SAVUNMA BİLİMLERİ DERGİSİ
The Journal of Defense Sciences
https://dergipark.org.tr/tr/pub/khosbd

k Grup Regresyon Modelinin Eşitliği için Kullanılan Testlerinin Karşılaştırılması

Comparison of Tests for Equality of the k Group Regression Model

Faik Ümit DİRİ[1*], Fikri GÖKPINAR[2], Esra GÖKPINAR[2],

[1]*Milli Savunma Üniversitesi, Kara Harp Okulu, Endüstri ve Sistem Mühendisliği Bölümü, Ankara, Türkiye*

[2]*Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye*

Makale Bilgisi

Araştırma makalesi
Başvuru: 27.09.2024
Düzeltme: 31.10.2024
Kabul: 05.11.2024

Keywords

Heterogeneous variance
Coefficient equation
Regression model
Simulation

Anahtar Kelimeler

Heterojen varyans
Katsayı eşitliği
Regresyon modeli
Simülasyon

Önemli Noktalar

Bu çalışmada, varyansların eşit olmadığı durumlarda k grup regresyon modelinin eşitliğinin testi problemi ele alınmıştır. Bu problem için literatürde yaygın olarak kullanılan Genelleştirilmiş Chow testi (GCT), Genelleştirilmiş Wald testi (GWT), Ağırlıklı F Testi (AFT), Düzeltilmiş Ki-Kare Testi (DKT), Düzeltilmiş Ağırlıklı F Testi (DAFT), yeni F Testi I (YFT1), yeni F Testi II (YFT2) ve Parametrik Bootstrap testi (PBT) ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ayrıca, grup sayısı, bağımsız değişken sayısı, örnek çapları ve hata varyanslarının farklı kombinasyonları dikkate alınarak kapsamlı bir simülasyon çalışmasıyla bu testlerin deneysel I. tip hata oranlarının karşılaştırması yapılmıştır.

Tablo Özet

k=3, m=2 için Testlerin Deneysel I.Tip Hata Oranları

n_1,n_2,n_3	$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$	GCT	GWT	AFT	DKT	DAFT	YFT1	YFT2	PBT
(7;7;7)	1;1;1	0.0485	**0.1393**	**0.0817**	0.0425	0.0307	0.0187	0.0209	0.0456
	1;2;4	**0.0909**	**0.1675**	**0.1028**	0.0548	0.0427	0.0273	0.0291	0.0508
	1;4;8	**0.0973**	**0.1765**	**0.1120**	**0.0693**	0.0526	0.0367	0.0384	0.0552

Özet

Regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkileri modellemek için yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Bu analizlerde veriler, farklı zaman dilimlerinden veya farklı gruplardan elde edilebilir. Farklı koşullar altında regresyon modellerinin aynı kalıp kalmadığını belirlemek için regresyon modellerinin eşitliği testi yapılır. Bu çalışmada, heterojen varyans varsayımı altında k grup regresyon modelinin eşitliğini test etmek için yaygın olarak kullanılan testler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Testlerin deneysele I. tip hata değer performansı, grup sayısı, bağımsız değişken sayısı, örnek büyüklükleri ve hata varyanslarının farklı kombinasyonları dikkate alınarak kapsamlı bir simülasyon çalışmasıyla değerlendirilmiştir.

Abstract

Regression analysis is a widely used method for modelling relationships between variables. In these analyses, data can be obtained from different time periods or from different groups. To determine whether the regression models remain the same under different conditions, a test of equality of regression models is performed. In this study, the tests commonly used to test the equality of k group regression models under the assumption of heterogeneous variance are analysed in detail. The empirical type I error value performance of the tests is evaluated through a comprehensive simulation study considering different combinations of number of groups, number of independent variables, sample sizes and error variances.

*Corresponding author, e-mail: fudiri@kho.msu.edu.tr

DOI: 10.17134/khosbd.1557075

Elektronik/Online ISSN: 2148-1776
Basılı/Printed ISSN: 1303-6831

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Doğrusal regresyon modelleri; ekonomi, tıp, mühendislik, tarım, biyoloji, psikoloji gibi birçok farklı araştırma alanlarında, değişkenler arasında ilişkiyi ortaya çıkarmak için sıklıkla kullanılır. Aralarında ilişki aranan değişkenlerden biri bağımlı (sonuç) diğeri bağımsız (sebep) değişken olmak üzere regresyon analizi ile bilinen bağımsız değişken veya değişkenler yardımıyla bilinmeyen bağımlı değişkenin alacağı değerin kestirilmesi amaçlanır. Ancak bu tür ilişkilerin, farklı zaman dilimleri için değişip değişmediği veya aynı ilişkinin farklı yığın ya da yığınlar için uygulanıp uygulanamayacağı da bilinmek istenir. Örneğin 2008 küresel ekonomik kriz öncesi ve sonrası belli bir bölgedeki ekonomik ilişkileri belirleyen regresyon denklemlerinin katsayıları arasında farklılık olabilir, bu durumda regresyon modellerinin aynı kalıp kalmadığını test etmek gerekir.

Değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin, iki farklı zaman dilimi veya iki farklı yığın için aynı olup olmadığını belirlemede yaygın olarak kullanılan test Chow testidir. Bu test, hata varyanslarının homojenliği varsayımı altında iki doğrusal regresyon modelinin (k=2) katsayılarının eşitliğini test etmek için Chow tarafından önerilmiştir [1]. Bununla birlikte, hata varyanslarının homojen olmaması (heterojen varyans) durumunda Toyoda bir test geliştirmiş ve değişen varyans koşulları altında Chow testinin deneysel I. tip hata olasılığının olumsuz yönde etkilenerek nominal değerden büyük değerler aldığını göstermiştir [2]. Toyoda'yı takiben, literatürde Chow testinin çeşitli modifikasyonları ve yeni test yöntemleri önerilmiştir. Örnek çapları ve varyans değerlerinin farklı kombinasyonları altında Chow testini genişleten veya genelleştiren ya da alternatif testler öneren çalışmalar mevcuttur [3-15].

Gerçek hayatta sıklıkla karşılan bir durumda, değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin, ikiden fazla farklı zaman dilimi veya ikiden fazla farklı yığın için aynı olup olmadığının analiz edilmesi problemidir. Bundan dolayı ikiden fazla doğrusal regresyon modellerinin katsayılarının eşitliği (k >2) için yapılan çalışmalar önem arz etmektedir. Dufour, Scheffe’nin klasik doğrusal model için oluşturduğu olabilirlik oran testinden faydalanarak varyansların homojenliği varsayımı altında klasik F testi olarak da bilinen Genelleştirilmiş Chow testini elde etmiştir [16]. Ancak, yukarıda k =2 durumu için belirtildiği gibi varyanslar eşit değilse bu test iyi performans göstermemektedir. Gerçek hayat problemlerinde ise bu varsayım her zaman sağlanamayacağı için değişen varyans varsayımı altında, k grup normal regresyon modellerinin regresyon katsayılarının eşitliğini test etmek daha önemli hale gelmiştir. Koschat ve Weerahandi yaptıkları çalışmada, Weerahandi (1987)’nin k =2 durumu için önerdiği Genelleştirilmiş F testinin k>2için genelleştirmiş halini geliştirmişlerdir [14]. Son yıllarda yapılan çalışmalar incelendiği zaman, May yaptığı çalışmada k grup regresyon modelinin eşitliğinin testi için Parametrik Bootstrap (PB) yöntemini önermiştir [17]. Alvandi ve diğerleri yaptığı çalışmada, Wald test istatistiğinin k grup için genelleştirilmiş halini kullanarak bazı metotlar önermiştir [18].

Buna göre bu test istatistiğinin beklenen değerini ve varyansını kullanarak, bu testin Bartlett yaklaşımını, Ağırlıklı *F* yaklaşımlarını ve kendi önerdiği iki ayrı *F* testi geliştirmişlerdir.

Literatür incelendiğinde *k* grup regresyon modelinin eşitliği testi problemini ele alan çok az çalışma yapıldığı görülmüştür. Yapılan çalışmalar incelendiğinde ise, testlerin performansı için yapılan simülasyon çalışmalarında çoğunlukla deneme sayısı 2500 ve bağımsız değişken sayısının 1 alındığı görülmektedir. Dolayısıyla deneme sayısı ve bağımsız değişken sayısının testlerin performansı üzerindeki etkisinin yeterli düzeyde dikkate alınmadığı görülmüştür. Bu amaçla, çalışmada heterojen varyans varsayımı altında *k* grup regresyon modelinin katsayılarının eşitliği problemi ele alarak literatüre katkı sağlamaktır.

Bu bağlamda çalışmada, *k* grup regresyon modelinin eşitliği testi için Genelleştirilmiş Chow testi, Alvandi ve diğerleri tarafından önerilen yöntemler (Genelleştirilmiş Wald testi, Ağırlıklı *F* testi, Düzeltilmiş Ki-Kare testi, Düzeltilmiş Ağırlıklı *F* testi, yeni *F* testi I, yeni *F* testi II), ve Parametrik Bootstrap testi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Örnek çaplarının büyüklüğü, örnek çaplarının eşit veya farklı olması, hata varyanslarının eşit veya farklı olması durumları ile grup sayısı ve bağımsız değişken sayısının farklı durumları dikkate alınarak testlerin I.tip hata oranlarının bu kombinasyonlardan nasıl etkilendiği 10000 deneme sayısı ile yapılan kapsamlı simülasyon çalışması ile ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Buna göre çalışmanın 2. Bölümünde test istatistikleri için kullanılacak olan regresyon modeli ve literatürde yaygın olarak kullanılan test istatistikleri hakkında bilgi verilmiştir. 3. Bölümde, bahsedilen test istatistikleri simülasyon çalışmasına dayalı olarak deneysel I. tip hata oranları elde edilerek tablolar halinde sunulmuştur. Son olarak 4. Bölümde ise yapılan bu çalışma ile ilgili olarak sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. TEST İSTATİSTİKLERİ (TEST STATISTICS)

Bu bölümde *k* grup regresyon modelinin eşitliği için önerilen bazı testler tanıtılmıştır. Bu amaçla ilk olarak bazı ortak temel tanımlar verilmiştir. Buna göre, *k* grup için çoklu lineer regresyon modeli

$$\underline{y} = \underline{X}\,\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \text{ dir.} \tag{1}$$

Burada;

$\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k)'$,

$\underline{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_k)'$,

$\underline{\beta} = (\underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_k)'$,

$\underline{\varepsilon} = (\underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_k)'$ şeklindedir.

p, bağımsız değişken sayısını ve *m*=*p*+1, tahmin edilecek parametre sayısını göstermektedir. $\underline{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})'$, *i*. gruba ait n_ix1 boyutlu bağımlı değişken gözlem vektörü, X_i , $n_i \times (p+1)$ boyutlu bağımsız (açıklayıcı) değişkenler gözlem matrisi olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i11} & x_{i12} & \cdots & x_{i1p} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{in_i1} & x_{in_i2} & \cdots & x_{in_ip} \end{bmatrix}_{n_i \times (p+1)}$$

$i = 1, \dots, k.$

$\underline{\beta}_i = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ip})'$, *i*. gruba ait *m*x1 boyutlu katsayı vektörü, $\underline{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{in_i})'$, *i*. gruba ait n_ix1 boyutlu hata terimleri vektörüdür. Burada, $\underline{\varepsilon}_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_i^2 I_{n_i})$, ($I_{n_i}$, $n_i \times n_i$ boyutlu birim matrisi) olup ve tüm $\underline{\varepsilon}_i$'lerin bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca $\underline{X}^*$ matrisi yukarıda tanımlanan $\underline{X}$ matrisinden farklı olarak aşağıdaki gibi tanımlanmış bir matristir.

$$\underline{X}^* = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \underline{X}_2 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \underline{X}_k \end{bmatrix}_{(\sum_{i=1}^{k} n_i x k(p+1))}$$

Buna göre, k grup regresyon modelinin katsayılarının eşitliği testi için yokluk ve alternatif hipotezler aşağıdaki gibidir.

$$H_0: \underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = \cdots = \underline{\beta}_k$$

$$H_1: \underline{\beta}_i \neq \underline{\beta}_j, \ \exists i \neq j = 1, 2, \ldots, k \qquad (2)$$

Bu bilgiler ışığında yokluk hipotezinin testi için incelenen testlere aşağıda yer verilmiştir.

2.1. Genelleştirilmiş Chow Testi

k>2 grup için regresyon modellerinin katsayılarının eşit olup olmadığının test edilmesi için Dufour, Scheffe'nin klasik doğrusal model için oluşturduğu olabilirlik oran testinden faydalanarak Genelleştirilmiş Chow Testini elde etmiştir [16]. Buna göre, k grup regresyon modeli için hata kareler toplamı,

$$SS = (\underline{y} - \underline{X}\,\underline{\beta})'(\underline{y} - \underline{X}\,\underline{\beta})$$

ve i. regresyon modeli için hata kareler toplamı,

$$SS_i = (\underline{y}_i - \underline{X}_i\,\underline{\beta}_i)'\left(\underline{y}_i - \underline{X}_i\,\underline{\beta}_i\right), \ \ i = 1, \ldots k$$

olarak elde edilir. Buradan, toplam hata kareler toplamı, $SS_T = \sum_{i=1}^{k} SS_i$ olarak bulunur. Ayrıca, $r_0 = rank(\underline{X})$, $r = \sum r_i = rank(\underline{X}^*)$ olmak üzere Genelleştirilmiş Chow test istatistiği,

$$F_{GC} = \frac{v}{v_0}\frac{SS - SS_T}{SS_T} \qquad (3)$$

olarak elde edilir. Yokluk hipotezinin doğruluğu altında F_{GC} istatistiği, $v_0 = \sum_{i=1}^{k} r_i - r_0$ ve $v = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} r_i$ serbestlik dereceleri ile F dağılıma sahiptir ve $F_{GCT} > F_{v_0,v}(\alpha)$ ise H_0 red edilir.

2.2. Genelleştirilmiş Wald Testi

i. regresyon modeli için, $\underline{\beta}_i$ ve σ_i^2'nin en küçük kareler tahmin edicisi sırasıyla,

$$\underline{\hat{\beta}}_i = \left(\underline{X}_i'\,\underline{X}_i\right)^{-1}\underline{X}_i'\underline{y}_i$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - m}\left(\underline{y}_i - \underline{X}_i'\underline{\hat{\beta}}_i\right)'\left(\underline{y}_i - \underline{X}_i'\underline{\hat{\beta}}_i\right),$$

$i = 1,2, \ldots, k.$

Bu tahmin ediciler,

$$\underline{\hat{\beta}}_i \sim N_p\left(\underline{\beta}_i, \sigma_i^2\left(\underline{X}_i'\,\underline{X}_i\right)^{-1}\right),$$

$$S_i^2 \sim \frac{\sigma_i^2}{n_i - m}\chi^2_{(n_i - m)}$$

dağılımlarına sahiptir. Ayrıca yukarıda tanımlanan $\underline{\hat{\beta}}_i$ vektörlerinin birleştirilmiş hali ve hata terimlerinin varyans kovaryans matrisi aşağıda verilmiştir. Jayatissa ve Watt tarafından önerilen Wald test istatistiğinin, Alvandi ve diğerleri yaptığı çalışmada k grup için genelleştirilmiş hali

$$T = \sum_{i=1}^{k} S_i^{-2}\left(\underline{\hat{\beta}}_i - \hat{\hat{\beta}}\right)'(X_i'X_i)\left(\underline{\hat{\beta}}_i - \hat{\hat{\beta}}\right) \qquad (4)$$

$$T = \sum_{i=1}^{k} S_i^{-2}\underline{\hat{\beta}}_i\left(\underline{X}_i'\,\underline{X}_i\right)\underline{\hat{\beta}}_i - \hat{\hat{\beta}}'\left[\sum_{i=1}^{k} S_i^{-2}\left(\underline{X}_i'\,\underline{X}_i\right)\right]\hat{\hat{\beta}}$$

Burada $\hat{\hat{\beta}}$,

$$\hat{\hat{\beta}} = \left[\sum_j S_j^{-2}\left(\underline{X}_j'\,\underline{X}_j\right)\right]^{-1}\sum_{i=1}^{k} S_i^{-2}\left(\underline{X}_i'\,\underline{X}_i\right)\underline{\hat{\beta}}_i$$

$$\hat{\hat{\beta}} = \left[\sum_j S_j^{-2}\left(\underline{X}_j'\,\underline{X}_j\right)\right]^{-1}\sum_{i=1}^{k} S_i^{-2}\,\underline{X}_i'\underline{y}_i$$

dir [18].

Büyük örnek çapları için, T istatistiği yaklaşık olarak $m(k-1)$serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir, yani $T \sim \chi^2_{m(k-1)}$'dir. H_0 hipotezi doğruluğu altında,T $> \chi^2_{m(k-1)}(\alpha)$ ise H_0 red edilir.

2.3. Ağırlıklı *F* Testi (Asimptotik Chow Testi)

Goldfeld ve Quandt, tarafından Wald test istatistiğinin yeniden düzeltilmiş ve Asimptotik Chow testi olarak da bilinen bu test istatistiği Alvandi ve diğerleri tarafından k grup için genelleştirilmiştir. Buna göre ağırlıklı F test istatistiği aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_{AF} = \frac{T}{m(k-1)} \tag{5}$$

T_{AF} istatistiğinin dağılımı $m(k-1)$ ve $\sum_i (n_i - m)$serbestlik dereceleri ile F dağılımına yakınsar. H_0 hipotezi doğruluğu altında $T_{AF} > F_{m(k-1),\sum_i(n_i-m)}(\alpha)$ ise H_0 red edilir.

2.4. Düzeltilmiş Ki-Kare Testi

Büyük örnek çapları için (4)'de verilen T istatistiği yaklaşık olarak $m(k-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Bununla birlikte, bu yaklaşımın küçük örneklerde iyi performans göstermemektedir. Bu amaçla, Alvandi ve diğerleri, bu testi Bartlett yaklaşımını kullanarak küçük örnekler için yeniden düzenlemiştir. (4) eşitliğinde verilen T istatistiğinin dağılımı $T/c \sim \chi^2_{m(k-1)}$ şeklinde olacaktır.

Burada,

$$c = m_G/(m(k-1))$$

ve

$$m_G = E(T/H_0)$$

olmak üzere bu ifadenin yaklaşık değeri $\tilde{m}_G$ aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\tilde{m}_G = \sum_i \frac{(n_i - m)m}{n_i - m - 2}(1 - w_i)$$

$$\tilde{m}_G = m(k-1) + 2m \sum_i \frac{1-w_i}{n_i-m-2} \tag{6}$$

Burada, $w_i = S_i^{-2}/\sum_j S_j^{-2}$ dir. Dolayısıyla, düzeltilmiş ki-kare test istatistiği

$$T_{DK} = \frac{m(k-1)}{\tilde{m}_G} T \tag{7}$$

olarak elde edilir. H_0 hipotezi doğruluğu altında $T_{DK} > \chi^2_{m(k-1)}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir.

2.5. Düzeltilmiş Ağırlıklı *F* Testi

Alvandi ve diğerleri, Ağırlıklı F testi yaklaşımını kullanarak T istatistiğini F dağılımına yaklaştırmayı amaçlamıştır. Bu yöntemde, $T/c^* \sim F_{m(k-1),\sum_i(n_i-m)}$ yaklaşımı kullanılır. Düzeltilmiş Ağırlıklı F testi için, (2.5)'de verilen $\tilde{m}_G$ değerinden faydalanarak, $c^* = \tilde{m}_G[\sum_i(n_i - m) - 2]/\sum_i(n_i - m)$ eşitliği elde edilerek düzeltilmiş ağırlıklı F test istatistiği;

$$T_{DAF} = \frac{\sum_i(n_i-m)}{\tilde{m}_G(\sum_i(n_i-m)-2)} T \tag{8}$$

şeklinde bulunmuştur. H_0 hipotezi doğruluğu altında $T_{DAF} > F_{m(k-1),\sum_i(n_i-m)}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir.

2.6. Yeni *F* Testi I

Alvandi ve diğerleri, T'nin beklenen değeri kullanılarak bir F yaklaşımı elde etmiştir [18].

Bu yaklaşımda T istatistiğinin dağılımı $T/(m(k-1)) \sim F_{m(k-1),r^*}$ şeklinde bir yaklaşımla ifade edilmiştir.

Burada (6)'da verilen $\tilde{m}_G$ değerinden faydalanarak r^*değeri;

$r^* = 2\tilde{m}_G/(\tilde{m}_G - m(k-1))$ olmak üzere yeni F testi I istatistiği,

$$T_{YFTI} = \frac{T}{m(k-1)} \tag{9}$$

olarak elde edilir. H_0 hipotezi doğruluğu altında, $T_{YFTI} > F_{m(k-1),r^*}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir.

2.7. Yeni F Testi II

Alvandi ve diğerleri, bu yaklaşımında, T'nin hem beklenen değeri hem de varyansını kullanarak T istatistiğinin bir F yaklaşımını elde etmişlerdir [18]. Bu yaklaşımda, $n_i > 6$ ise, T istatistiğinin dağılımı,

$$T/(c^{**}m(k-1)) \sim F_{m(k-1),r}$$

şeklinde bir yaklaşımla ifade edilmiştir. Burada r ve c^{**}:

$$r = 2\frac{[m(k-1)-2]\tilde{m}_G^2 + 2m(k-1)\tilde{v}_G}{m(k-1)\tilde{v}_G - 2\tilde{m}_G^2}$$

ve

$$c^{**} = \frac{(\tilde{m}_G^2 + \tilde{v}_G)\tilde{m}_G}{[m(k-1)-2]{\tilde{m}_G}^2 + 2m(k-1)\tilde{v}_G}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Ayrıca (6)'da verilen $\tilde{m}_G$ değerinden faydalanarak ve $v_G = Var(\mathrm{T}|H_0)$ olmak üzere, v_G'nin değeri $\tilde{v}_G$ ile yaklaşık olarak,

$$\tilde{v}_G = \sum_i \frac{2m(n_i-m)^2}{(n_i-m-2)^2(n_i-m-4)}\, x$$

$$[(n_{i-} - 2)(1-2w_i) + (m+2) +$$

$$w_i{}^2 + 2m\left(\sum_i \frac{((n_i-m)}{(n_i-m-2)} w_i\right)^2$$

şeklinde elde edilir. Buna göre yeni F testi II istatistiği,

$$T_{YFT2} = \frac{T}{c^{**}m(k-1)} \qquad (10)$$

olarak elde edilir. H_0 hipotezi doğruluğu altında $T_{YFT2} > F_{m(k-1),r}(\alpha)$ise H_0 hipotezi red edilir.

2.8. Parametrik Bootstrap Testi

May, önerdiği parametrik bootstrap (PB) yaklaşımı için (4)'de verilen T istatistiğinin gözlenen değeri T_0 için; parametrik bootstrap p-değeri $\mathrm{P}(T_B(\hat{\beta}_B, \hat{\sum}_B) > T_0)$ olarak elde edilir. p-değeri, aşağıda açıklandığı gibi Monte Carlo simülasyonu kullanılarak tahmin edilir [17].

$\underline{\hat{\beta}} = \left(\underline{\hat{\beta}_1}, \dots, \underline{\hat{\beta}_k}\right)'$ olmak üzere;

$\underline{\hat{\beta}} \sim N_{mk}$ $(\underline{\beta}$, $\Sigma)$ dağılımına sahiptir ve burada Σ $=$ köş $\left(\sigma_i^2\, (X_i'X_i)^{-1}\right)$ dir.

Σ'nın tahmini $\hat{\Sigma}$ olup,

$\hat{\Sigma} = [\mathrm{diag}\left(S_i^2\, (X_i'X_i)^{-1}\right)]$'dir.

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & & 0 & -1_p \\ 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 & -1_p \\ 0 & 0 & I_p & & 0 & -1_p \\ & \vdots & & \ddots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_p & -1_p \end{bmatrix}_{qxkm} ,$$

$q = (k-1)m$, olmak üzere, H_0 hipotezi doğruluğu altında, $C\underline{\hat{\beta}} \sim N_q$ $(0$, $C\Sigma C')$ şeklinde verilmiştir.

$T_B(\hat{\beta}_B, \hat{\Sigma}_B) = Z'\widehat{W}_B^{-1}\mathrm{Z}$ olmak üzere;

$\mathrm{Z} \sim N_q$ $(0$,$I_q)$ ve $\widehat{W}_B = \widehat{H}\Sigma_B\widehat{H}'$dir.

Bu nedenle Σ bilindiğinde, σ_i^2'nin en küçük kareler tahmin edicisi S_i^2'nin dağılımı kullanılarak W dağılımı bulunabilir. $H = (C\Sigma C')^{(-\frac{1}{2})}C$ olmak üzere, burada $\widehat{H}$, $\hat{\Sigma}$ kullanılarak aşağıdaki gibi tahmin edilir.

$$\hat{\Sigma}_B = diag\left[\hat{\sigma}_1^{*2}\left(\underline{X_1}'\,\underline{X_1}\right)^{-1}, \dots, \hat{\sigma}_k^{*2}\left(\underline{X_k}'\,\underline{X_k}\right)^{-1}\right]$$

Bu yöntem algoritma olarak aşağıdaki gibi verilmiştir.

1.Adım: Verilerden, T_0 istatistiği hesaplanır.

2.Adım: $Z \sim N_q$ $(0, I_q)$ dağılımından bağımsız değişken oluşturulur

3.Adım: $S_i^2, i = 1, \ldots, k$ hesaplanır.

4.Adım: $\hat{\sigma}_i^{*2}$ hesaplanır.

$$\hat{\sigma}_i^{*2} \sim \frac{S_i^2 \chi^2_{(n_i - m)}}{n_i - m}$$

dağılımından hesaplanır.

5.Adım:

$$\hat{\Sigma}_B = \text{diag}\,[\hat{\sigma}_1^{*2}(\underline{X}_1{}'\,\underline{X}_1)^{-1}, \ldots, \hat{\sigma}_k^{*2}(\underline{X}_k{}'\,\underline{X}_k)^{-1}]$$

$[\hat{\sigma}_1^{*2}(\underline{X}_1{}'\,\underline{X}_1)^{-1}, \ldots, \hat{\sigma}_k^{*2}(\underline{X}_k{}'\,\underline{X}_k)^{-1}]$ ve

$\hat{W}_B = \hat{H}\Sigma_B\hat{H}'$ hesaplanır.

6.Adım: (4) eşitliği kullanılarak

$T_B(\hat{\beta}_B, \hat{\Sigma}_B) = Z'\hat{W}_B^{-1}Z$ hesaplanır.

7.Adım: $T_B \geq T_0$ olup olmadığı kontrol edilir.

8.Adım: L=10 000 kez Adım 2'den 6'ya kadar tekrarlanır.

Daha sonra p değeri $\hat{p} = \#(T_B \geq T_0)/L$ olarak elde edilir.

3. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI (SIMULATION STUDY)

Bu bölümde, k>2 grup için regresyon modellerinin katsayılarının eşit olup olmadığının test için 2.Bölümde anlatılan Genelleştirilmiş Chow testi (GCT), Genelleştirilmiş Wald testi (GWT), Ağırlıklı F testi (AFT), Düzeltilmiş Ki-Kare testi (DKT), Düzeltilmiş Ağırlıklı F testi (DAFT), yeni F testi I (YFT1), yeni F testi II (YFT2) ve Parametrik Bootstrap testi (PBT) simülasyon yoluyla karşılaştırılmıştır. Bu amaçla simülasyon çalışmasında i.nci grubun regresyon modelini oluşturmak için,

$X_{ij} = (1, \mathrm{N}(0, 1))$

dağılımından üretilmiştir. Hata terimi $\underline{\varepsilon}_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_i^2 I_{n_i})$ dağılımından üretilmek üzere σ_i^2 için aşağıda tablolarda verildiği gibi farklı değerler alınmıştır.

$\underline{\beta_i}$ vektörü 0'lardan oluşturulmuş ve nominal α değeri 0.050 olarak alınmıştır. Testlerin deneysel I. tip hata oranları için simülasyon çalışmasında tekrar sayısı (L) 10000 alınmıştır.

Çalışmada örnek çaplarının büyüklüğü, örnek çaplarının aynı veya farklı olması, grup sayısı ve bağımsız değişken sayısının farklı kombinasyonları dikkate alınmıştır.

Simülasyon çalışması MATLAB 2023b programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmada deneysel I. tip hata oranı için sınır değer olarak 0.06 olarak alınmıştır. Buna göre, deneysel I. tip hata oranları 0.06'dan yüksek çıkan değerler koyu gösterilmiştir.

Ayrıca DKT, DAFT ve YFT1 testlerinin teorik yapısından dolayı $n > m + 2$ koşulunu, YFT2 testinin ise $n > m + 4$ koşulunu sağlaması gerekir. Bu koşulların sağlamadığı durumlar için testlerin deneysel I.tip hataları elde edilmemiş ve tabloda "-" şeklinde gösterilmiştir.

Buna göre tüm testlerin elde edilen deneysel I. tip hata oranları Tablo 1-Tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 1: *k*=3, m=2 için testlerin deneysel I.Tip hata oranları.

n_1,n_2,n_3	$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$	**GCT**	**GWT**	**AFT**	**DKT**	**DAFT**	**YFT1**	**YFT2**	**PBT**
(7;7;7)	1;1;1	0.0485	**0.1393**	**0.0817**	0.0425	0.0307	0.0187	0.0209	0.0456
	1;2;4	**0.0909**	**0.1675**	**0.1028**	0.0548	0.0427	0.0273	0.0291	0.0508
	1;4;8	**0.0973**	**0.1765**	**0.1120**	**0.0693**	0.0526	0.0367	0.0384	0.0552
(15;15;15)	1;1;1	0.0482	**0.0845**	**0.0621**	0.0496	0.0426	0.0316	0.0387	0.0488
	1;2;4	**0.0806**	**0.0856**	**0.0653**	0.0514	0.0446	0.0358	0.0404	0.0460
	1;4;8	**0.0899**	**0.1020**	**0.0788**	**0.0649**	0.0565	0.0454	0.0502	0.0537
(30;30;30)	1;1;1	0.0501	**0.0638**	0.0557	0.0519	0.0490	0.0427	0.0471	0.0509
	1;2;4	**0.0773**	**0.0688**	0.0591	0.0529	0.0493	0.0420	0.0461	0.0503
	1;4;8	**0.0777**	**0.0695**	0.0595	0.0545	0.0507	0.0442	0.0474	0.0484
(7;11;15)	1;1;1	0.0478	**0.1203**	**0.0840**	0.0534	0.0444	0.0281	0.0311	0.0522
	1;2;4	0.0234	**0.1029**	**0.0681**	0.0486	0.0395	0.0281	0.0326	0.0460
	1;4;8	0.0226	**0.1063**	**0.0734**	0.0594	0.0500	0.0367	0.0421	0.0517
	4;2;1	**0.2301**	**0.1458**	**0.1107**	**0.0675**	**0.0614**	0.0371	0.0372	0.0559
(7;19;30)	1;1;1	0.0486	**0.1124**	**0.0935**	**0.0619**	0.0569	0.0412	0.0409	0.0550
	1;2;4	0.0092	**0.0814**	**0.066**	0.0514	0.0458	0.0349	0.0391	0.0492
	1;4;8	0.0088	**0.0795**	**0.0624**	0.0536	0.0475	0.0389	0.0432	0.0498
	4;2;1	**0.3766**	**0.1312**	**0.1135**	**0.0685**	**0.0637**	0.0427	0.0401	0.0530
(15;23;30)	1;1;1	0.0456	**0.0700**	0.0587	0.0489	0.0439	0.0352	0.0417	0.0465
	1;2;4	0.0280	**0.0746**	0.0596	0.0522	0.0476	0.0386	0.0450	0.0504
	1;4;8	0.0286	**0.0751**	**0.0609**	0.0568	0.0522	0.0444	0.0491	0.0513
	4;2;1	**0.1949**	**0.0884**	**0.0767**	**0.0612**	0.0559	0.0442	0.0488	0.0518

Tablo 2: *k*=3, *m*=5 için testlerin deneysel I.Tip hata oranları.

n_1,n_2,n_3	$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$	**GCT**	**GWT**	**AFT**	**DKT**	**DAFT**	**YFT1**	**YFT2**	**PBT**
(7;7;7)	1;1;1	0.0502	**0.4380**	**0.1637**	-	-	-	-	0.0317
	1;2;4	**0.1032**	**0.4502**	**0.1874**	-	-	-	-	0.0465
	1;4;8	**0.1151**	**0.4649**	**0.2142**	-	-	-	-	0.0567
(15;15;15)	1;1;1	0.0537	**0.1368**	**0.0783**	**0.0639**	0.0423	0.0197	0.0346	0.0504
	1;2;4	**0.0913**	**0.1401**	**0.0812**	**0.0661**	0.0453	0.0219	0.0338	0.0469
	1;4;8	**0.0982**	**0.1524**	**0.0968**	**0.0803**	0.0597	0.0320	0.0448	0.0549
(30;30;30)	1;1;1	0.0472	**0.0789**	0.0566	0.0524	0.0411	0.0262	0.0374	0.0462
	1;2;4	**0.0846**	**0.0871**	0.0669	**0.0618**	0.0520	0.0364	0.0470	0.0528
	1;4;8	**0.0892**	**0.0933**	0.0693	**0.0650**	0.0547	0.0379	0.0479	0.0499
(7;11;15)	1;1;1	0.0486	**0.2790**	**0.1748**	-	-	-	-	**0.0834**
	1;2;4	0.0144	**0.2142**	**0.1146**	-	-	-	-	0.0519
	1;4;8	0.0122	**0.2013**	**0.1013**	-	-	-	-	0.0448
	4;2;1	**0.4396**	**0.3539**	**0.2491**	-	-	-	-	**0.0869**
(7;19;30)	1;1;1	0.0488	**0.2769**	**0.2282**	-	-	-	-	**0.1140**
	1;2;4	0.0032	**0.1857**	**0.1358**	-	-	-	-	**0.0800**
	1;4;8	0.0026	**0.1435**	**0.0973**	-	-	-	-	0.0586
	4;2;1	**0.6911**	**0.3278**	**0.2820**	-	-	-	-	**0.0889**
(15;23;30)	1;1;1	0.0497	**0.1079**	**0.0753**	**0.0626**	0.0499	0.0287	0.0427	0.0515
	1;2;4	0.0161	**0.0910**	**0.0606**	0.0559	0.0423	0.0248	0.0382	0.0450
	1;4;8	0.0178	**0.1004**	**0.0696**	**0.0671**	0.0522	0.0337	0.0458	0.0523
	4;2;1	**0.3253**	**0.1365**	**0.1001**	**0.0778**	**0.0624**	0.0345	0.0441	0.0521

Tablo 3: *k*=5, *m*=2 için testlerin deneysel I.Tip hata oranları.

$n_1, \dots, n_5$	$\sigma_1, \dots, \sigma_5$	GCT	GWT	AFT	DKT	DAFT	YFT1	YFT2	PBT
(7;7;7;7;7)	1;1;1;1;1	0.0510	0.2178	**0.1386**	0.0547	0.0394	0.0134	0.0185	0.0444
	1;1;2;4;4	**0.0926**	**0.2263**	**0.1543**	**0.0677**	0.0518	0.0197	0.0263	0.0523
	1;1;4;8;8	**0.0983**	**0.2386**	**0.1634**	**0.0742**	0.0565	0.0250	0.0318	0.0526
(15;15;15;15;15)	1;1;1;1;1	0.0494	**0.1092**	**0.0839**	0.0572	0.0493	0.0235	0.0415	0.0503
	1;1;2;4;4	**0.0915**	**0.1107**	**0.0862**	0.0586	0.0495	0.0265	0.0407	0.0476
	1;1;4;8;8	**0.0996**	**0.1128**	**0.0858**	**0.0619**	0.0514	0.0293	0.0437	0.0486
(30;30;30;30;30)	1;1;1;1;1	0.0493	**0.0746**	**0.0643**	0.0527	0.0478	0.0333	0.0446	0.0488
	1;1;2;4;4	**0.0869**	**0.0824**	**0.0712**	0.0588	0.0527	0.0367	0.0493	0.0527
	1;1;4;8;8	**0.0957**	**0.0814**	**0.0710**	0.0580	0.0511	0.0361	0.0471	0.0498
(7;7;11;15;15)	1;1;1;1;1	0.0484	**0.1686**	**0.1259**	**0.0652**	0.0514	0.0215	0.0263	0.0519
	1;1;2;4;4	0.0244	**0.1466**	**0.1052**	0.0558	0.0449	0.0174	0.0225	0.0489
	1;1;4;8;8	0.0238	**0.1417**	**0.1047**	0.0561	0.0441	0.0191	0.0260	0.0476
	4;4;2;1;1	**0.2994**	**0.1868**	**0.1479**	**0.0794**	**0.0661**	0.0288	0.0333	0.0523
(7;7;14;20;20)	1;1;1;1;1	0.0524	**0.1623**	**0.1308**	**0.0715**	**0.0603**	0.0271	0.0302	0.0568
	1;1;2;4;4	0.0173	**0.1265**	**0.0982**	0.0503	0.0419	0.0167	0.0203	0.0463
	1;1;4;8;8	0.0148	**0.1252**	**0.0964**	0.0514	0.0427	0.0182	0.0225	0.0470
	4;4;2;1;1	**0.4022**	**0.1801**	**0.1473**	**0.0739**	**0.0642**	0.0274	0.0298	0.0500
(15;15;23;30;30)	1;1;1;1;1	0.0453	**0.0855**	**0.0707**	0.0526	0.0468	0.0272	0.0401	0.0453
	1;1;2;4;4	0.0273	**0.0857**	**0.0724**	0.0554	0.0497	0.0303	0.0448	0.0515
	1;1;4;8;8	0.0265	**0.0879**	**0.0740**	0.0555	0.0491	0.0297	0.0437	0.0503
	4;4;2;1;1	**0.2506**	**0.0981**	**0.0833**	**0.0625**	0.0552	0.0304	0.0444	0.0493

Tablo 4: *k*=5, *m*=5 için testlerin deneysel I.Tip hata oranları.

$n_1,\ldots,n_5$	$\sigma_1,\ldots,\sigma_5$	GCT	GWT	AFT	DKT	DAFT	YFT1	YFT2	PBT
7,7,7,7,7	1;1;1;1;1	0.0505	**0.6358**	**0.3412**	-	-	-	-	0.0282
	1;1;2;4;4	**0.1114**	**0.6345**	**0.3729**	-	-	-	-	0.0411
	1;1;4;8;8	**0.1244**	**0.6512**	**0.3863**	-	-	-	-	0.0532
15,15, 15,15, 15	1;1;1;1;1	0.0504	**0.1909**	**0.1137**	**0.0743**	0.0462	0.0088	0.0327	0.0486
	1;1;2;4;4	**0.0991**	**0.1959**	**0.1209**	**0.0776**	0.0523	0.0133	0.0380	0.0494
	1;1;4;8;8	**0.1092**	**0.1999**	**0.1240**	**0.0847**	0.0565	0.0152	0.0399	0.0509
30,30,30,30,30	1;1;1;1;1	0.0498	**0.0973**	**0.0732**	0.0595	0.0455	0.0180	0.0414	0.0462
	1;1;2;4;4	**0.0955**	**0.0975**	**0.0721**	0.0597	0.0472	0.0187	0.0420	0.0465
	1;1;4;8;8	**0.0958**	**0.1029**	**0.0763**	**0.0636**	0.0501	0.0211	0.0440	0.0486
7,7,11,15,15	1;1;1;1;1	0.0468	**0.4414**	**0.3181**	-	-	-	-	**0.0616**
	1;1;2;4;4	0.0089	**0.3797**	**0.2500**	-	-	-	-	0.0448
	1;1;4;8;8	0.0074	**0.3647**	**0.2354**	-	-	-	-	0.0370
	4;4;2;1;1	**0.6170**	**0.4951**	**0.3870**	-	-	-	-	**0.0750**
7,7,14,20,20	1;1;1;1;1	0.0472	**0.4284**	**0.3384**	-	-	-	-	**0.0684**
	1;1;2;4;4	0.0044	**0.3416**	**0.2513**	-	-	-	-	0.0439
	1;1;4;8;8	0.0051	**0.3209**	**0.2280**	-	-	-	-	0.0437
	4;4;2;1;1	**0.7690**	**0.4711**	**0.3953**	-	-	-	-	**0.0826**
15,15,23,30,30	1;1;1;1;1	0.0478	**0.1421**	**0.1023**	**0.0675**	0.0497	0.0145	0.0383	0.0467
	1;1;2;4;4	0.0134	**0.1298**	**0.0902**	**0.0639**	0.0470	0.0132	0.0363	0.0481
	1;1;4;8;8	0.0148	**0.1299**	**0.0905**	**0.0688**	0.0501	0.0138	0.0413	0.0522
	4;4;2;1;1	**0.4252**	**0.1653**	**0.1255**	**0.0854**	**0.0662**	0.0207	0.0451	0.0525

Grup sayısı *k*=3, m=2 ve bağımsız değişken sayısı *p*=1 için hazırlanan Tablo 1 incelendiğinde; Örnek çapları eşit olduğu durumlarda; GCT testinin I. tip hata oranı beklenildiği üzere varyansların eşit olduğu her durumda α=0.050 değerine yakın sonuçlar verdiği, ancak varyanslar arasındaki fark arttıkça; nominal değerden uzaklaştığı görülmektedir. GWT testinin ise deneysel I. tip hata oranı varyansın her durumunda nominal değerden uzaklaştığı, DKT, DAF, YFT1, YFT2 testlerinin ise varyanslar eşit olduğu ya da birbirine yakın olduğu durumlarda nominal değerden çok düşük sonuçlar verdiği görülmektedir. Örnek çapları arttıkça, asimptotik testlerin hepsinin deneysel I. tip hata oranlarının nominal değere yaklaştığı olduğu görülmektedir.

Örnek çapları farklı olduğu durumlarda; küçük örnek çaplarında GCT testinin deneysel I. tip hata oranının, varyanslar eşit olduğu durumda nominal değere yakın iken, örnek çapları ile varyans değerleri birbiriyle doğru orantılı olduğu durumlarda nominal değerden oldukça küçük, örnek çapları ile varyans değerleri birbiriyle ters orantılı olduğunda durumlarda ise nominal değerden oldukça yüksek sonuçlar verdiği gözlenmiştir. AFT ve DKT testlerinin deneysel I. tip hata oranları örnek çapları ile varyans değerleri birbiriyle ters orantılı olduğu durumlarda 0.050 sınır değerini aştığı, GWT testinin ise her durumda nominal değerden uzak sonuçlar verdiği gözlenmiştir. PB testinin ise deneysel I. tip hata oranı, her durumda nominal değere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Örnek çapları arttığında, DAFT, YFT1, YFT2 testlerinin deneysel I. tip hata oranları nominal değere yakın sonuçlar vermektedir. PB testinin deneysel I. tip hata oranı ise her durumda nominal değere yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Bağımsız değişken sayısının arttırıldığı durum için hazırlanan Tablo 2 incelendiğinde; Eşit örnek çapları durumlarında GCT, GWT, AFT ve DKT testlerinin deneysel I. tip hata oranlarının nominal değerden oldukça uzaklaştığı görülmektedir. DAF, YFT1, YFT2 ve PB testlerin deneysel I. tip hata oranları ise α değerine yakın sonuçlar vermektedir. Örnek çapları farklı ve küçük iken, DKT, DAFT ve YFT1 testlerinin hesaplanamadığı, PB testinin ise deneysel I. tip hata oranının varyansın farklı durumları için 0.050 sınır değerini aştığı görülmektedir.

Grup sayısının artırıldığı durum için hazırlanan Tablo 3 incelendiğinde; Eşit örnek çapları için GCT, GWT ve AFT testlerinin deneysel I. tip hata oranları büyük örnek çaplarında bile α=0.050 değerinden uzak sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Diğer testlerin ise deneysel I. tip hata oranları α=0.05 değerine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Farklı örnek çapları için *k* grup sayısının artmasıyla birlikte GWT ve AFT testlerinin deneysel I. tip hata oranları, varyansların her durumunda ve büyük örnek çaplarında bile α=0.050 değerinden uzak sonuçlar verdiği görülmektedir. Örnek çapları ile varyans değerleri ters orantılı olduğu durumlarda DAFT testinin de deneysel I. tip hata oranının α=0.050 değerinden uzak sonuçlar verdiği görülmektedir. YFT1, YFT2 ve PB testlerinin deneysel I. tip hata oranları ise α=0.050 değerine yakın sonuçlar vermektedir.

Hem grup sayısı hem de bağımsız değişken sayısı arttırıldığı durum için hazırlanan Tablo 4 incelendiğinde; Örnek çapları ve varyansların tüm durumlarında, GWT ve AFT testlerinin deneysel I. tip hata oranları α=0.050 değerinden uzak, YFT1 testinin deneysel I. tip hata oranı ise α=0.050 değerinden oldukça küçük sonuçlar verdiği görülmektedir.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, varyansların eşit olmadığı durumlarda *k* grup regresyon modelinin eşitliğinin testi problemi ele alınmıştır. Bu problem için literatürde yaygın olarak kullanılan Genelleştirilmiş Chow testi (GCT), Genelleştirilmiş Wald testi (GWT), Ağırlıklı *F* Testi (AFT), Düzeltilmiş Ki-Kare Testi (DKT), Düzeltilmiş Ağırlıklı *F* Testi (DAFT), yeni *F* Testi I (YFT1), yeni *F* Testi II (YFT2) ve Parametrik Bootstrap testi (PBT) ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ayrıca, grup sayısı k=3 ve k=5, bağımsız değişken sayısı p=1 ve p=4, örnek çapları ve hata varyanslarının eşit ve farklı kombinasyonları dikkate alınarak kapsamlı bir simülasyon çalışmasıyla bu testlerin deneysel I. tip hata oranları bakımından karşılaştırılması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasına göre, DKT, DAFT, YFT1 ve YFT2 testlerinin teorik yapısından dolayı *p*>2 iken küçük örnek çapları durumunda kullanılamadığı görülmektedir. GCT, AFT özellikle GWT testlerinin çoğu durumda deneysel I. tip hata oranı değerlerinin nominal değerden oldukça büyük çıktığı görülmektedir. PB testi ise örnek çapları ve varyanslar birbiriyle ters orantılı olduğu durumlarda nominal değerden biraz uzaklaştığı görülmektedir. Bunun dışında ise diğer testlere göre örnek çapı, grup sayısı ve değişken sayısına bakmaksızın nominal değere en yakın sonuç veren test olduğu söylenebilir. Sonuç olarak, heterojen varyans varsayımı altında *k* grup regresyon modelinin katsayılarının eşitliği testinde yaygın olarak kullanılan testlerin özellikle küçük ve farklı örnek çaplarında varyanslar arasındaki fark arttıkça deneysel I. tip hata oranı bakımından çok iyi sonuç vermediği yapılan simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. Uygulamada, özellikle de ekonomik ve tıbbi uygulamalarda yüksek örnek çaplarıyla çalışmak çok gerçekçi bir durum değildir. Dolayısıyla özellikle küçük örnek çaplarında daha iyi deneysel I. tip hata oranı elde etmek bu tarz verilerin analizinde elde edilen sonuçların güvenilirliğini artıracaktır. Bu amaçla sonraki çalışmalarda özellikle küçük örnek çapında var olan testlerden daha iyi deneysel I. tip hata oranı değerine sahip yeni yaklaşımlara dayalı test istatistiği üzerinde durulması uygun olacaktır.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGMENTS)

Bu araştırma hiçbir dış finansman almamıştır.

YAZAR KATKILARI

Faik Ümit Diri: Kavramsal tasarım, metodoloji, yazma, düzenleme, kaynaklar.

Fikri Gökpınar: Metodoloji, deneysel çalışmalar, yazılım, denetim, onaylama.

Esra Gökpınar: Veri düzenleme, gözden geçirme ve düzenleme.

ÇIKAR ÇATIŞMALARI

Yazarlar, herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] G. Chow, “Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions”, Econometrica: Journal of the Econometric Society, 591-605, doi.org/10.2307/1910133.

[2] T. Toyoda, “Use of the Chow test under heteroscedasticity”, *Econom. J. Econom. Soc.*, 601-608, 1974, doi.org/10.2307/1911796.

[3] W. A. Jayatissa, “Tests of equality between sets of coefficients ın two lınear regressions when disturbance variances are unequal”, *Econometrica*, c. 45, sy 5, 1977, doi.org/10.2307/1914075.

[4] Goldfeld, S. M. ve Quandt, “Asymptotic tests for the constancy of regressions in the heteroskedastic case”, Research Memorand Lmni No, 229, Econometric Research Program, Princeton University.”.

[5] P. A. Watt, “Tests of equality between sets of coefficients ın two linear regressions when disturbance variances are unequal: some small sample propertıes”, *Manch. Sch.*, c. 47, sy 4, ss. 391-396, 1979, doi:10.1111/j.1467-9957.1979.tb01363.x.

[6] M. M. Ali ve J. L. Silver, “Tests for equality between sets of coefficients in two linear regressions under heteroscedasticity”, *J. Am. Stat. Assoc.*, c. 80, sy 391, ss. 730-735, 1985,doi:10.1080/01621459.1985.10478176.

[7] H. Tsurumi ve N. Sheflin, “Some tests for the constancy of regressions under heteroscedasticity”, *J. Econom.*, c. 27, sy 2, ss. 221-234, 1985, doi.org/10.1016/0304-4076(85)90089-2.

[8] Y. Honda ve H. Ohtani, “Modified wald tests in tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions under heteroscedasticity”, *Manch. Sch.*, c. 54, sy 2, ss. 208-218, Haz. 1986, doi: 10.1111/j.1467-9957.1986.tb01266.x.

[9] S. Weerahandi, "Testing regression equality with unequal variances", Econometrica Journal of the Econometric Society, 1211-1215, 1987, doi.org/10.2307/1911268.

[10] J. G. Thursby, “Misspecification, heteroscedasticity, and the Chow and Goldfeld-Quandt tests”, *Rev. Econ. Stat.*, ss. 314-321, 1982, doi.org/10.2307/1924311.

[11] R. Wilcox, "Comparing the slopes of two independent regression lines when there is complete heteroscedasticity", British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 50(2), 309-317,1997,doi.org/10.1111/j.2044-317.1997.tb01147.x

[12] E. Moreno, F. Torres, ve G. Casella, “Testing equality of regression coefficients in heteroscedastic normal regression models”, *J. Stat. Plan. Inference*, c. 131, sy 1, ss. 117-134, 2005, doi.org/10.1016/j.jspi.2003.12.016

[13] D. Oberhelman ve R. Kadiyala, “A test for the equality of parameters for separate regression models in the presence of heteroskedasticity”, *Commun. Stat. Simul. Comput.*, c. 36, sy 1, ss. 99-121, Oca. 2007, doi: 10.1080/03610910601096338.

[14] M. A. Koschat ve S. Weerahandi, “Chow-type tests under heteroscedasticity”, *J. Bus. Econ. Stat.*, c. 10, sy 2, ss. 221-228, Nis. 1992,

doi: 10.1080/07350015.1992.10509901.

[15] Yazıcı. M., Gökpınar, F., Gökpınar, E., Ebegil, M., ve Özdemir, Y. (2021). A computational approach test for comparing two linear regression models with unequalvariances”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 50(6), 1756-1772, doi.org/10.15672/hujms.784623

[16] J.-M. Dufour, “Generalized Chow tests for structural change”: A coordinate-free approach”, *Int. Econ. Rev.*, ss. 565-575, 1982, doi.org/10.2307/2526374

[17] Y. Y. MAY, “Some new methods for comparing several sets of regression coefficients under heteroscedasticity”, Yüksek Lisans Tezi, Department Of Statıstıcs And Applıed, Probability, National Unıversıty of Singapore, 2012.

[18] S. M. Sadooghi-alvandi, A. A. Jafari, ve H. A. Mardani-Fard, “Comparing several regression models with unequal variances”, *Commun. Stat. Simul. Comput.*, c. 45, sy 9, ss. 3190-3216, Ekim 2016, doi: 10.1080/03610918.2014.930899.