılabilmesi için öncelikle taşkın dalgalarının doğal nehir yataklarından nüfus yoğunluğu fazla olan kentsel alanlara kadar farklı karakterdeki arazi üzerinde hidrolik davranışını tanımlayan matematik modellerin oluşturulmasına ve sayısal çözümüne ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun başlıca nedeni laboratuvarlarda kurulan hidrolik modellerin masraflı, vakit alıcı ve duruma özel olmasıdır. Buna karşılık matematik model bir problem için bir kez geliştirildiğinde sadece verilerin değiştirilmesiyle tüm benzer problemlere uygulanabilmektedir. Ayrıca, doğal ortamda daima 3-boyutlu olan akımların 1 veya 2-boyutlu matematik modelinin yapılarak basitleştirilmesi ve böylece pratik ve hızlı çözümler elde edilmesi mümkündür. Taşkın yayılımını modelleyen bu tip 1 veya 2-boyutlu denklemlerin sayısal çözümü için çeşitli yöntem ve bilgisayar programları geliştirilmiştir. Ancak mevcut yazılımların hemen hemen hepsi yabancı kaynaklı olup ticari yazılımlardır. Yerli bir yazılımın olmaması maliyetli olmakla birlikte farklı sayısal ve fiziksel koşullara uyarlamayı da kısıtlayabilmekte ve zorlaştırabilmektedir. Ülkemizde taşkın ilerlemesi üzerine yapılmış sayılı çalışmalardan bazıları [1, 2, 3, 4] ile örneklendirilebilir. Bunlardan çalışma [1]'de mevcut bir bilgisayar programı yardımıyla ve dinamik dalga yönteminin Saint Venant denklemlerine uygulanmasıyla, baraj yıkılması sonrası oluşan taşkın dalgası, 1-boyutlu olarak incelenmiştir. Çalışma [2]'de de 1-boyutlu Saint Venant modeli için mevcut başka bir hazır programın çıktıları kullanılmıştır. Çalışma [3] ise taşkın dalgasının baraj mansabında ilerlemesinin 2-boyutlu ele alındığı ve sıralı bir çözüm ağında

sonlu-farklar yöntemine dayanan mevcut bir yazılımın kullanıldığı en yeni taşkın analiz çalışması olarak gösterilebilir. [4] çalışması incelendiğinde ise araştırmacıların temelde 2-boyutlu sığ akım denklemlerini kullandığı ve kendi özgün yazılımlarıyla elde ettikleri 2-boyutlu SAD sayısal çözümlerinin, gerçekte 3-boyutlu olan hidrolik akımlara uygulanabilirliği üzerine çalıştıkları görülmektedir. Ayrıca sayısal çözümler sıralı çözüm ağında (kare elemanlar) Riemann çözücülerini içeren Godunov sonlu hacim yöntemiyle [5] elde edilmiştir. Bu çalışmada ise taşkın ilerlemesini modelleyen 2-boyutlu derinlik integralli sığ akım denklemlerini karmaşık şekilli ortamlarda sırasız hesap ağı üzerinde sayısal çözen özgün bir bilgisayar yazılımı geliştirilmesi amaçlanmıştır. Kullanılan WAF sayısal modeli ve modelin sırasız ağda uygulandığı ve yazılıma aktarılması ayrıntılı olarak işlenmiştir.

İki boyutlu sığ akım denklemleri taşkın analizinin yanı sıra geniş ırmaklar, nehirler, sığ göller ve kıyı bölgelerinin benzetimlerinde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Çünkü SAD denklemleri herhangi bir serbest yüzeyli akım için kullanıldığında sayısal bakımdan önemli avantajlar sağlamaktadır. Kilometrelerce uzayıp giden taşkın alanlarında akım parametrelerinin düşey yöndeki değişimi önemsiz kalacağından denklemler derinlik yönünde integrallenir ve doğrudan derinlik ortalamalı değerler için çözüm yapılır. Böylece çözümün ilk çıktısı süreklilik denkleminde elde edilen su derinliği olacaktır. Ayrıca düşey yönde hidrostatik basınç varsayımı ile de basınç terimi denklemlerden düşürülür ve böylece basınç için ayrıca bir çözüm yapmak gerekmez. SAD denklemlerinin bir diğer önemli özelliği de akımdaki süresizliklerin sayısal modelde tanımlanmasına izin vermesi ve böylece bu süresizlik noktaları etrafında sonlu hacim yöntemiyle uyum içinde çalışarak süresizliklerin düzlenmeden olduğu gibi yakalanmasına olanak sağlamasıdır [5, 6].

Literatürde SAD çözümü için mevcut sayısal yöntemlerden büyük bir çoğunluğu sıralı çözüm ağı üzerinde verilmektedir [[7, 8, 9, 10, 11]. Bu durum özellikle karmaşık akım geometrilerinin modellenmesinde zorluklar doğurmaktadır. Bundan dolayı bu çalışmada üçgen hücrelerden oluşan sırasız bir çözüm ağı [[12, 13, 14, 15] ile çalışılmıştır. Böylece üretilen çözüm kodunun gerçek hayattaki problemlere uygulanabilirliği artırılmıştır. Çözüm alanının üçgen elemanlara bölünmesi, girintili-çıkıntılı sınır bölgelerinin doğru tanımlanmasını kolaylaştırmakta ve sayısal çözümde sınır koşullarının doğru ve yüksek hassasiyetle uygulanmasına olanak vermektedir. Örneğin, eğrilerden oluşan bir köprü ayağını akım alanı içinde doğru tanımlamak kolaylaştığı gibi dikkat gerektiren sınır bölgelerinde de hücre sayısı arttırılabilir.

Denklemlerin doğrusal olmayan hiperbolik yapısı nedeniyle analitik çözüm sadece bazı özel durumlar için mevcuttur [16]. Geçmişte çözüm için Sonlu Fark (Finite Difference) ve Sonlu Eleman (Finite Element) sayısal yöntemlerinden faydalanılmıştır. Ancak sonlu fark yöntemi kütleli korumadığı gibi denklemlerdeki türevlerin sonlu fark yaklaşımları süreksizlik noktalarının komşuluğunda yeterli olmamaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ise kütleli tanım bölgesinin bütününde korur fakat noktasal olarak koruma sağlamaz ayrıca süreksizlik noktalarında da salınımlar içermektedir. Bu nedenlerle son yıllarda ağırlıklı olarak sonlu hacim yöntemi (FVM) ile çözüm aranmaktadır. Sonlu hacim yöntemlerinde, akım bölgesi çözüm ağını oluşturan küçük ‘kontrol hacimleri’ne ayrıştırılmakta ve denklemin bu hacimler üzerinde integrali alınarak, sayısal yaklaşımlar denklemlerin her kontrol hücresindeki integral formu üzerinde uygulanmaktadır. Her bir zaman adımında hücre ara-yüzlerindeki akılar hesaplanır ve sonra değişkenlerin her bir hücre içindeki ortalama değerlerine ulaşılır. Sonlu hacim yöntemleri diğer yöntemlere kıyasla süreksizlik durumunda da hücre ara-yüzlerindeki akıların daha doğru hesaplanmasına olanak sağlamaktadır. Hücreler arası akıların hesaplanmasında, ‘rüzgar yönlü şemalar’ tercih edilmektedir. Bunun başlıca nedeni rüzgar yönlü şemaların ara-yüz hesapları esnasında akım yönünü dikkate alarak daha doğru akı sonuçları vermesindedir. Bu çalışmada da 2-boyutlu sığ akım denklemleri sırasız bir çözüm ağı üzerinde sonlu hacim yöntemi ile HLLC rüzgar yönlü şemalar ve toplam salınım azaltmalı ağırlık ortalamalı akı yönteminin (TVD-WAF) ortak uygulamasıyla çözülmüştür.

2. GENEL DENKLEMLER(GOVERNING EQUATIONS)

Sığ akım denklemleri Reynolds ortalamalı Navier-Stokes denklemlerinin derinlik üzerinde integralinin alınması ile elde edilir [5]. Denklemler türetilirken su derinliğinin yatay düzlemdeki akım alanına göre daha küçük olduğu (sığ akım teorisi) kabul edilerek, düşey yönde akım ivmesi sıfır alınır. Bu varsayımın bir sonucu olarak düşey yönde basınç dağılımı hidrostatik olacağından basınç için bir çözüme ihtiyaç kalmamaktadır. Süreklilik denklemi ve x - ve y -yönlerinde iki momentum denklemlerinden oluşan sığ akım denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -gh\frac{\partial z_b}{\partial x} - ghS_{fx} \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}\left(hv^2 + \frac{gh^2}{2}\right) &= -gh\frac{\partial z_b}{\partial y} - ghS_{fy} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada h su yatağından serbest yüzeye kadar olan su derinliği, g yerçekimi ivmesi, u ve v sırasıyla x - ve y -yönlerindeki derinlik integralli hız bileşenleridir. z_b su yatağı derinliği olup türevleri $S_{0x} = -\partial z_b/\partial x$ ve $S_{0y} = -\partial z_b/\partial y$, x - ve y -yönlerindeki yatak eğimlerini gösterir. S_{fx} ve S_{fy} su yatağı sürtünme gerilmeleridir ve n Manning pürüzlülük parametresi olmak üzere

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2)$$

eşitlikleri ile tanımlanırlar.

$$\begin{aligned} U &= (h, hu, hv)^T \\ E(U) &= \left(hu, hu^2 + \frac{gh^2}{2}, hvu\right)^T \\ G(U) &= \left(hv, huv, hv^2 + \frac{gh^2}{2}\right)^T \\ S_b(U) &= (0, ghS_{0x}, ghS_{0y})^T \\ S_f(U) &= (0, -ghS_{fx}, -ghS_{fy})^T \end{aligned} \quad (3)$$

vektörel ifadelerinde, U bilinmeyenler vektörünü, E ve G viskoz olmayan konvektif akı bileşenlerini, $S(U) = S_b(U) + S_f(U)$ kaynak terimini

göstermek üzere (1) sisteminin toplu vektörel formu

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = S(U) \quad (4)$$

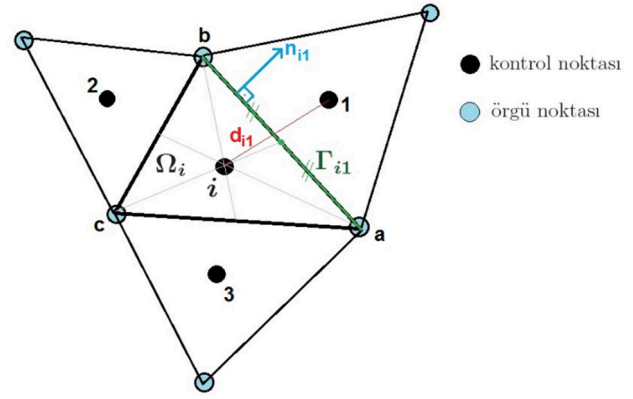
şeklinde yazılabilir.

3. ÜÇGEN ÇÖZÜM ÖRGÜSÜNDE SONLU HACİM YAKLAŞIMI (THE FINITE VOLUME APPROXIMATION ON TRIANGULAR GRID)

Sığ akım denklemleri doğrusal değildir ve $h > 0$ için kesin hiperbolik karakterli olup $h = 0$ durumunda bu hiperbolikliği kaybetmektedir. Bu ise tanım bölgesinde derinliğin yok olarak kuru zemin bölgelerinin belirebildiği anlamına gelmektedir. Bu denklemlerin en önemli özelliği su yüzeyinde oluşabilecek şok dalgalarından dolayı çözümünde süreksizlikler içermesidir. Bu nedenle kullanılacak sayısal çözüm yönteminin bu şok dalgalarını yakalayabilecek ve doğru olarak hesaplayabilecek nitelikte olması gerekir.

Bu çalışmada sığ akım denklemleri sayısal olarak hücre-merkezli sonlu hacim yöntemiyle çözülmektedir. Akım alanı 2-boyutlu yatay düzlemde üçgen elemanlara ayrılarak geometrik ayrıklaştırma yapılır. Akı teriminin hesabında WAF yöntemi kullanılarak düzlemde ikinci dereceden doğruluk elde edilir. Hücreler arası akı hesabı yapılırken HLLC Riemann çözücüsünden faydalanılması çözümün şok dalgalarıyla beraber ara-yüz temas (contact) dalgalarını yakalama özelliğini de destekler.

Şimdi sonlu hacim yöntemlerinin genel bir uygulaması olarak problemin tanım bölgesi, Ω , NT adet sonlu sayıda üçgen bölgeye bölünsün. Üçgenlerden oluşan böyle bir yapısız çözüm ağında bir kontrol hacim elemanı, bu hacim elemanının komşu üçgenleri ve üçgenler arası hücre ara-yüzlerini Şekil 1'de incelemek mümkündür. Ω_i , $i = 1, \dots, NT$ üçgenlerinden her biri kontrol hacim elemanı (sonlu hacim) olarak adlandırılır. Buna göre her bir üçgenin ağırlık merkezi kontrol noktalarıdır. Çözüm örgüsünün elemanları da üçgenlerin köşe noktalarından oluşmaktadır ve sonlu sayıda üçgen için örgü noktalarının sayısı NG ile gösterilmektedir. Her bir kontrol üçgeninin saat yönünün tersine numaralandırılmış 3 komşusu ve ortak eleman olarak paylaştığı 3 ara-yüz bulunmaktadır.



Şekil 1. Sayısal çözüm ağı (Numerical solution grid)

Örneğin i ile 1 kontrol noktalarının (Şekil 1) ortak doğru elemanı Γ_{i1} olup d_{i1} bu iki nokta arasındaki uzaklığı göstermektedir. Kodlama esnasında da her bir üçgenin köşe noktaları (a , b ve c), komşu üçgenleri ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) ve ara-yüz elemanları (Γ_{i1}, Γ_{i2} ve Γ_{i3}) saat yönünün tersine sıralanarak hafızada saklanmıştır. Ayrıca hangi kontrol üçgeni için çalışılıyorsa o üçgenin ara-yüz elemanlarına ait normal vektörlerinin yönlerine dikkat edilmelidir. Γ_{i1} ara-yüz elemanı için belirtilen normal vektörü n_{i1} bu elemana dik ve i kontrol noktası içte kalacak şekilde dışa doğrudur.

Literatürde böyle bir çözüm ağı elde etmek için çeşitli bilgisayar kodları bulunmaktadır. Bu çalışmada Per-Olof Persson ve Gilbert Strang'ın [17] ortak yayınlarında sunmuş oldukları MATLAB çözüm ağı üreticiden faydalanılmıştır. Bu kod geliştirilerek FORTRAN programlama diliyle yazılan yeni ana kod ile uyumlu hale getirilmiş ve böylece çözüm kodunun değişik ve karmaşık geometrilerde kullanılmasına olanak sağlamıştır.

Sırasız çözüm ağında sonlu hacim yöntemi denklemlere aşağıdaki gibi uygulanır. Bölgenin üçgenlere bölünmesinden sonra her bir Ω_i hücresi üzerinden (4) denkleminin integrali alınır.

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega_i + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot [E(U), G(U)] d\Omega_i = \int_{\Omega_i} S(U) d\Omega_i \quad (5)$$

Şimdi hücre merkezli sonlu hacim yöntemi gereği bilinmeyenlerin, h, hu ve hv , her bir Ω_i hücresi boyunca sabit olarak o hücrenin ağırlık merkezindeki değere eşit olduğu varsayımı yapılır. Yani, $[t_n, t_{n+1}]$ zamanda bir adım aralığını göstermek üzere integral ortalama değer teoreminden $\forall (x, y, t) \in \Omega_i \times [t_n, t_{n+1}]$ için

$$U(x, y, t) \approx U(x_i, y_i, t) =: U_i(t) = \frac{1}{A(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} U(x, y, t) d\Omega_i \quad (6)$$

olduğu kabul edilir. Burada $A(\Omega_i)$, Ω_i üçgeninin alanını belirtir. Bu varsayım ile (5) denklemindeki zaman türevli birinci terim ve kaynak terimi integralleri aşağıdaki gibi sadeleşir.

$$\frac{dU_i(t)}{dt} + \frac{1}{A(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot [E(U), G(U)] d\Omega_i = S(U_i) \quad (7)$$

Bu eşitlikteki akı gradyanını içeren ikinci terim ise aşağıdaki gibi Iraksama Teoremi gereği, \mathbf{n} ilgili hücrenin sınırındaki birim normal vektör ve Γ_i , Ω_i üçgeninin sınırını göstermek üzere, bölgesel integral sınır integraline indirgenir.

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{1}{A(\Omega_i)} \int_{\Gamma_i} [E(U), G(U)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i = S(U_i) \quad (8)$$

Ayrıca akı teriminin sınır integrali her bir ara-yüz üzerinden integral toplamına eşittir, şöyleki

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{1}{A(\Omega_i)} \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_{ij}} [E(U), G(U)] \cdot \mathbf{n}_{ij} d\Gamma_{ij} = S(U_i) \quad (9)$$

Şimdi her bir ara-yüzdeki akıya $\forall (x, y, t) \in \Gamma_{ij} \times [t_n, t_{n+1}]$ için

$$[E(U), G(U)] \approx [E(U_{ij}), G(U_{ij})] \quad (10)$$

gibi orta-nokta kuadratür yaklaşımı yapılırsa sığ akım denklemlerinin sonlu üçgen hacimlere ayrıklaştırılması

$$\frac{dU_i}{dt} = - \frac{1}{A(\Omega_i)} \sum_{j=1}^3 [E(U_{ij}), G(U_{ij})] \cdot \mathbf{n}_{ij} |\Gamma_{ij}| + S(U_i) \quad (11)$$

şeklinde elde edilir. Burada $|\Gamma_{ij}|$, i ile j hücreleri arasındaki ara-yüz doğrusal elemanın uzunluğudur.

4. ZAMAN YÖNÜNDE AYRIKLAŞTIRMA (TIME DISCRETIZATION)

Ara-yüzlerdeki akı hesabı için kullanılacak olan WAF teorik olarak hem zamanda hem de uzaya ikinci dereceden doğrulukludur. Ancak uzaydaki gibi zaman yönünde de ikinci derece doğruluğu garantilemek ve zaman entegrasyonunu iyileştirmek için ikinci dereceden iki adımlı Runge-Kutta yöntemi kullanılır. Şimdi Denklem

(11)'de bilinmeyen zamana bağlı türevi ayrıklaştırılacağından denklemin sağ tarafı bir Ω_i kontrol hücresi için $K(U_i(t))$ kısaltması ile gösterilsin

$$\mathbf{K}(U_i(t)) := - \frac{1}{A(\Omega_i)} \sum_{j=1}^3 [E(U_{ij}), G(U_{ij})] \cdot \mathbf{n}_{ij} |\Gamma_{ij}| + S(U_i)$$

buna göre

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = K(U_i(t)) \quad (12)$$

eşitliği t zaman değişkenine göre bir adi diferansiyel denklemdir ve bir $t \in [t_n, t_{n+1}]$ zaman adımında $U_i(t) \approx U_i^n$ yaklaşımı ile ikinci derece doğruluklu Runge-Kutta uygulaması şöyle türetilir

$$U_i^p = U_i^n + \Delta t \mathbf{K}(U_i^n) \\ U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + U_i^p + \Delta t \mathbf{K}(U_i^p)) \quad (13)$$

Burada 'p' üst indisi bir öndeğerleme basamağını göstermektedir ve $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ zaman adımındadır. Bu zaman adımı farklı boyutlardaki üçgenlere ayrılmış tanım bölgesinin her bir elemanında akı hesabını kontrollü tutacak şekilde belirlenir. Bunun için gerekli CFL (Courant Frederic Levy) koşulu [5]

$$\text{CFL} \leq 1 \quad (14)$$

olmasıdır. Δt ve CFL arasındaki bağıntı kullanılan çözüm örgüsüne veya akı için kullanılan sayısal yöntemle göre farklı şekillerde tanımlanabilir. Bu çalışmada belirtilen çözüm ağı ve sayısal yöntemle uyumlu olarak zaman adımı belirlemede aşağıdaki bağıntı kullanılmıştır [15].

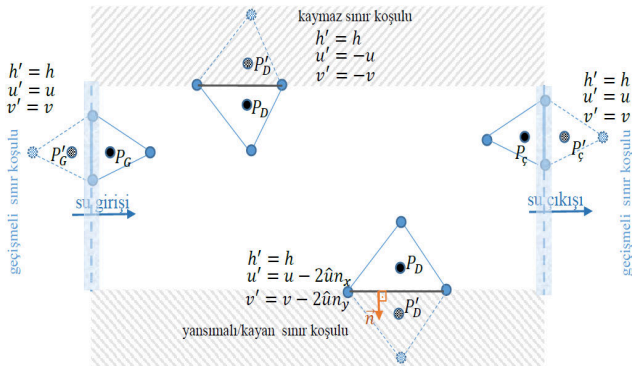
$$\Delta t \leq \text{CFL} \min_i \left(\frac{\min_j \{|\Gamma_{ij}|\}}{\max_j \{|\hat{\mathbf{u}}_{ij} + c_i\}} \right), \quad i \in [1, NT], \quad j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

Burada $\hat{\mathbf{u}}_{ij} = u_i(n_x)_{ij} + v_i(n_y)_{ij}$, Γ_{ij} ara-yüzündeki normal hızdır (ara-yüze dik hız bileşeni), ve bir i kontrol noktası için c_i dalga hızı (celerity) olup $c_i = \sqrt{gh_i}$ ile verilir.

5. SINIR KOŞULLARI (BOUNDARY CONDITIONS)

Sayısal yöntemin hangi sınır koşullarıyla ve nasıl uygulanacağı da önemli bir ayrıntıdır. Özellikle hayali hücrelere sınır koşullarının atanması gibi

işlemler, sıralı-çözüm ağlarıyla karşılaştırıldığında sırasız-çözüm ağlarında daha zordur ve yazılımda oldukça dikkat gerektirir. Oluşabilecek farklı sınır-koşulu tipleri ve sınırdaki hayali hücre değerlerinin nasıl atanacağı, genelliği kaybetmeden dikkörtgensel bir kanal için Şekil 2'deki gibi örneklendirilebilir.



Şekil 2. Yardımcı sınır hücrelerinde sınır koşullarının atanması (Assigning boundary conditions to boundary ghost cells)

Burada P' kanal içindeki bir sınır kontrol noktasının yansımısını sembolize eder. P ve P' noktalarının alt indislerinden G suyun girişini, C suyun çıkışını ve D katı duvar sınırlarını simgelemektedir. n_x ve n_y ilgili sınır hücresinin sınır-kenarındaki dış doğru birim normal vektörü $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 'nin bileşenleridir. $\hat{u} = un_x + vn_y$ ilgili sınır yüzeyine dik hızı (normal hız) ve $\hat{v} = -un_y + vn_x$ ise aynı yüzeye teğet hızı verir. Bütün sınır koşulu tipleri için h, u ve v parametrelerinin bir P' hayali kontrol noktasında alacağı yaklaşık değerler h', u' ve v' parametreleri ile verilmiştir (Şekil 2, Tablo 1).

Tablo 1. Sınır koşuluna göre yardımcı hücre değişken değerlerinin atanması (Assigning boundary ghost cell values with respect to the boundary condition type)

$h' = h$	
$u' = u - 2\hat{u}n_x$	Kayan (slip) veya yansıyan (reflective) sınır koşulu
$v' = v - 2\hat{v}n_y$	
$h' = h$	
$u' = -u$	Kaymaz (no-slip) sınır koşulu
$v' = -v$	
$h' = h$	
$u' = u$	Geçişmeli (transmissive) sınır koşulu
$v' = v$	

Sırasız bir çözüm ağında eğrisel kanal sınırları söz konusu olduğunda sınırdaki yüzey elemanları düşey veya yatay olmayabilir. Bu nedenle atamalar açılı-sınır elemanları düşünülerek ve ilgili normal vektörü dikkate alınarak verilmiştir. Örneğin katı duvar sınırında bulunan bir üçgenin kontrol noktasındaki hız vektörünün yansımaları, ilgili duvar yüzeyine göre ortogonal izdüşüm alınarak elde edilir (Tablo 1). Sınırdaki ve yardımcı hücrelerde gereken momentum değerleri de bu atamalar yardımıyla verilebilir. Örneğin yardımcı bir sınır hücresindeki x -momentumunun değeri $(hu)' = h'u'$ olacak şekilde derinlik ve hız bileşenlerinin atanmış hayali değerlerinin çarpımıyla hesaplanabilir. Ya da yeni bir işlem gerektirmeden bu çalışmada olduğu gibi her bir iterasyonun sonucunda elde edilen momentum değerleri direkt olarak bir sonraki iterasyonda kullanılmak üzere atanır. Bununla birlikte Tablo 1'deki hız bileşenlerinin izdüşümlerindeki yön ve işaret değişiklikleri hayali sınır hücresi momentum değerleri için de dikkate alınmalıdır. Ayrıca su girişi sınırında ilk anda dikey bir hız söz konusu olmadığından $v_0 = 0$ olup, y -momentumunun başlangıç değeri $(hv)_0 = 0$ alınır.

6. AĞIRLIK ORTALAMALI AKI YÖNTEMİ (WEIGHTED AVERAGED FLUX METHOD)

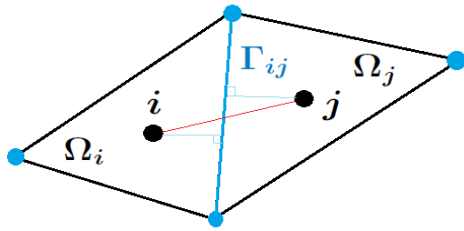
Bu bölümde süreklilik ve momentum denklemlerinin akı hesabı için ikinci derece doğruluklu ağırlık ortalamalı akı yönteminin uygulanışı anlatılmaktadır. Bu çalışmada WAF yöntemi HLLC Riemann çözücüsüyle beraber kullanılmıştır. Esasında bu yöntem Godunov Rüzgar Yönlü yönteminin ikinci mertebeden doğruluğa yükseltilmesidir [5, 6]. WAF-HLLC de yine 'rüzgar yönlü' bir şema olup ara-yüz hesaplarında akım yönünü dikkate aldığı için daha doğru akı sonuçları vermektedir. Ancak zaman ve uzayda daha yüksek mertebeden sayısal çözüm yolları salınımlı sonuçlar doğurmaktadır. Bu salınımları söndürmek için ise ara-yüzlerde gradyan hesaplarında eğim-sınırlayıcıları veya akı-sınırlayıcılarını kullanmaya olanak veren 'Toplam Salınım Azaltmalı' (TVD) formundan yararlanılır. TVD teorisiyle ilgili detaylı çalışma, Versteeg ve Malalasekera 'nın ortak kitabından [18] faydalanılarak yapılmıştır. Özellikle unstructured çözüm ağları için sundukları TVD şeması ara-yüz gradyan hesaplarında çok gereklidir. Ayrıca TVD formunda ihtiyaç duyulan gradyan sınırlamaları Tu ve Aliabadi [19] 'nin makalesinde olduğu gibi yapılır. Önce her bir ara-

yüzeyde bu yüzeyi paylaşan hücre bilgileri kullanılarak ara-yüz gradyan yaklaşımları hesaplanır. Daha sonra her bir hücrenin üç kenar gradyanının alan-ağırlıklı ortalamaları alınarak gradyan hesabı hücre merkezine taşınır. Daha ileri bir adım olarak bu merkezil gradyan değerleri bir akı-sınırlayıcı fonksiyonu yardımıyla sınırlanır. Sırasız ağlar için verilen bu üç basamaklı yaklaşım ilk kez bu çalışmada sunulmuştur. Aşağıda sırasız ağda iç-hücreler ve özellikle sınır-hücreleri için gradyan hesaplama ve sınırlandırma işlemleri ayrıntılı olarak verilmektedir.

6.1. HLLC Riemann Çözücüsü (HLLC Riemann Solver)

Godunov tipli sayısal yöntemlerde ara-yüz akı hesaplarında gerçek veya yaklaşık Riemann çözücülerinden faydalanılır. SAD denklemlerinde ise yaklaşık Riemann çözücülerini kullanmak gerçek (analitik) Riemann çözücülere göre %20 daha verimlidir [5]. Bu yaklaşık Riemann çözücülerden Roe ve HLL (Harten, Lax ve van Leer) özellikle 1-boyutlu uygulamalarda [16] kullanılmaktadır. Çalışmanın bu kısmında 2-boyutlu SAD çözümü için WAF ile daha uyumlu HLLC (burada C ara-yüz temas (contact) dalgasını belirtir) Riemann çözücüsü kullanılacaktır.

Şekil 3'te sırasız bir çözüm ağında herhangi Ω_i ile Ω_j komşu üçgenlerinin doğrusal ara-yüz elemanı olan Γ_{ij} gösterilmiştir.



Şekil 3. Komşu hücreler ve ortak yüzey Γ_{ij} (Neighbouring cells and the common interface Γ_{ij})

Buna göre sırasız bir ağda herhangi bir ara-yüzde Riemann problemi şöyle sunulabilir

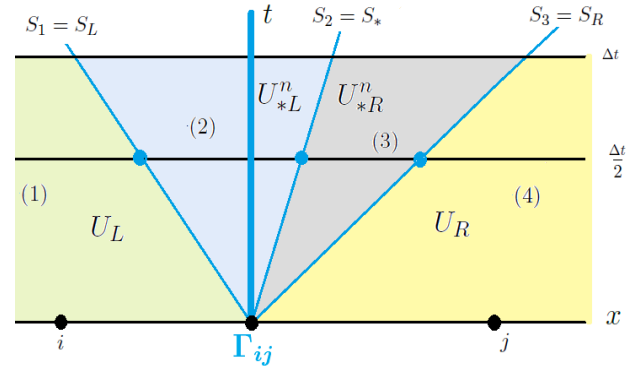
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0$$

$$U(x, y, t) = \begin{cases} U_i^n(x, y, t) \in \Omega_i - \Gamma_{ij} \times [t_n, t_{n+1}] \\ U_j^n(x, y, t) \in \Omega_j - \Gamma_{ij} \times [t_n, t_{n+1}] \end{cases} \quad (16)$$

Burada $F(U) = [E(U), G(U)]$ akıdır. Bu ara-yüzdeki Riemann probleminin çözümü ise $U_{ij}(x, y, t)$ ile gösterilir. Yani çözüm Ω_i ile Ω_j üçgenleri arasındaki doğrusal elemana, Γ_{ij} 'ye aittir. Bir (x, y, t) noktasının ait olduğu üçgen

bölgeye göre merkezil nokta çözüm gösterimleri $U_i^n = U(x_i, y_i, t_n)$ ve $U_j^n = U(x_j, y_j, t_n)$ şeklindedir.

Ara-yüz Γ_{ij} 'in her iki yanında ve tam üzerinde oluşan dalga tipleri Riemann yaklaşımlarında önemlidir. Bu dalgalar ara-yüzün sağında ve solunda oluşan şok dalgaları veya seyreltik (rarefaction) dalgalar olabileceği gibi tam ara-yüz üzerinde oluşan kesme (shear) veya temas yüzeyi (contact) dalgaları da olabilir. Buna göre HLLC Riemann çözücüsünün ara-yüz dalga yapısı Şekil 4'teki gibidir [5].



Şekil 4. Ara yüzey dalga tahminleri (Interface wave structures)

Görüldüğü üzere HLLC, ara-yüz dalga profilini 3 dalga ile 4 bölgeye ayırır. Burada S_R ve S_L üçgenlerin konumuna göre sırasıyla ara-yüzün iki yanındaki sağ ve sol dalgaları, S_* da (2) ve (3) bölgelerinin birleşiminden oluşan yıldız bölgesindeki orta dalgayı ifade eder. U_L, U_R, U_{*L} ve U_{*R} ise Şekil 4'te numaralandırılmış bölgelerdeki çözümleri vermektedir.

Ara-yüzün solunda kalan noktalar için yaklaşık çözümler i kontrol noktasındaki değer olarak alınır. Benzer şekilde ara-yüzün sağında kalan noktalar için de çözümler j kontrol noktasındaki değer olarak alınır. Yani yaklaşımlar,

$$U_L = U_i^n, \quad U_R = U_j^n \quad (17)$$

şeklindedir. Yukarıdaki dalga tahminlerinin (Şekil 4) varlığı kabul edilerek herhangi bir Γ_{ij} ara-yüzündeki sayısal HLLC akı yaklaşımı aşağıdaki gibi türetilir [5, 6].

$$F^{HLLC}|_{\Gamma_{ij}} = \begin{cases} F_L, & 0 \leq S_L \\ F_{*L}, & S_L \leq 0 \leq S_* \\ F_{*R}, & S_* \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & S_R \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

Dalga bölgelerine göre akı yaklaşımları açıkça Tablo 2'de tanımlanmıştır.

Tablo 2. Dalga bölgelerine göre HLLC akı yaklaşımları (HLLC flux approximations according to wave structures)

$F_L = F(U_i^n) = [E(U_i^n), G(U_i^n)]$	bölge (1) deki akı
$F_{*L} = F_L + S_L(U_{*L}) - U_L$	bölge (2) deki akı
$F_{*R} = F_R + S_R(U_{*R}) - U_R$	bölge (3) deki akı
$F_R = F(U_j^n) = [E(U_j^n), G(U_j^n)]$	bölge (4) deki akı

Ayrıca yıldız bölgesinin sağ ve sol değişken değerleri ve ilgili parametreler aşağıdaki gibi verilir [5].

$$U_{*K} = h_K \begin{pmatrix} S_K - u_K \\ S_K - S_* \\ v_K \end{pmatrix}, \quad K = L, R \quad (19)$$

$$S_L = u_L - p_L \sqrt{gh_L}, \quad S_R = u_R - p_R \sqrt{gh_R}$$

$$p_K = \begin{cases} \sqrt{\frac{h_*(h_* + h_K)}{2h_K^2}}, & h_* > h_K \\ 1, & h_* \leq h_K \end{cases} \quad (20)$$

$$h_* = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4} (u_L - u_R) \right]^2$$

$$u_* = \frac{1}{2} [u_L + u_R] + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (21)$$

$$S_* = \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)}$$

Dikkat edilirse Denklem (19)'da tanımlı U_{*K} 'in üçüncü bileşenindeki v_K , $K = L, R$ ilgili ara-yüzün sol(L) veya sağ(R) hücrelerindeki teğetsel hız bileşenidir. u_K , $K = L, R$ ise yönü sol veya sağ komşu üçgenlere göre belirli ara-yüze dik normal hız bileşenidir.

6.2. WAF Yönteminin Sırasız Ağda Toplam Salınım Azaltmalı Formu (TVD Version of WAF on Unstructured Grids)

Genel olarak herhangi bir ara-yüzde akı, WAF yöntemi ile aşağıdaki gibi formüle edilir [5, 6].

$$F_{ij}^{WAF} = \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k F_{ij}^{(k)} \quad (22)$$

N dalga sayısını ve $F_{ij}^{(k)}$, bu dalgaların her bir Γ_{ij} ara-yüzünde ayırdığı (Şekil 4) $k = 1, 2, 3, 4$ bölgelerindeki akıları gösterir. Katsayılar

$$\beta_k = \frac{1}{2} (c_k - c_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N + 1$$

$$c_0 = -1, \quad c_{N+1} = 1, c_k = \frac{\Delta t}{d_{ij}} S_k \quad (23)$$

şeklinde dir. Her bir k dalgası için dalga hızları S_K , Courant sayıları c_k ile gösterilir. d_{ij} , i ve j komşu üçgenlerin ağırlık merkezleri arasındaki uzaklıktır (Şekil 3). Uygulanacak WAF yönteminde HLLC Riemann çözücüsü (Denklem (18)) ile çalışıldığında $N = 3$ tane dalga için akı yaklaşımı (Denklem (22)) aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$F_{ij}^{HLLC-WAF} = \frac{1}{2} (F_i + F_j) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 c_k \Delta F_{ij}^{(k)} \quad (24)$$

$$\Delta F_{ij}^{(k)} = F_{ij}^{(k+1)} - F_{ij}^{(k)}$$

Daha ileri bir adım olarak 2. mertebeden doğruluklu bu yöntemin, çözümde oluşabilecek salınımları söndürmeye yardımcı bir toplam salınım azaltmalı formu kullanılır. Dolayısıyla akının herhangi bir ara-yüzdeki TVD-WAF ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$F_{ij}^{TVD-WAF} = \frac{1}{2} (F_i + F_j) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sigma(c_k) \phi_{ij}^{(k)} \Delta F_{ij}^{(k)} \quad (25)$$

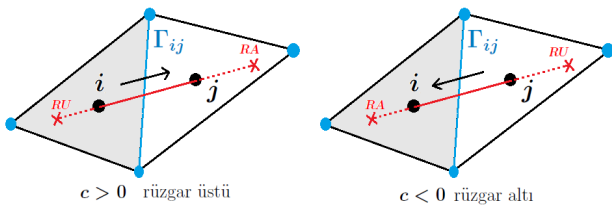
$\sigma(\cdot)$ işaret fonksiyonudur ve ϕ_k rüzgar yönlü ve yerel değişimlerin oranına bağlı bir akı sınırlayıcı fonksiyondur. Kaynaklarda Superbee, van Leer, van Albada ve minbee gibi çeşitleri bulunmaktadır [5, 6]. Bu çalışmada oluşturulan bilgisayar kodu yukarıdaki bahsedilen akı sınırlayıcı fonksiyon tiplerinin hepsi için çalıştırılabilir esneklikte olup sayısal sonuçlar ortak olarak minbee akı sınırlayıcı fonksiyonu yardımıyla hesaplanmıştır. Minbee sınırlama fonksiyonu şöyledir [5].

$$\phi(r, |c|) = \begin{cases} 1 & , r \leq 0 \\ 1 - (1 - |c|)r & , 0 \leq r \leq 1 \\ |c| & , r \geq 1 \end{cases} \quad (26)$$

Sıralı bir çözüm ağında çalışılıyor olsaydı r rüzgar yönlü ve yerel değişim oranları her bir dalganın yönüne göre aşağıdaki gibi tanımlanırdı [5]

$$r^{(k)} = \begin{cases} \frac{\Delta q_{i-\frac{1}{2}}^{(k)}}{\Delta q_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}} = \frac{q_i^{(k)} - q_{i-1}^{(k)}}{q_{i+1}^{(k)} - q_i^{(k)}}, & c_k > 0 \\ \frac{\Delta q_{i+\frac{3}{2}}^{(k)}}{\Delta q_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}} = \frac{q_{i+2}^{(k)} - q_{i+1}^{(k)}}{q_{i+1}^{(k)} - q_i^{(k)}}, & c_k < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Yukarıdaki ifade incelendiğinde sıralı bir çözüm ağında bir $i + \frac{1}{2}$ ara-yüzeyi üzerindeki (i ile $i + 1$ hücreleri arasındaki yüzey) değişim oranlarını hesaplamak için q herhangi bir bilinmeyi göstermek üzere q değişkeninin i hücresindeki değerine ek olarak solundaki, q_{i-1} , sağdaki, q_{i+1} ve sağdaki ikinci, q_{i+2} kontrol noktasındaki değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Sıralı bir çözüm ağında hücreler birbirini yatay veya dikey olarak takip ettiğinden bunu yapmak kolaydır. Ancak sırasız bir çözüm ağında hücreler birbirini belli bir sırayla takip etmediği ve hücre kenarları paralel olmadığı için gradyan değişimleri yukarıdaki gibi tanımlanamaz. Literatürde sırasız ağlar için gradyan değişimlerini tanımlayan çok az kaynak bulunmaktadır. Bunlardan Versteeg ve Malalasekera [18] kitaplarında sırasız ağlar için TVD şemalarına değinmiştir. Bu çalışmada da ara-yüz gradyan değişim oranları bu TVD şemalarından faydalanılarak, geliştirilen yazılıma uyumlu olacak biçimde ve sırasız üçgen çözüm ağı üzerinde, yeniden tanımlanmıştır.



Şekil 5. Akım yönüne göre rüzgar altı (RA) ve rüzgar üstü (RU) noktalarının seçimi (Selection of downstream and upstream nodes upon the flow direction)

Şekil 5'te görüldüğü gibi Courant sayısının işareti rüzgar üstü, RU, ve rüzgar altı, RA, durumlarını belirtir.

Öncelikle ϕ bir akı sınırlayıcı fonksiyon (Denklem (26) gibi) ve q herhangi bir değişken (derinlik, debi veya hız) olmak üzere bir Γ_{ij} ara yüzeyinde TVD şeması aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$q_{arayüz} = \begin{cases} q_{RU} + \frac{1}{2} \phi(r_{RU}, |c|)(q_{RA} - q_{RU}), & c > 0 \\ q_{RA} + \frac{1}{2} \phi(r_{RA}, |c|)(q_{RA} - q_{RU}), & c < 0 \end{cases} \quad (28)$$

Şimdi q değişkeninin RA ve RU değerleri rüzgar yönüne göre yaklaşık olarak kontrol nokta değerleri olarak alınsın. Bu aşamada RA ve RU değerlerini Şekil 5'te gösterilen yerlere interpolasyon ile kaydırmak hem çok külfetli olmakta hem de özellikle sınırda hayali hücre değerlerine ihtiyaç duyulacağından çözümün doğruluğunu azaltmaktadır. Ayrıca RA ve RU nokta koordinatları komşu hücrelere de

taşabileceğinden bir de üstüne komşu hücre örgü noktalarından gelen değerlerle yapılacak yaklaşımlar çok sağlıklı olmayacaktır. Bunun yerine hali hazırda elimizde olan kontrol nokta değerlerinin (i ve j hücre merkezlerindeki değerler) kullanılması daha elverişli ve verimli bir iş olacaktır. Buna göre Denklem (28) yeniden düzenlenecek olursa

$$q_{ij} = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \phi(r_{RU}, |c_k|)(q_j - q_i), & c > 0 \\ q_j + \frac{1}{2} \phi(r_{RA}, |c_k|)(q_j - q_i), & c < 0 \end{cases} \quad (29)$$

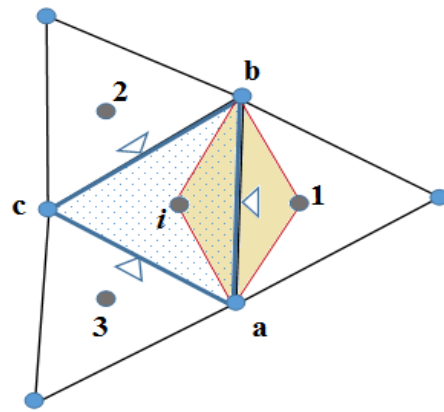
elde edilir. Böylece bu TVD şemasıyla rüzgar yönlü gradyan değişim oranları sırasız üçgen çözüm örgüsünde aşağıdaki gibi türetilir,

$$r^{(k)} = \begin{cases} r_{RU} = \frac{2\nabla q_i \cdot \vec{r}_{ij}}{q_j - q_i} - 1, & c_k > 0 \\ r_{RA} = \frac{2\nabla q_j \cdot \vec{r}_{ji}}{q_i - q_j} - 1, & c_k < 0 \end{cases} \quad (30)$$

Burada $\vec{r}_{ij} = (x_j - x_i, y_j - y_i)$ ile yönü i noktasından j noktasına doğru olan konum vektörü belirtilmektedir.

6.3. Ara Yüzeylerde Gradyan Yaklaşımı (Interface Gradient Approximation)

Bu bölümde sırasız bir çözüm ağında herhangi bir kenarı tanım bölgesinin sınırı üzerinde olmayan bir üçgen hücre ve bu hücrenin komşularıyla paylaşacağı ara yüzeylerinde gradyan yaklaşımı işlenmiştir. Herhangi bir kenarı sınırda olan hücreler için gradyan hesabına sonraki bölümde değinilecektir.



Şekil 6. Ara-yüz gradyan yaklaşımı (Interface gradient approximation)

Şekil 6'daki gibi belirli bir \vec{ab} doğrusal elemanın (ya da Γ_{i1} ara-yüzeyi) üzerinde gradyan yaklaşımı

için taralı $ia1b$ dörtgeninin köşe noktalarındaki değişken değerlerine ihtiyaç vardır.

$$\nabla q_{i1} = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{i1}, \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{i1} \right) \quad (31)$$

ifadesi Γ_{i1} ara yüzeyindeki yaklaşık gradyan değeri olmak üzere bileşenleri için bilinen en basit yaklaşım

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{i1} &= \frac{1}{2A_{ia1b}} [(q_1 - q_i)(y_b - y_a) \\ &\quad + (q_a - q_b)(y_1 - y_i)] \\ \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{i1} &= \frac{-1}{2A_{ia1b}} [(q_1 - q_i)(x_b - x_a) \\ &\quad + (q_a - q_b)(x_1 - x_i)] \end{aligned} \quad (32)$$

şeklinde. Burada A_{ia1b} ile $ia1b$ taralı dörtgeninin alanı gösterilmektedir. Denklem (32)'deki gradyan yaklaşımı (Taylor seri açılımlarında birinci türeve kadar olan terimlerle yaklaşım yapıldığından) 1. mertebeden yaklaşım olup çözüm ağı uniform üçgenlerden oluştuğunda kullanılması daha uygundur. Ancak çözüm kodunun çoklu bağlantılı ve düzensiz geometrilerde kullanılacağı düşünüldüğünde bu uniformluk garanti edilemez. Bu bağlamda gradyan yaklaşımını iyileştirmek gerekmektedir. Bunun için Tu ve Aliabadi [19]'nin ortak yayınında olduğu gibi her bir kontrol noktasındaki gradyan hesabı ilgili hücrenin tümüne ve komşularına ağırlıklı ortalamalı olarak dağıtılıp sınırlandırılacaktır. İşlem basamakları aşağıdaki gibidir.

Önce bir Ω_i üçgeninin her bir kenarında (32) yaklaşımı ile kenar gradyanlar hesaplanır sonra bunların alan-ağırlıklı ortalamaları alınarak i kontrol noktasındaki gradyan

$$\nabla q_i = \frac{A_{ia1b} \nabla q_{i1} + A_{ib2c} \nabla q_{i2} + A_{ic3a} \nabla q_{i3}}{A_{ia1b} + A_{ib2c} + A_{ic3a}} \quad (33)$$

olarak elde edilir. Daha ileri bir adım olarak bu yaklaşım van Albada'nın 1-boyutlu sınırlama fonksiyonuna benzer bir ağırlık fonksiyonu yardımıyla ilgili üçgeni çevreleyen komşu gradyanlarla aşağıdaki gibi sınırlanır.

$$\nabla q_i^S = \omega_1 \nabla q_1 + \omega_2 \nabla q_2 + \omega_3 \nabla q_3 \quad (34)$$

Burada üst indis, S , sınırlandırılmış gradyanı temsil eder. ω_1, ω_2 ve ω_3 sınırlayıcı ağırlık fonksiyonları olup şöyle tanımlanırlar [19]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{g_2 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon} \\ \omega_2 &= \frac{g_1 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon} \\ \omega_3 &= \frac{g_1 g_2 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon} \end{aligned} \quad (35)$$

$g_1 = \|\nabla q_1\|^2, g_2 = \|\nabla q_2\|^2$ ve $g_3 = \|\nabla q_3\|^2$ sınırlandırılmamış gradyanların $\|\cdot\| = L_2$ normlarının kareleridir. ϵ ise 10^{-10} olarak alınmıştır. Böylece sınırda kenar bulundurmeyen her üçgenin kontrol noktasında gradyan yaklaşımları hesaplanmış oldu.

Tanım bölgesinin sınırında bir veya iki kenar (köşe üçgen ise) elemanı bulandıran sınır-üçgenleri için ise yukarıdaki sınırlı-gradyan yaklaşımına benzer şekilde ancak ilgili doğrusal eleman üzerindeki sınır koşuluna dikkat edilerek aşağıdaki gibi bir yol izlenir.

6.4. Sınırdaki Gradyan Yaklaşımı (Gradient Approximation on Boundary)

$r^{(k)}$ oranları hesaplanırken ara-yüzün solunda ve sağında oluşan S_1 ve S_3 dalgaları için değişken $q = h$ alınırken S_2 dalgası için ise q değişkeni ilgili ara-yüzdeki teğetsel hız yani $q = \hat{v}$ alınır. Bu durum dikkate alınarak yardımcı sınır hücrelerinde h veya \hat{v} değerleri ilgili sınır koşuluna göre düzgün atanmalıdır. Gerekli cebirsel işlemler yapıldığında ilgili değişkenin yardımcı sınır hücre merkezindeki gradyan tayinleri aşağıdaki gibi türetilir. P bir sınır-hücre (bir veya iki kenarı sınır elemanı olan üçgen) olmak üzere P' bu sınır-hücreye yardımcı sınır hücre (P hücrenin hayalini) temsil etsin. Buna göre

- Eğer $q = h$ ise sınır koşulu tipi ne olursa olsun $h_{P'} = h_P$ olarak atanacağından derinliğin sınırdaki gradyan yansıması yani hayali hücre kontrol noktasındaki gradyanı sınır hücredekiyle aynıdır.

$$\nabla h_{P'} = \nabla h_P \quad (36)$$

- Eğer $q = \hat{v}$ ise sınır koşulu geçişmeli de olsa yansımali da olsa hayali sınır hücredeki gradyanı aşağıdaki gibi atanır.

$$\nabla \hat{v}_{P'} = -\nabla \hat{v}_P \quad (37)$$

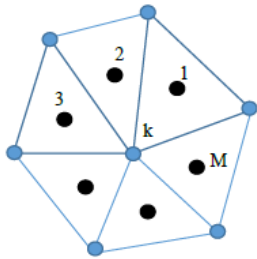
Böylece bir hayali hücredeki gradyan, gerçek sınır-hücre gradyan değeri bilinerek direkt

atanabilir. Yukarıdaki bölümde (Bölüm 6.3) bahsedilen üç aşamalı gradyan tayini basamaklarını tekrar etmek gerekmez. Türetilen (36) ve (37) denklemleri sınır gradyan atamalarında işlem yükü açısından önemli bir sadeleştirir.

6.5. İç-Örgü Nokta Değerleri (Interior Grid Node Values)

Görüldüğü üzere hem gradyan hesabı için hem de sayısal sonuçların görselleştirilmesi aşamasında örgü noktalarındaki bilinmeyenlerin h , hu ve hv değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun için ilgili örgü noktasını çevreleyen mevcut kontrol noktası değerlerinden faydalanılır. Tüm çevre kontrol nokta değerlerinin uzaklık-ağırlıklı içdeğerlemesi ile bu noktadaki çözüme bir yaklaşım elde edilebilir.

Örneğin bir k iç-örgü noktasındaki herhangi bir bilinmeyen değerine, M , k 'yı çevreleyen kontrol noktaları sayısı olmak üzere, aşağıdaki gibi bir iç değerleme ile ulaşılabilir.



$$U_k = \frac{\sum_{m=1}^M \frac{U_m}{d_{m,k}}}{\sum_{m=1}^M \frac{1}{d_{m,k}}}$$

Burada $d_{m,k}$, m kontrol noktası ile k örgü noktası arasındaki uzaklığı belirtir. Eğer örgü noktası aynı zamanda sınır noktası ise değişkenin sınırda aldığı değere göre veya sınır koşuluna göre atanan hayali komşu kontrol noktası değerleri hesaba katılır.

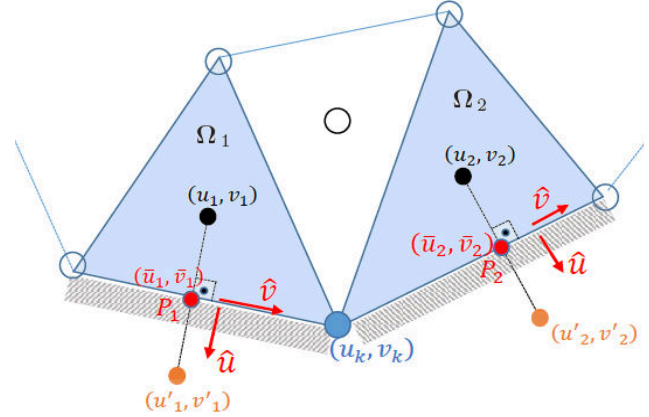
6.6. Sınır-Örgü Noktalarında Yaklaşım (Approximation at Boundary Grid Nodes)

Sınır örgü noktalarındaki çözüm için de yine iç noktalardan değerler atanır. Sırasız ağda herhangi bir sınır noktasında veya bu sınır noktasını üzerinde bulunduran sınır elemanı üzerinde yüzeye normal veya teğet hızlar cinsinden hız bileşenleri aşağıdaki gibidir [20]

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \hat{u}n_x - \hat{v}n_y \\ \bar{v} &= \hat{u}n_y + \hat{v}n_x \end{aligned} \quad (38)$$

Şekil 7'de herhangi Ω_1 ve Ω_2 sınır hücrelerinin sınırda paylaştığı bir k sınır-örgü noktası için yaklaşım basamakları resmedilmiştir. Buna göre

önce sınır hücre merkezli değerleri ilgili sınır koşulu ve Denklem (38) yardımıyla sınırdaki en yakın noktalara, P_1 ve P_2 'ye, taşınır. Daha sonra P_1 ve P_2 noktalarındaki bu hız yaklaşımlarının uzaklık-ağırlıklı ortalamaları alınarak ortak k örgü noktasında yaklaşık (u_k, v_k) değerlerine ulaşılır. Yüzeylerdeki \hat{u} ve \hat{v} yönleri sembolik olarak gösterilmiştir. Rüzgar yönüne göre değişebilir.



Şekil 7. Bir sınır-örgü noktası için iç değerleme (Interpolation for a boundary grid node)

Böylece k sınır-örgü noktasındaki hız bileşen yaklaşımları şöyle elde edilir.

$$u_k = \frac{\frac{\bar{u}_1}{d_{1,k}} + \frac{\bar{u}_2}{d_{2,k}}}{\frac{1}{d_{1,k}} + \frac{1}{d_{2,k}}}, \quad v_k = \frac{\frac{\bar{v}_1}{d_{1,k}} + \frac{\bar{v}_2}{d_{2,k}}}{\frac{1}{d_{1,k}} + \frac{1}{d_{2,k}}} \quad (39)$$

Burada $d_{1,k}$, P_1 yüzey noktası ile k grid noktası arasındaki uzaklığı belirtir. Benzer şekilde $d_{2,k}$, P_2 yüzey noktası ile k grid noktası arasındaki uzaklıktır. Kodlama yapılırken su girişi ve su çıkışının olduğu sınır yüzeylerinde hayali sınır hücrelerde hız değerlerinin aynısının atanacağı ve katı duvar yüzeylerinde ise yüzeye normal hızın sıfır atanacağı hatırlanmalıdır. Böylece yukarıdaki yaklaşım basitleştirilerek işlem yükü azaltılır.

Çözüm kodu yazılırken yukarıdaki cebirsel ve vektörel incelemeler ışığında hayali sınır hücreleri için tekrar tekrar normal vektörü hesaplama veya gradyan hesaplama gibi işlemler elenmiştir. Dikkat edilecek olursa hayali hücre değeri ilgili sınır hücre değerinin aynısı veya ters işaretlisi veya vektörel yansıması olmaktadır. Kodlama sırasında bir hücrenin sınırda veya sınır köşesinde olup olmadığı kontrol edilerek gereken atamalar mevcut iç değerler yardımıyla kolaylıkla yapılır ve ekstra işlem gerekmez.

Sonuç olarak sırasız ağlarda yüksek doğruluklu sonlu hacim yönteminin HLLC tabanlı WAF

yöntemiyle akı hesabı aşağıdaki gibi formüle edilir.

7. ÜÇGEN ÇÖZÜM ÖRGÜSÜNDE TVD-WAF YÖNTEMİ (TVD-WAF METHOD ON TRIANGULAR GRID)

7.1. Rotasyonel Değişmezlik Özelliği ve Normal Akının TVD-WAF İle Çözümü (Rotational Invariance Property and TVD-WAF Solution of Normal Flux)

2-boyutlu sıg su denklemleri (Denklem (4)) her U bağımlı değişken vektörü ve her θ dışa doğru birim normal vektör açısı için

$$F(U) \cdot \mathbf{n} = [E(U), G(U)] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{-1}E(TU) \quad (40)$$

eşitliğini sağlar. $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ dışa doğru birim normal vektörü, $\mathbf{T}(\theta)$ rotasyon matrisi ve $\mathbf{T}^{-1}(\theta)$ onun tersidir.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Bu önerme 'Rotasyonel Değişmezlik Özelliği'dir [5] ve akı hesabının akının sadece birinci bileşeni $E(U)$ ile yapılabileceğini göstermektedir. Özellikle sırasız çözüm örgülerinde bu özelliğin kullanılmasıyla zaman ve işlemden büyük tasarruf sağlanmış olur. Dolayısıyla bu çalışmada normal-akı, $F(U) \cdot \mathbf{n}$ için WAF yaklaşımında HLLC Riemann çözücüsüyle rotasyonel değişmezlik özelliği beraber kullanılacaktır.

Önce bir Ω_i kontrol hücrenin her bir Γ_{ij} ara yüzeyindeki normal-akısı rotasyonel-değişmezlik özelliği gereği aşağıdaki gibi sadece x -yönündeki bileşenine indirgenir

$$[E(U_{ij}), G(U_{ij})] \cdot n_{ij} = T_{ij}^{-1}E(T_{ij}U_{ij}) \quad (42)$$

T rotasyon matrisinin tanımı kullanılarak U 'nun rotasyonu

$$TU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y \\ 0 & -n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h\hat{u} \\ h\hat{v} \end{bmatrix} = \hat{U} \quad (43)$$

şeklinde elde edilir. Burada \hat{u} ilgili ara-yüzeydeki normal hız ve \hat{v} ara-yüzeydeki teğetsel hızdır.

Yani ara-yüzeyin dışa doğru birim normal vektörüne göre hesaplanmış yönelimli hızlardır. Böylece akının birinci bileşeninin rotasyonu

$$E(TU) = E(\hat{U}) = \begin{bmatrix} h\hat{u} \\ h\hat{u}^2 + gh^2/2 \\ h\hat{u}\hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_1\hat{v} \end{bmatrix} \quad (44)$$

olarak elde edilir. Gösterimde ve işlemlerde sadelik açısından bileşenler E_1 , E_2 ve E_3 ile ifade edilecektir. Dikkat edilecek olursa (44) ifadesinde dönüştürülmüş akının sadece birinci E_1 ve ikinci E_2 bileşeni için Riemann problem çözümü yapılacak ve üçüncü bileşen E_3 ise çözüm gerektirmeden birinci bileşenin \hat{v} ile çarpılması sonucu cebirsel olarak elde edilebilecektir. Son olarak rotasyonel matrisin tersi, \mathbf{T}^{-1} , ile çarpım yapıp istenilen normal-akı en kısa ve verimli yoldan hesaplanabilecektir.

Şimdi $E(\hat{U})$ çözümünün bir Γ_{ij} ara-yüzeyinde yüksek doğruluklu HLLC tabanlı TVD-WAF uygulaması (25) denklemine göre

$$E(\hat{U}_{ij})^{TVD-WAF} = \frac{1}{2} \left(E(\hat{U}_{ij}^{(1)}) + E(\hat{U}_{ij}^{(4)}) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sigma(c_k) \phi_{ij}^{(k)} \left(E(\hat{U}_{ij}^{(k+1)}) - E(\hat{U}_{ij}^{(k)}) \right) \quad (45)$$

olacaktır. Burada üst indisler Şekil 4' deki dalga bölgelerini göstermektedir. Bu bölgelerde yönelimli \hat{U} değişkeninin aldığı değerler

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij}^{(1)} &= \hat{U}_i, & \hat{U}_{ij}^{(2)} &= \hat{U}_{*i}, \\ \hat{U}_{ij}^{(3)} &= \hat{U}_{*j}, & \hat{U}_{ij}^{(4)} &= \hat{U}_j \end{aligned} \quad (46)$$

şeklinde olup ortak parametreler düzenlendiğinde Denklem (45) aşağıdaki formda tekrar yazılır.

$$E(\hat{U}_{ij})^{TVD-WAF} = C_1 E(\hat{U}_i) + C_2 E(\hat{U}_j) + C_3 \hat{S}_i [\hat{U}_{*i} - \hat{U}_i] + C_4 \hat{S}_j [\hat{U}_{*j} - \hat{U}_j] \quad (47)$$

Burada C_m katsayıları limit fonksiyonlarını ve rüzgar yönlerini içerir

$$C_m = \begin{cases} \frac{1+(-1)^{m-1}\sigma(c_2)\phi^{(2)}}{2}, & m = 1,2 \\ \frac{\sigma(c_{m-1})\phi^{(m-1)} - \sigma(c_{m-2})\phi^{(m-2)}}{2}, & m = 3,4 \end{cases} \quad (48)$$

Burada \hat{S} , \hat{U}_* veya \hat{U} ilgili ara-yüzeyin birim normal vektörüne göre dönüştürülmüş dalga ve

değişken değerleridir, öyleki genelliği bozmadan gösterim olarak ara-yüzeyin solunda hep Ω_i üçgeni, sağında da hep Ω_j üçgeninin yer aldığı kabul edilmektedir. Yani birim normal hep i noktasından j noktasına doğrudur. Buna göre süreklilik ve momentum denklemlerinin her biri için yönelimli değişkenin yıldız bölgesinin solundaki ve sağındaki değerler Denklem (19) tanımı ve Denklem (46) bölgesel atamalarına göre rotasyonel değerler dikkate alınarak atanır. Yani (19)-(21) arasındaki tüm tanımlarda u ve v hız bileşenleri yerine rotasyonel bileşenler yani \hat{u} (yüzeye dik hız) ve \hat{v} (yüzeye teğet hız) alınır. Aşağıdaki tabloda (Tablo 3) ara-yüzey dalga profilinin ıslak veya kuru zemin durumuna göre rotasyonel formları sunulmuştur.

Tablo 3. Islak/kuru zeminde birim normal yönelimli dalga değerleri (Wet/dry rotational wave structures)

$\hat{S}_K = \hat{u}_K - \hat{p}_K \sqrt{gh_K}$, $K = i, j$	Sağ ve sol ıslak zemin ise
$\hat{S}_* = \frac{\hat{S}_i h_j (\hat{u}_j - \hat{S}_j) - \hat{S}_j h_i (\hat{u}_i - \hat{S}_i)}{h_j (\hat{u}_j - \hat{S}_j) - h_i (\hat{u}_i - \hat{S}_i)}$	
$\hat{S}_i = \hat{u}_j - 2\sqrt{gh_j}$	Sol taraf kuru zemin ise
$\hat{S}_* = \hat{S}_i$	
$\hat{S}_j = \hat{u}_j + \sqrt{gh_j}$	
$\hat{S}_i = \hat{u}_i - \sqrt{gh_i}$	Sağ taraf kuru zemin ise
$\hat{S}_* = \hat{S}_j$	
$\hat{S}_j = \hat{u}_i + 2\sqrt{gh_i}$	

Şimdi Denklem (47) süreklilik ve momentum denklemlerine göre detaylandırılacak olursa, süreklilik denkleminin rotasyonel normal akısı sol ve sağ taraf için sırasıyla

$$\begin{aligned} E_1(\hat{U}_i) &= (h\hat{u})_i = h_i(u_i(n_x)_{ij} + v_i(n_y)_{ij}) \\ E_1(\hat{U}_j) &= (h\hat{u})_j = h_j(u_j(n_x)_{ij} + v_j(n_y)_{ij}) \end{aligned} \quad (49)$$

olup birim-normal yönünün hep i noktasından j noktasına doğru olduğuna dikkat edilmelidir. Benzer şekilde x -momentum denkleminin rotasyonel normal-akısı her iki taraf için

$$\begin{aligned} E_2(\hat{U}_i) &= (h\hat{u}^2 + gh^2/2)_i \\ E_2(\hat{U}_j) &= (h\hat{u}^2 + gh^2/2)_j \end{aligned} \quad (50)$$

ile tanımlanır. Ayrıca üçüncü bileşen yani y -momentum denklemi için teğetsel hızın rüzgar yönüne göre seçileceği de unutulmamalıdır, şöyleki

$$E_3 = \begin{cases} E_1 \hat{v}_i, & \text{eğer } \hat{S}_* \geq 0 \text{ ise} \\ E_1 \hat{v}_j, & \text{eğer } \hat{S}_* < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (51)$$

7.2. Sınır Yüzeylerde Normal Akı Yaklaşımı (Normal Flux Approximation Along Boundary Faces)

Yukarıda verilen TVD-WAF yaklaşımı (Denklemler (44) ve (47)) sınırdaki yüzeylerde sınır koşulu tipine göre aşağıdaki sadeleştirmeleri içermektedir,

- Eğer sınır yüzeyinde ($\Gamma_{ii'}$ gibi) geçişmeli sınır koşulu var ise

$$E(\hat{U}_{ii'})^{TVD-WAF} = \begin{bmatrix} E_1(\hat{U}_{ii'}) \\ E_2(\hat{U}_{ii'}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

burada i' , i kontrol noktasının ilgili sınır elemanına göre yansıdığı noktadır. Buna göre $\Gamma_{ii'}$ sınır yüzeyindeki yönelimli değişken değerleri

$$\hat{U}_{ii'} = \begin{cases} \hat{U}_i, & i \text{ sınır elemanının solunda ise} \\ \hat{U}_j, & i \text{ sınır elemanının sağında ise} \end{cases} \quad (53)$$

şeklinde atanır. Ayrıca geçişmeli-sınır koşulunda ara yüzeye teğet hız $\hat{v} = 0$ olduğundan üçüncü akı bileşeni sıfır olmaktadır.

- Eğer yansımali veya kayan sınır koşulu var ise bu sefer ara yüzeyde normal hız sıfır olacağından yani $\hat{u} = 0$ ise,

$$E(\hat{U}_{ii'})^{TVD-WAF} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh_{ii'}^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

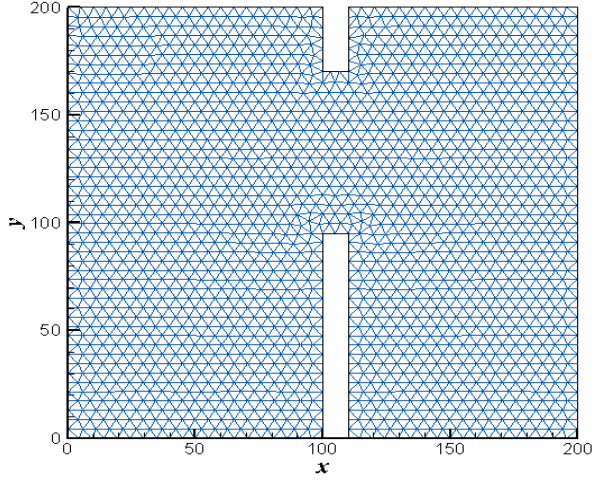
olur. Böylece sınırdaki akı hesabında hem işlem hem de zaman açısından tasarruf edilecektir.

8. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

8.1. 2-Boyutlu Kısmi Baraj Yıkılma Problemi (2D Partial Dam Break Problem)

Kod ve yöntemin doğruluğu ilk olarak 2-boyutlu kısmi baraj yıkılma problemi [21] üzerinde test edilmiştir. Problem $(x, y) \in [0, 200] \times [0, 200]$ kare bölgesinde tanımlanmış olup üçgen çözüm

örgüsü Şekil 8 'de verilmektedir. Bölge MATLAB çözüm ağı üretici yardımıyla toplam 3505 üçgen hücreye bölünmüştür. Bu üçgenlerin köşe noktaları 1868 tane örgü noktasını oluşturmakta ve toplam 5372 doğrusal eleman doğurmaktadır. Bu elemanların 229 tanesi sınırda bulunmaktadır (barajın yıkılmasından sonra kalan parçalarının sınırı dahil).



Şekil 8. 2B baraj yıkılma problemi için akım bölgesi ve çözüm örgüsü (Flow domain and mesh for 2D dam-break problem)

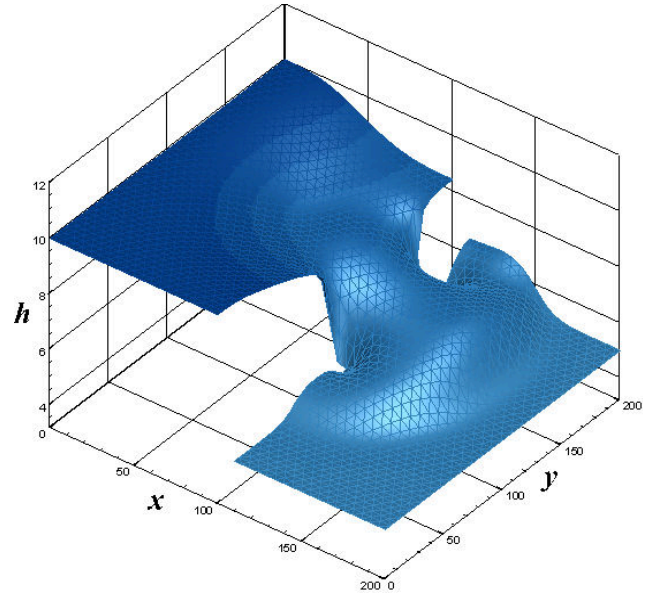
Akım pozitif x yönündedir. Baraj 10 m kalınlığındadır ve $x = 100$ m noktasında konumlanmıştır. Su derinliği başlangıçta barajın solunda h_0 ve sağında h_1 olarak alınır yani

$$h(t_0) = \begin{cases} h_0, & 0 \leq x \leq 100 \\ h_1, & 110 \leq x \leq 200 \end{cases} \quad (55)$$

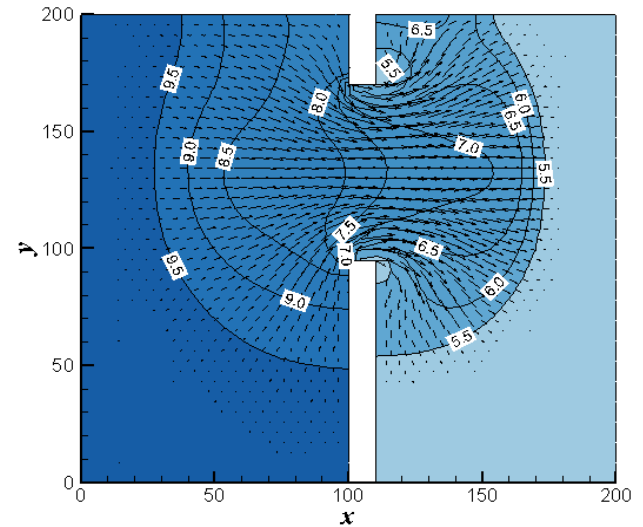
Bu problemde baraj bloğunun $(x, y) \in [100, 110] \times [95, 170]$ parçasının aniden yıkıldığı varsayılarak suyun bu 75 metre genişliğindeki açıklıktan sağa doğru yayılımı incelenmektedir. Grafiklerde h_0 ve h_1 derinliklerinin iki farklı durumu için $t = 7.2$ saniye sonunda elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Zamanda adım aralığı belirlenirken kararlılık sabiti $CFL = 0.9$ olarak alınmıştır.

İlk sonuçlar başlangıç derinlikleri $h_0 = 10$ m ve $h_1 = 5$ m alınarak elde edilmiştir. Bu durum sağ taraf ıslak zemin örneğine karşılık gelmektedir. Şekil 9'da 3B su yüzeyi profili verilmiştir. Suyun hızlanarak h_0 bölgesinden h_1 bölgesine doğru geçtiği ve özellikle 75 metrelik açıklığın çevresinde h_0 seviyesinin azalırken h_1 seviyesinin belirgin şekilde arttığı gözlenmektedir. Şekillerde yıkımdan sonra kalan baraj parçaları boşluk olarak temsil edilmiştir. Şekil 10'da da iki boyutta su derinliğinin izdüşümü hız vektörleriyle birlikte

sunulmuştur. Barajın sağında açık mavi rengin koyulaşması ve hız vektörlerinin boylarının açıklık yakınında büyük olması (Şekil 10) suyun açıklıktan hızlanarak aktığını ve barajın sağ yanındaki su seviyesi yükselirken sol yanındaki su seviyesinin alçaldığını gösterir.



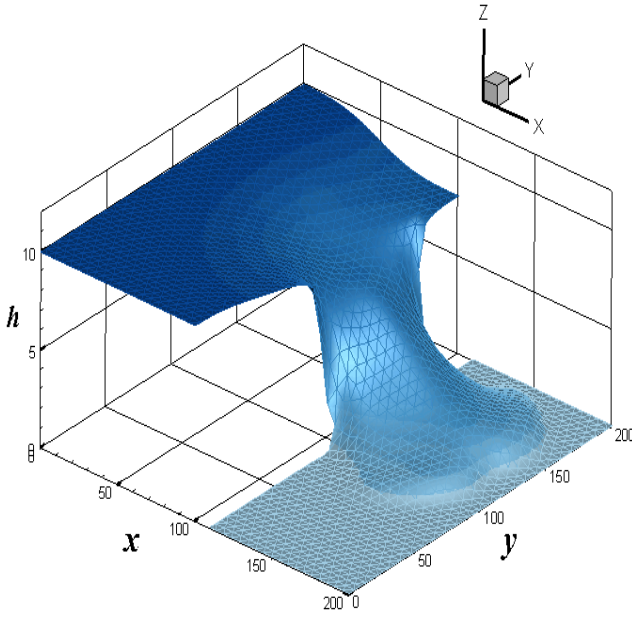
Şekil 9. $h_0 = 10$ m ve $h_1 = 5$ m ve $t \approx 7.2$ sn için su yüzeyi profili (Water surface profile for $h_0 = 10$ m, $h_1 = 5$ m and $t \approx 7.2$ s)



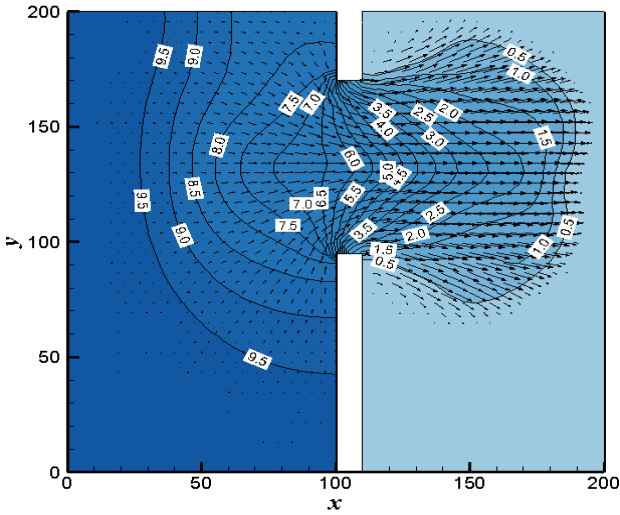
Şekil 10. $h_0 = 10$ m ve $h_1 = 5$ m ve $t \approx 7.2$ sn için su yüzeyi derinlik konturları ve hız vektörleri (Water surface elevation contours and velocity vectors for $h_0 = 10$ m, $h_1 = 5$ m and $t \approx 7.2$ s)

Şekil 11 ve 12' de ise $h_0 = 10$ m ve $h_1 = 0.1$ m sağ taraf neredeyse kuru zemin durumu incelenmiştir. İlk durumdakine benzer şekilde suyun derinliğinin ve hız büyüklüklerinin mansapta artarak yayıldığı ve neredeyse kuru olan sağ tarafta su seviyesinin hızla arttığı açıkça izlenmektedir. Sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla tutarlı

olup, yeni yazılan kodun avantajlarını ve çalışırılığını doğrulamaktadır.



Şekil 11. $h_0 = 10$ m ve $h_1 = 0.1$ m ve $t \approx 7.2$ sn için su yüzeyi profili (Water surface profile for $h_0 = 10$ m , $h_1 = 0.1$ m and $t \approx 7.2$ s)

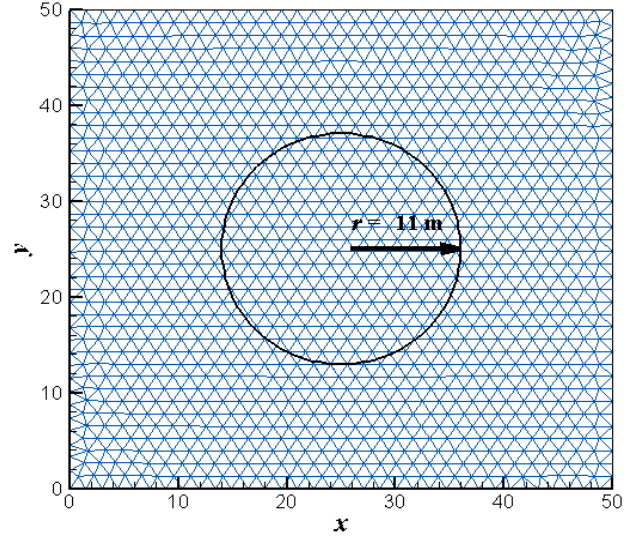


Şekil 12. $h_0 = 10$ m ve $h_1 = 0.1$ m ve $t \approx 7.2$ sn için su yüzeyi derinlik konturları ve hız vektörleri (Water surface elevation contours and velocity vectors for $h_0 = 10$ m , $h_1 = 0.1$ m and $t \approx 7.2$ s)

8.2. Dairesel Baraj Yıkılma Problemi (Circular Dam Break Problem)

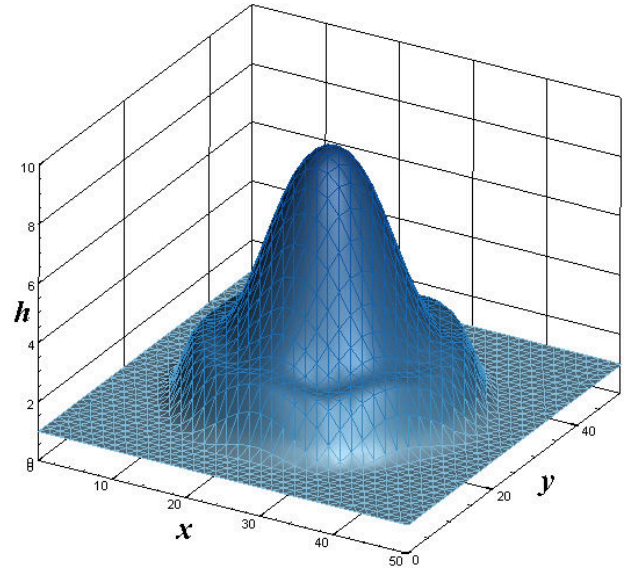
Diğer bir baraj yıkılma test durumu ise Alcrudo ve Garcia-Navarro'nun [22] çalıştığı dairesel bir barajın yıkılma modelidir. Problem 50×50 m²'lik kare bir bölge üzerinde tanımlanır. Bölgenin merkezine, 11 m yarıçaplı silindirik bir duvar (baraj) konularak tanım bölgesi silindirin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayrılır. Başlangıçta silindirin içindeki durgun suyun seviyesi $h_0 = 10$

m ve silindirin dışındaki su seviyesi de $h_1 = 1$ m verilir. Silindirik barajın kalınlığı ihmal edilmekte ve $t = 0$ anında barajın anlık kaldırılmasından sonraki suyun yayılımı ve derinlik profili incelenmektedir.



Şekil 13. Dairesel baraj yıkılma problemi için akım bölgesi ve çözüm örgüsü (Flow domain and mesh for circular dam break problem)

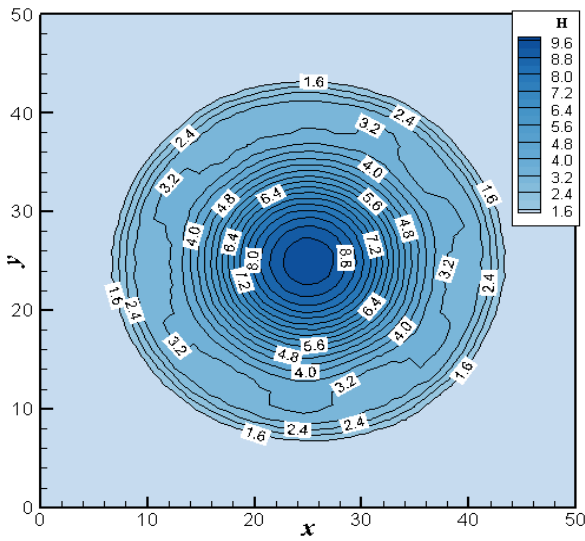
Problemin tanım bölgesi ve üçgen örgüsü Şekil 13'te gösterilmektedir. Hesaplama bölgesi 2477 üçgen bölgeye ayrıştırılmış ve geliştirilen sayısal model sonuçları vermek üzere çalıştırılmıştır. Mevcut çalışmalarla [12, 22] karşılaştırılabilmesi için barajın kaldırılmasından $t = 0.69$ sn sonraki sayısal sonuçlar verilmiştir (Şekil 14 ve 15).



Şekil 14. Dairesel baraj yıkılma modelinde $t \approx 0.69$ sn için su yüzeyi profili (Water surface profile of circular dam break problem at $t \approx 0.69$ s)

Şekil 14'te su yüzeyinin 3B profili sergilenmektedir, ayrıca Şekil 15'te de su derinliğinin eş yükselti konturlarını izlemek

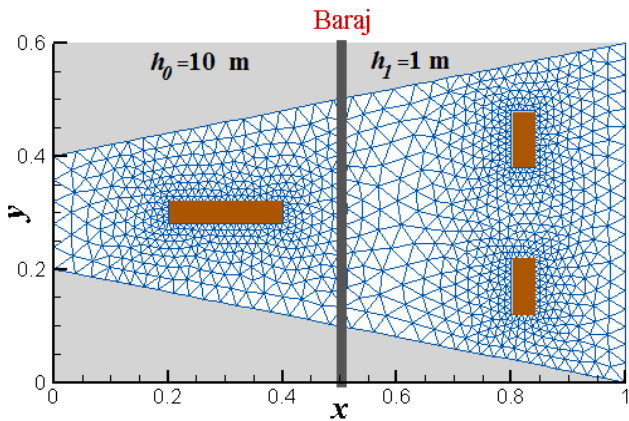
mümkündür. Sonuçlar özellikle Anastasiou ve Chan'ın çalışmasıyla [12] karşılaştırıldığında daha az hücre (1/3'ü kadar sayıda üçgen) ile daha doğru profiller elde edildiği gözlenmektedir.



Şekil 15. Dairesel baraj yıkılma modelinde $t \approx 0.69$ sn için su yüzeyi derinlik konturları (Water surface elevation contours at $t \approx 0.69$ s)

8.3. Üç Adalı Parabolik Baraj Yıkılma Problemi (Parabolic Dam Break Problem with Three Islands)

Bu problem iki parabolik kolun tam ortasına yerleştirilmiş bir barajın yıkılması şeklinde idealize edilmiştir [23]. Akım bölgesi, üçgen çözüm örgüsü ve başlangıç derinlikleri Şekil 16'da verilmiştir. Ada çevrelerinde sıklaşan çözüm örgüsü 1983 tane üçgen hacimden oluşur.

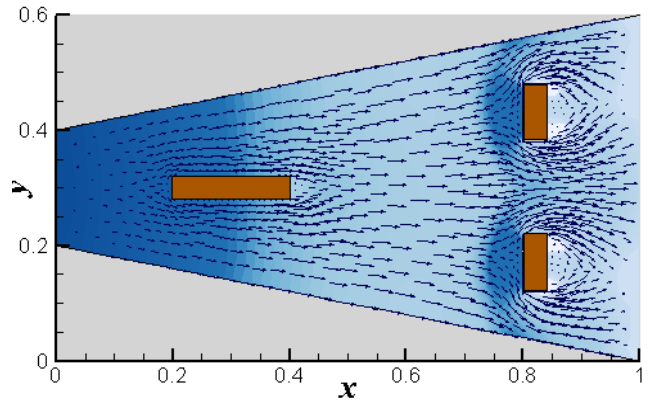


Şekil 16. Üç adalı parabolik baraj yıkılma problemi için akım bölgesi ve çözüm örgüsü (Flow domain and mesh grid for parabolic dam break problem with three obstacles)

Akım alanında baraj öncesinde 1 tane ve baraj sonrasında 2 tane olmak üzere toplam 3 dikdörtgen adacık kurgulanmıştır. Böylece SAD çözümlerinin

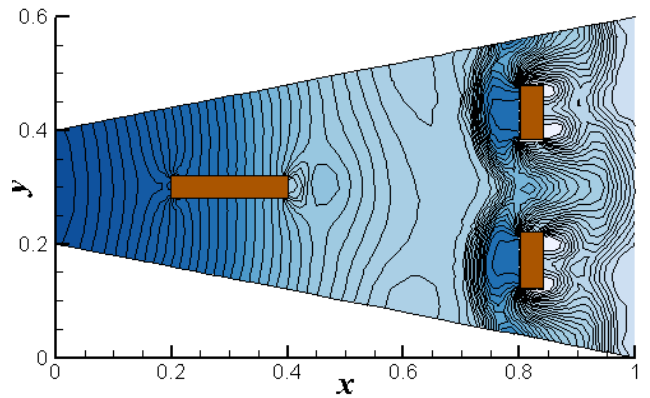
engel yüzeylerinde ve etrafında nasıl şekillendiği incelenecektir.

Şekil 17'de $t = 0.05$ saniyedeki derinlik ortalamalı hız vektörleri ve su yüzeyi izdüşümü gösterilmiştir.



Şekil 17. $t = 0.05$ sn için hız vektörü profili (Velocity field for $t = 0.05$ s)

Engeller öncesinde su seviyesinin yükseldiği (koyu mavi) ve engeller sonrasında seviyenin alçaldığı (açık mavi) açıkça gözlenmektedir. Ayrıca vektör boylarının uzunluğu hızların arttığı bölgeleri ve vektörlerin yoğun olduğu yerler de (engel çevreleri gibi) suyun hızlı akarak girdapların oluştuğu bölgeleri işaret etmektedir. Şekil 18'de ise yine $t = 0.05$ sn anında derinlik konturları çizilmiştir. Bu zaman diliminde elde edilen sayısal sonuçların mevcut çözümlerle [23] uyumlu olduğu görülür.

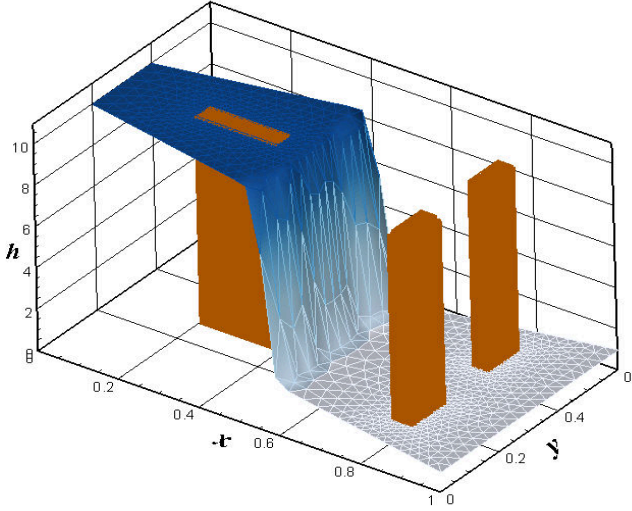


Şekil 18. Derinlik konturları (Depth contours)

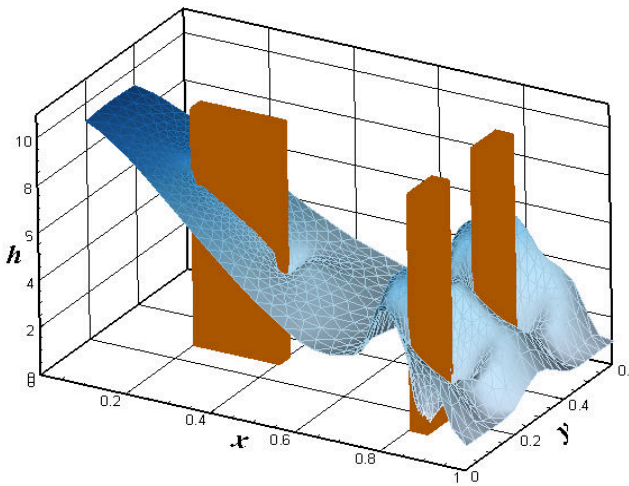
Dikkat edilecek olursa tanım bölgesinde ada çevrelerindeki üçgen sayısı diğer kısımlara göre daha fazladır. Yerel olarak kontrol hacimlerin artırılabilmesi sırasız ağırlıklı ağa göre önemli bir üstünlüğüdür. Akım özellikle bu bölgelerde ani değişimler sergilemektedir ve bu değişimlerin hassas bir şekilde zamandan da tasarruf ederek hesaplanması yöntemine büyük katkı sağlar. Yani bölgenin sadece gerekli görülen yerlerinde üçgen

sayısının artırılmasıyla, hesaplamalardaki işlem sayısı bir anda katlanarak artmamış olur.

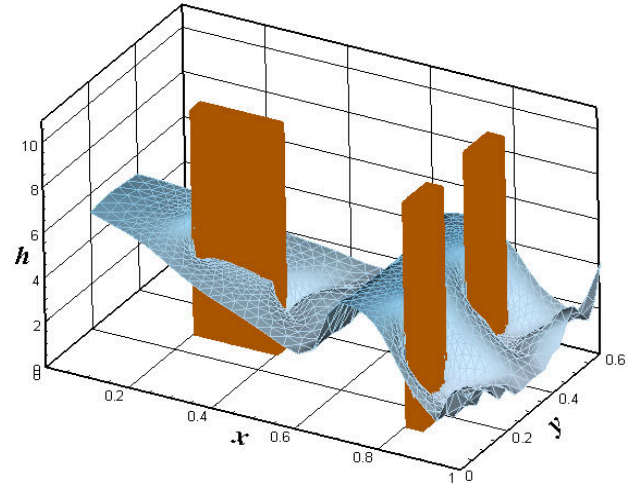
Şekil 19, 20 ve 21’de farklı zaman dilimlerinde su yüzeyinin ada çevrelerindeki 3-boyutlu görüntüsü verilmiştir. Baraj kaldırıldıktan sonra hızlanarak akan suyun mansaptaki ada önlerinde yükseldiği ve adaların yanlarında ve arkasında döngüler oluşturarak daha alçak bir seviyede ilerlediği görülmektedir.



Şekil 19. $t \approx 0.0005$ sn için su yüzeyi (Water surface at $t \approx 0.0005$ s)

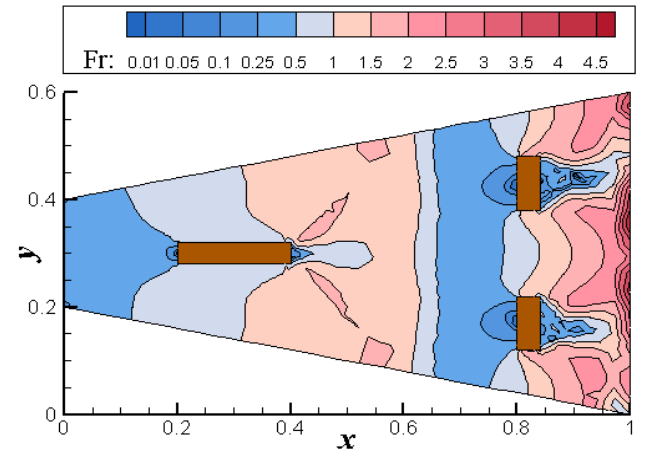


Şekil 20. $t = 0.05$ sn ‘de su yüzeyi (Water surface at $t = 0.05$ s)



Şekil 21. $t \approx 0.1$ sn’de su yüzeyi (Water surface at $t \approx 0.1$ s)

Bunlara ek olarak $t \approx 0.1$ sn sonrasında Froude sayısının, F_r , değişimi incelenmiştir (Şekil 22). Böylece kritik altı ($F_r < 1$), kritik ($F_r = 1$) ve kritik üstü ($F_r > 1$) akım bölgelerini belirlemek mümkündür. Akım engel yanlarında ve arkalarında çoğunlukla kritik üstü (pembe boyalı alanlar) ve engel önlerinde de kritik altı (mavi ve tonları) davranır. Geliştirilen yazılımın kritik altı ve kritik üstü geçişlerini başarılı bir şekilde çözebilmesi köprü ayakları etrafında oluşan akım türlerinin çalışılmasında önemli bir avantaj olacaktır.



Şekil 22. $t \approx 0.1$ sn için Froude sayısı değişimi (Froude number change at $t \approx 0.1$ s)

9. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Sığ akım denklemlerinin ‘Sonlu Hacim bazlı Toplam Salınım Azaltma özellikli Ağırlık Ortalamalı Akı (TVD-WAF) yöntemi ile Sırasız Ağda’ sayısal çözümü için özgün bir bilgisayar yazılımı geliştirilmiştir. Yazılım ölçüt test

problemlerinde koşut olarak elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Bu çalışmayla ‘sonlu hacim ağırlık ortlamalı akı’ yönteminin ‘sırasız ağda’ uygulanabilmesi için yeni teknikler önerilmiştir. Öncelikle mevcut çalışmalar derlenerek SAD’nin sayısal çözümü için zamanda ve uzayda yüksek mertebeden doğruluklu, süreksizliklerin hesaplanmasına olanak veren ve karmaşık geometrilere uygulanabilme esnekliğine sahip bir yöntem belirlenmiştir. 2-boyutlu SAD’nin hiperbolik yapısı gereği çözümü karmaşık ve çok aşamalı işlem gerektirir. Sonlu hacim yönteminin ‘sırasız ağ’ üzerinde uygulanması ile değişik geometrilere uygulanabilme esnekliği kazandırılmıştır. Buna ek olarak ara-yüzlerdeki şok ve temas dalgalarını yakalayan Riemann çözücülerden faydalanılmıştır. HLLC Riemann çözücüsünün kullanılmasıyla uzayda ikinci derece doğruluklu çözümün ilk adımı oluşturulmuştur. Ayrıca ara-yüz akıları için kendi doğasında ikinci mertebeden doğruluklu WAF yöntemi uygulanmıştır. Ancak HLLC-WAF’ın birlikte kullanılması yöntemin doğruluk derecesini artırmakla beraber süreksizlik noktalarında kararsızlığa ve çözümde istenmeyen salınımlara neden olmaktadır. Kararlı akı çözümleri için WAF’ın ‘akı sınırlayıcı fonksiyonları’ndan yararlanılmış ve salınımları sönmek için de WAF yöntemi ‘toplam salınım azaltma (TVD)’ yaklaşımı ile birleştirilmiştir. Böylece, sayısal salınımlar giderildiği gibi, uzayda 2. dereceye yakın doğruluk kazanılmıştır.

Literatürde HLLC-TVD-WAF üçlemesinin kullanımı sıralı ve sırasız ağda mevcuttur. Ancak akı sınırlayıcı fonksiyonu belirleyen ‘ r ’ parametresinin (rüzgar yönlü değişimin yerel değişime oranı) sırasız ağda belli bir tanımı bulunmamaktadır [14, 24]. Bu çalışmada ‘ r ’ parametresinin sırasız üçgen çözüm örgüsünde geçerli bir tanımı (Bölüm 6) ilk kez verilmiş ve bu tanıma 3 aşamalı ara-yüz gradyan yaklaşımının eklenmesiyle uzayda 2. mertebeden doğruluk korunmuştur. Zamanda ikinci derece doğruluk ise iki aşamalı Runge-Kutta yöntemiyle sağlanmıştır.

Sayısal hesaplama yükünü azaltmak bakımından ‘rotasyonel değişmezlik özelliği’ kullanılarak normal akı sadece birinci bileşeni yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca sınır koşullarının getirdiği fiziksel sonuçlar yardımıyla sınır yüzeylerdeki akı hesabında da işlemler en aza indirgenmiştir. Bunun dışında sırasız ağ ile çalışılmasının bir getirisi olarak hücre sayısının belli yerel

bölgelerde artırılabilmesi (grid clustering) hassas çözüm gerektiren bölgeler için çözünürlüğü artırırken, diğer bölgelerde daha az hücre ile hesap zamanından tasarruf sağlamaktadır. Geliştirilen sayısal çözüm yönteminin sunduğu yüksek sayısal kararlılık sonucu Courant sayısı değeri 0.9 gibi yüksek bir değer olarak seçilebildiğinden daha büyük zaman adımları kullanabilmek ve böylece yakınsamayı hızlandırmak mümkün olmuştur.

Sunulan ölçüt problem çözümlerinde gözlenen başarı, gerek iyileştirilen sayısal yöntemin ve gerekse geliştirilen bilgisayar yazılımının ‘doğruluğunu’ ve ‘uygulanabilirliğini’ ortaya koymaktadır. Hesaplanan hız ve su derinlikleri referans değerlerle uyumlu olup akımın zamanda gelişimini doğru olarak verebilmektedir.

KAYNAKÇA (REFERENCES)

- [1] H.Ö. Çağatay and S. Kocaman, "Baraj yıkılması taşkın dalgalarının mansapta oluşturacağı su yüzü profillerinin incelenmesi," *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, vol. 24, no. 1, pp. 99-110, 2009.
- [2] O. Sönmez and F. Demir, "Ağva ilçe merkezine ait taşkın yayılım haritalarının ve mevcut binaların taşkın su seviyelerinin tespiti," *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, vol. 21, no. 2, pp. 105-112, 2017.
- [3] Ş. Elçi, G. Tayfur, İ. Haltaş, and B. Kocaman, "Baraj yıkılması sonrası iki boyutlu taşkın yayılımının yerleşim bölgeleri için modellenmesi," *İMO Teknik Dergi*, vol. 28, no. 3, pp. 7955-7975, 2017.
- [4] B. N. İşcen, N. Öktem, B. Yılmaz, and İ. Aydın, "Sığ akım denklemlerinin hidrolikte kullanılması üzerine değerlendirmeler," *İMO Teknik Dergi*, vol. 28, no. 1, pp. 7747-7764, 2017.
- [5] E. F. Toro, *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2001, pp. 15-24.
- [6] E.F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- [7] E.F. Toro, "Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations," *Philosophical Transactions: Physical Sciences and*

- Engineering*, vol. 338, no. 1649, pp. 43-68, 1992.
- [8] S. J. Billett and E. F. Toro, "On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws," *Journal of Computational Physics*, vol. 130, pp. 1-24, 1997.
- [9] C. Zoppou and S. Roberts, "Numerical solution of the two-dimensional unsteady dam break," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 24, pp. 457-475, 2000.
- [10] D.H. Kim, Y.S. Cho, A.M. ASCE, and W.G. Kim, "Weighted averaged flux-type scheme for shallow-water equations with fractional step method," *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, 130(2): 152-160, vol. 130, no. 2, pp. 152-160, 2004.
- [11] W.D. Guo, J.S. Lai, and G.F. Lin, "Finite-volume multi-stage schemes for shallow-water flow," *International Journal for Numerical Methods in Fluids 2008*; 57:177-204, vol. 57, pp. 177-204, 2008.
- [12] K. Anastasiou and C.T. Chan, "Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 24, pp. 1225-1245, 1997.
- [13] D. Pan and J. Cheng, "A second-order upwind finite-volume method for the Euler solution on unstructured triangular meshes," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, pp. 1079-1098, 1993.
- [14] J. Hou, Q. Liang, H. Zhang, and R. Hinkelmann, "An efficient unstructured MUSCL scheme for solving the 2D shallow water equations," *Environmental Modelling & Software*, vol. 66, pp. 131-152, 2015.
- [15] T.H. Yoon, F. ASCE, and S.K. Kang, "Finite volume model for two-dimensional shallow flows on unstructured grids," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 130, no. 7, pp. 678-688, 2004.
- [16] C. Zoppou, M. ASCE, and S. Roberts, "Explicit schemes for dam-break simulations," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 129, pp. 11-34, 2003.
- [17] P.O. Persson and G. Strang, "A simple mesh generator in matlab," *SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 46, no. 2, pp. 329-345, 2004.
- [18] H.K. Versteeg and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*, Pearson: Prentice Hall, 2007, pp. 321-329.
- [19] S. Tu and S. Aliabadi, "A slope limiting procedure in discontinuous galerkin finite element method for gasdynamics applications," *International Journal for Numerical Analysis and Modeling*, vol. 2, no. 2, pp. 163-178, 2005.
- [20] T. Hino, L. Martinelli and A. Jameson, "A finite volume method with unstructured grid for free surface flow simulations," in *Sixth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Tokyo, Japan, 1993.
- [21] R.J. Fennema and M.H. Chaudhry, "Explicit methods for 2D transient free-surface flows," *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, vol. 116, pp. 1013-1034, 1990.
- [22] F. Alcrudo and P. Garcia-Navarro, "A high-resolution godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations," *International Journal for Numerical Methods in FLuids, VOL. 16, 489-505 (1993)*, vol. 16, pp. 489-505, 1993.
- [23] L.A. Monthe, F. Benkhaldoun, and I. Elmahi, "Positivity preserving finite volume Roe schemes for transport-diffusion equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 178, pp. 215-232, 1999.
- [24] Youssef Loukili and Azzeddine Soulaïmani, "Numerical tracking of shallow water waves by the unstructured finite volume WAF Approximation," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 8, pp. 1-14, 2007.