

Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Dörtgenlerde Alan Konusundaki Zihinsel Yapılarının APOS Teorisine Göre İncelenmesi *

Examination of Mathematics Education Undergraduate Students' Mental Structures on Area in Quadrilaterals According to APOS Theory

Ekin Altıkardes¹, Melike Yiğit Koyunkaya²

¹Sorumlu Yazar, Arş. Gör., Dokuz Eylül Üniversitesi, ekin.altikardes@deu.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0002-1813-9540)

²Prof. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, melike.koyunkaya@deu.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0002-7872-3917)

Geliş Tarihi: 12.11.2024

Kabul Tarihi: 11.03.2025

ÖZ

Bu çalışmanın temel amacı matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dörtgenlerde alan konusuna dair var olan zihinsel yapılarını incelemektir. Çalışmanın teorik alt yapısını APOS öğrenme teorisi oluşturmaktadır. Durum çalışması ile desenlenen bu çalışmaya Matematik Öğretmenliği lisans programının 1. sınıfında öğrenim gören 4 gönüllü öğrenci katılmıştır. Çalışma kapsamında öğrencilere alt sorular içeren açık uçlu 19 tane soru sorulmuş ve öğrencilerden bu soruları yazılı olarak cevaplamaları istenmiştir. Daha sonra öğrencilerle, bu sorulara verdikleri yazılı cevaplar hakkında bireysel klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu klinik görüşmeler video ile kayıt altına alınmıştır. Çalışmanın verileri benimsenen öğrenme teorisi ışığında içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Yapılan analizler sonucunda, öğrencilerin dörtgenlerde alan konusundaki zihinsel yapıları boyut, ölçme ve alan olmak üzere üç bileşen ve her bir bileşene ait alt bileşenler temelinde ele alınmıştır. Çalışmanın bulguları tüm öğrencilerin boyut ve ölçme bileşenlerinin tüm alt bileşenleri kapsamında genellikle “eylem” veya “gelişen süreç” düzeyinde olduklarını göstermiştir. Sadece bir öğrencinin ölçme bileşeninin bir alt bileşeni kapsamında “süreç” düzeyine ulaşabildiği dikkat çekmiştir. Alan bileşeninin alt bileşenleri kapsamında ise bir öğrencinin genellikle “süreç” düzeyinde olduğu, diğer üç öğrencinin ise genellikle “gelişen süreç” düzeyinde oldukları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alan, boyut, ölçme, dörtgenler, dörtgenlerde alan, APOS teorisi.

ABSTRACT

The main goal of this study is to examine secondary mathematics education undergraduate students' existing mental structures on the area of quadrilaterals. APOS learning theory was adopted as the theoretical background of the study. The study was designed considering a case study and 4 volunteer students studying in the first year of the Mathematics Education undergraduate program were the participants of the study.

* Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Doktora Programında yürütmekte olduğu “Dörtgenlerde Alan Konusunun Öğrenme Sürecinin Etkinlik Yoluyla Öğrenme Çerçevesi Kullanılarak Geliştirilmesi” başlıklı doktora tezi kapsamında hazırlanmıştır.

Within the scope of the study, 19 open-ended questions including sub-questions were asked to the students and they were asked to answer these questions in writing. Then, individual clinical interviews were conducted with the students about their written answers to these questions. These clinical interviews were recorded by video. The data were analyzed with the content analysis method in the light of the adopted learning theory. As a result of the analysis, students' mental structures on area in quadrilaterals were addressed based on three components, namely dimension, measurement and area, and subcomponents of each component. The findings of the study showed that all students stayed generally at the “action” level or “emerging process” level within the scope of all subcomponents of the dimension and measurement components. It was noteworthy that only one student was able to reach the “process” level within the scope of a subcomponent of the measurement component. Within the scope of the subcomponents of the area component, it was determined that one student was generally at the “process” level, while the other three students stayed generally at the “emerging process” level.

Keywords: Area, dimension, measurement, quadrilaterals, area in quadrilaterals, APOS theory.

GİRİŞ

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) Matematik Dersi Öğretim Programlarında, matematik çeşitli alt öğrenme alanlarına ayrılmıştır ve bu alanların arasında geometri ve ölçme de yer almaktadır. (2018a, 2018b, 2024a, 2024b). Geometri ve ölçme hem birbirleriyle (Altun, 2008), hem de matematikteki, günlük yaşamdaki ve diğer disiplinlerdeki pek çok konu ile bağlantılı olan önemli bir alt alandır (Tan-Şişman & Aksu, 2012). Geometri ve ölçme özelinde öğrenme ve öğretme sürecinde zorluk yaşanan konulardan bir tanesi dörtgenler konusudur (Ayaz, 2016; Brunheira & Ponte, 2019; Fujita & Jones, 2007; Hartono, 2020; Nadjib, 2016; Kosasih vd., 2024; Okazaki & Fujita, 2007; Rahayu & Afriansyah, 2021; Rohaeti vd., 2019). Ulusal ve uluslararası öğretim programlarında geniş bir yer tutan bu konu (Fujita & Jones, 2007; MEB, 2018a, 2018b, 2024a, 2024b, 2024c); şekilleri tanıma ve tasvir etmeye, şekillerin özelliklerini öğrenmeye, bir dörtgen türünün özelliklerinden yola çıkarak diğerinin özellikleri hakkında çıkarım yapabilmeye, bir dörtgen türünü farklı kategoriler altında ifade edebilmeye, dörtgenleri birbiri ile ilişkilendirip sınıflandırmaya imkân sunması bakımından oldukça önemlidir (Özkan, 2019). Dörtgenler ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, çalışmaların daha çok ortaokul öğrencileri (Afriansyah & Arwadi, 2021; Balgalımsı & Işık-Ceyhan, 2019; Çontay & Duatepe-Paksu, 2022; Erez & Yerushalmy, 2006; Fujita, 2012; Fujita vd., 2019; Kosasih vd., 2024; Ksuma vd., 2021; Mutluoğlu & Erdoğan, 2020; Rahma, 2023; Rohaeti vd., 2019), ortaöğretim öğrencileri (Gal & Lew, 2008; Okazaki & Fujita, 2007) ve matematik eğitimi lisans öğrencilerinin (Avcu, 2023; Brunheira & Ponte, 2019; Çakmak-Gürel & Okur, 2018; Miller, 2018; Ndlovu, 2014; Okazaki & Fujita, 2007; Pickreign, 2007) çeşitli dörtgenleri isimlendirme, tanımlama, sınıflandırma, dörtgenlerin benzer ve farklı özelliklerini belirleme gibi konulardaki var olan durumlarını belirleme ve çeşitli yöntemlerle geliştirme üzerine yoğunlaştığı görülmektedir. Bu çalışmaların sonuçları; öğrencilerin dörtgenleri farklı şekillerde tanımlamakta, birbiri ile ilişkilendirmekte, sınıflamakta ve dörtgenlerin özelliklerini benimsemekte zorlandıklarını göstermektedir.

Dörtgenler konusunun ölçme ile ilişkisi göz önüne alındığında, dörtgenlerde açı, uzunluk ve alan ölçme ile ilgili çalışmaların sayısının az olduğu dikkat çekmektedir. Geometrik şekillerin kenar ve çevre uzunluğunu, alanını veya geometrik cisimlerin hacmini hesaplamak, pek çok matematiksel beceriyi birlikte kullanmayı gerektirmekte ve matematiksel kavram ve becerilerin geliştirilmesinde büyük rol oynamaktadır (Altun, 2008; Huang & Witz, 2011; Tan-Şişman & Aksu, 2012). Örneğin alan ölçümü, öğrencilerin günlük yaşamdaki pek çok ölçme işlemini gerçekleştirmeyi öğrenmeleri bakımından önemlidir (Lehmann, 2022). Öğretim programlarında dörtgenlerde alan konusu ilkokuldan yükseköğretime kadar farklı sınıf seviyelerinde yer almaktadır (MEB, 2018a, 2018b, 2024a, 2024b, 2024c). Buna rağmen öğrencilerin bu konuyu anlamakta zorlandıkları, kalıp şekillerin alan bağıntılarını anlamadan ezberleme ve formüller üzerinden sonuca ulaşma eğiliminde oldukları görülmektedir (Fujita & Jones, 2007; Kayış, 2019; Smith & Barrett, 2017).

Dörtgenlerde alan konusu ile ilgili çalışmaların daha çok iki konu üzerinde yoğunlaştığı dikkat çekmektedir. Bunlardan ilki, öğrencilerin konu ile ilgili yaşadıkları zorlukların ve kavram yanlışlıklarının belirlenmesi iken (Huang & Witz, 2013; Tan-Şişman & Aksu, 2009, 2016; Tumova, 2017); ikincisi ise çeşitli yöntem ve tekniklerin kullanılmasının öğrencilerin konuyu öğrenmelerine etkilerinin incelenmesidir. Bu kapsamda parçalama ve yeniden birleştirme yoluyla alanın öğrenilmesi (Hoong, 2012; Lehmann, 2022); dinamik geometri yazılımlarının (Nisiyatussani vd., 2018; Özçakır & Çakıroğlu, 2017); işbirlikli öğrenmenin (Kayış, 2019), aktif öğrenme yaklaşımının (Eker, 2014), etkinlik temelli öğretimin (Gülsoy & Çekmez, 2022) konunun öğrenilmesine etkileri gibi çalışmalar göze çarpmaktadır.

Dörtgenlerde alan konusu; öğrencilerin boyut ve ölçme algıları, uzunluk ve alan ölçmeye yönelik bilgi ve becerileri, üçgenler, dörtgenler, dörtgenlerin sınıflandırılması ve aralarındaki hiyerarşik düzen gibi pek çok konuyu içermektedir. Fakat yapılan alanyazın incelemesinde, hem öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu bütün olarak öğrenmelerini, hem de dörtgenlerin sınıflandırılması ve aralarındaki hiyerarşik ilişki ile ilgili bilgilerini alan konusunda kullanabilme becerilerini inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Öğrencilerin dörtgenlerde alan konusu ile ilgili yaşadıkları zorlukları aşmanın; kavramlar ve şekiller arasındaki ilişkileri gözler önüne seren, hiyerarşik düzeni ve sonuçlarını vurgulayan, formüllerin anlamını ortaya çıkaran öğrenme-öğretme ortamlarının tasarlanması ile mümkündür (Fujita & Jones, 2007). Bunun için de öncelikli olarak öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu hali hazırdaki öğrenmelerinin ve hiyerarşik ilişkiyi alan konusuna entegre edebilme becerilerinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesi ihtiyacı doğmaktadır. Böylece öğrencilerin konuyu etkili şekilde öğrenmelerini sağlayabilecek planlamalar yapılabilir.

Buradan hareketle bu çalışmanın temel amacı, matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dörtgenlerde alan konusuna dair var olan zihinsel yapılarını incelemektir. Bu çalışma ile öğrencilerin söz konusu zihinsel yapılarının; boyut, ölçme, üçgenler, üçgenlerde alan, dörtgenler ve dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkinin alan bağlamında kullanımı konularıyla ilişkili olarak ayrıntılı şekilde belirlenmesi hedeflenmektedir. Böylece bu çalışma, matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dörtgenlerde alan konusunun bütününe yönelik var olan bilgilerine ışık tutarak alanyazına katkı sağlamakta ve dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkinin alan bulurken kullanımına yönelik sınırlı olan literatürü genişletmektedir.

1.1. Dörtgenlerde Alan

Dörtgenlerde alan ölçümü çalışmalarının ilköğretimden yükseköğretime kadar neredeyse her sınıf seviyesinde yer aldığı görülmektedir. Bu kapsamda müfredatlarda birim yineleyerek kaplama ve sayma stratejilerinin alan ölçümünde kullanımı, farklı geometrik şekillerin alan bağıntıları ve bu bağıntıların elde edilişi, bir geometrik şeklin alan bağıntısını kullanarak başka bir geometrik şeklin alan bağıntısını elde etme ve bunlarla ilgili problemleri çözme gibi konular yer almaktadır (MEB, 2018a, 2018b, 2024a, 2024b, 2024c). Buna rağmen öğrencilerin dörtgenlerde alan ölçümünü anlamakta zorlandıkları görülmektedir (Fujita & Jones, 2007; Kayış, 2019; Smith & Barrett, 2017; Tan-Şişman & Aksu, 2009). Bu ise genellikle öğretmenlerin yeterli ilişkilendirme ve gerekçelendirme yapmadan şekillerin alan ölçümüne ilişkin formülleri öğretmelerinden kaynaklanmaktadır (Huang & Witz, 2011).

Öğretmenlerin öğretimlerinde kullandıkları bu anlayışın; öğrencilerin herhangi bir dörtgenin alanını bulmak için çevrelerindeki nesneleri ölçü birimi olarak kullanabilme gibi beceriler geliştiremeyip sayısal verilere ihtiyaç duymalarına (Zacharos, 2006), dörtgenlerin alan formüllerini gerekçelendirememelerine ve birbiri ile ilişkilendirememelerine (Fujita & Jones, 2007; Kayış, 2019; Smith & Barrett, 2017; Tan-Şişman & Aksu, 2009), dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkiyi kavrayamamalarına ve bu ilişkiyi alan konusu bağlamında kullanamamalarına (Ayaz, 2016; Fujita & Jones, 2006, 2007; Gal & Lew, 2008; Ndlovu, 2014; Okazaki & Fujita, 2007; Özkan, 2019; Miller, 2018) sebep olabildiği düşünülmektedir. Oysaki öğrencilerin herhangi

bir dörtgenin alanını hesaplayabilmek için farklı stratejiler kullanabilmeleri, alan bağıntılarını kendileri oluşturarak farklı dörtgenlerin alan bağıntıları arasındaki kavramsal ilişkiyi fark edebilmeleri, bir şeklin parçalanması ve ayrışan parçalarının üst üste binmeden yeniden düzenlenmesinin şeklin alanını değiştirmeyeceği anlayışından hareketle bir dörtgenin alanını farklı dörtgenlerin alanlarından yararlanarak bulabilmeleri dörtgenlerde alan konusunun kavranmasında oldukça önemlidir (Lehmann, 2022; MEB, 2018a, 2018b; 2024a, 2024b; Smith vd., 2016; Vincent & Stacey, 2009). Örneğin bir dörtgenin içine gömülmüş şekilleri tanımlayarak fiziksel veya şekilsel olarak parçalamak ve ayrışan parçaları simetri alma, döndürme ve öteleme gibi geometrik hareketler yoluyla başka bir şekil oluşturacak şekilde yeniden düzenlemek; alan formüllerinin türetilmesinde öncül olup, bireylerin alanın korunumunu anlamalarına, düzgün olmayan ve bileşik şekillerin alanını hesaplamak için önemli alternatif stratejiler geliştirmelerine yardımcı olmaktadır (Huang & Witz, 2011; Manizade & Mason, 2014; Martinovic & Manizade, 2020).

Bunlara ek olarak öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu tam anlamıyla öğrenebilmeleri için öncelikle boyut kavramı, farklı şekillerin boyutları ve özellikleri, hangi boyutlu şekillerde alan ölçülebileceği, ölçme, ölçü birimi ve ölçme aracı kavramları, uzunluk ve alan ölçmek için uygun bir nesneyi ölçü birimi olarak seçme gibi sayısal veriye dayanmayan genel yollar, kaplama ve sayma stratejileri gibi konular hakkında yeterli bilgi birikimi ve beceriye sahip olmaları gerektiği düşünülmektedir. Ayrıca dörtgenlerde alan konusunun öğrenilmesinde üçgenlerin özellikleri ve alan bağıntıları, genel ve özel dörtgenlerin özellikleri, üçgenler ve dörtgenler arasındaki ilişkiler, dörtgenler arasındaki bağlantılar ve hiyerarşik düzen gibi konuların da son derece önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü dörtgenlerde alan konusunun yapısı ve içeriği incelendiğinde, bu konunun boyut, ölçme ve ölçmenin bir parçası olarak alan, üçgenler ve dörtgenler konuları ile yakından ilişkili olduğu açıktır (MEB, 2024a, 2024b, 2024c). Dörtgenlerde alan konusunun öğrenilmesine yönelik bahsedilen düşünceler, bu çalışmada matematik eğitimi lisans öğrencilerine uygulanan soruların seçimini ve içeriğini belirlemede etkili olmuştur.

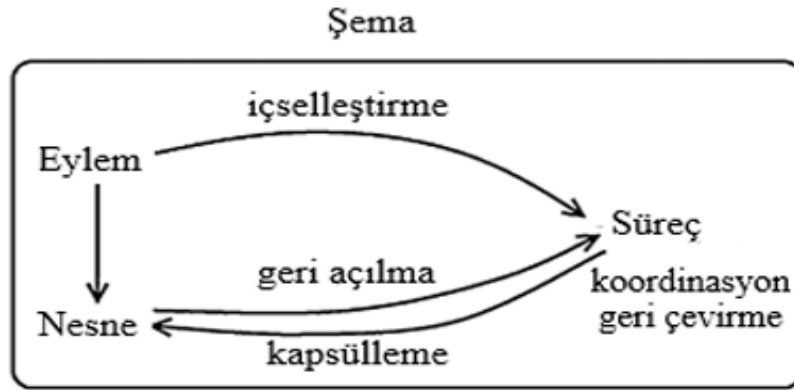
1.2. Teorik Çerçeve

Bu çalışmada öğrencilerin dörtgenlerde alan konusuna dair zihinsel yapılarını belirlemek için APOS öğrenme teorisi kullanılmıştır. Bu teori, çerçevenin bileşenlerinin İngilizcesi olan Action (Eylem), Process (Süreç), Object (Nesne) ve Schema (Şema) kelimelerinin ilk harflerinin birleşiminden oluşmaktadır. Dubinsky ve arkadaşları, Piaget'in yansıtıcı soyutlama teorisine odaklanarak ileri düzey matematik kapsamında APOS çerçevesini geliştirmişlerdir. APOS teorisi bireylerin çeşitli matematiksel kavramları öğrenme ve anlama süreçlerindeki bilişsel yapılanmaları değerlendirmek veya geliştirmek için kullanılmaktadır (Arnon vd., 2014; Asiala vd., 1996; Clark vd., 1997; Dubinsky, 1991).

Bireyler matematiksel kavramları anlamlandırırken zihinsel yapılar inşa etmektedirler. Bu zihinsel yapılar “Eylem”, “Süreç”, “Nesne” ve “Şema” şeklinde adlandırılmaktadır (bkz. Şekil 1). İlerleyen zamanlarda Dubinsky ve arkadaşlarının tasarladığı teori geliştirilerek yeni zihinsel yapılar teoriye eklenmiştir (Arnon vd., 2014). Bu zihinsel yapılardan biri de “Gelişen Süreç”tir (Emerging Process).

Şekil 1

APOS Teorisindeki Zihinsel Yapılar ve Mekanizmalar



Şekil 1’de görüldüğü gibi Arnon ve diğerlerine (2014) göre, öğrenme “eylem” düzeyinde başlamaktadır. Bu düzeydeki bireyler, yeni bir kavramı öğrenmek veya bir işlemi gerçekleştirmek için hangi adımların atılması gerektiğini ayrıntılarıyla belirten dışsal ipuçlarıyla bağlantılar kurmaktadır. Bir eylem tekrarlandığında, üzerinde düşünüldüğünde veya diğer eylemlerle birleştirildiğinde içselleştirilerek “süreç” düzeyine geçilmektedir. “Süreç” düzeyinde bireyler, dönüşümleri dışsal bir uyaran olmadan gerçekleştirmekte ve adımları açıkça uygulamaya gerek duymamaktadırlar. Ayrıca iki veya daha fazla sürecin koordine edilmesi veya bir sürecin tersine çevrilmesiyle de “süreç” elde edilebilmektedir. Teoriye sonradan eklenen “gelişen süreç” düzeyi ise eylem düzeyinden süreç düzeyine geçerken kullanılan ara zihinsel yapı olarak ortaya atılmıştır. Bu düzeyde bireyler, süreç düzeyinde olduklarına yönelik kanıtlar sunmalarına rağmen, aynı zamanda eylem düzeyinden süreç düzeyine geçişte bazı zorluklar yaşadıklarına yönelik kanıtlar da sunmaktadırlar. Bireyler süreçlerle pratik yaparak süreçleri bir bütün olarak algıladıklarında, sürecin üzerine başka eylem veya süreçler uygulayabildiklerinde süreç “nesne” olarak kapsüllenmektedir. Yeni oluşturulan nesneler de kapsüllerinden geri çıkarılarak süreçlere geri döndürülebilmektedir. “Şema” ise, matematiksel bir kavramla bağlantılı tutarlı bir çerçeve oluşturmak amacıyla birbirine çeşitli ilişkilerle bağlanmış olan eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemaların bir koleksiyonudur.

APOS teorisi ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, daha çok öğrencilerin cebir öğrenme alanına ait matematiksel kavramları öğrenme süreçlerine odaklanıldığı görülmektedir (Boz-Yaman & Yiğit-Koyunkaya, 2019; Dubinsky & Wilson, 2013; Maharaj, 2010; Martínez-Planell & Cruz-Delgado, 2016; Öksüz, 2018; Şefik, 2017; Trigueros & Martínez-Planell, 2010). Bir geometri konusunun öğrenilmesinin APOS teorik çerçevesine göre incelenmesi ile ilgili çalışmaların sayısının ise cebir konuları ile ilgili çalışmalara kıyasla oldukça az olduğu dikkat çekmektedir (Deniz, 2014; Trigueros & Oktaç, 2005; Yıldız & Ezentaş, 2018; Yiğit, 2014). Bu ise çalışmada öğrencilerin dörtgenlerde alan konusundaki zihinsel yapıları incelenirken APOS teorisinin tercih edilme sebeplerinden biri olmuştur. Bu kapsamda APOS teorisinin dörtgenlerde alan konusunda etkili bir şekilde kullanılabileceği gösterilmek istenmiştir. Çalışmada APOS teorisinin tercih edilmesinde etkili olan faktörlerden bir diğeri teorisinin temelini sağlam olduğunun ve matematik eğitiminde yaygın kullanılan bir çerçeve olduğunun düşünülmesidir. En önemli faktör ise teorisinin bileşenlerinin kurucuları tarafından oldukça net, ayrıntılı ve bol örnek kullanılarak açıklanmış olduğuna inanılmasıdır (Arnon vd., 2014). Gerek teorisinin kurucuları tarafından, gerekse APOS teorisi ile ilgili çalışmalar yapan araştırmacılar tarafından sunulan örneklerin sayısının oldukça fazla olması ve detaylı ele alınmasının; teorisinin anlaşılabilirliğini arttırdığı ve teoriyi dörtgenlerde alan gibi bir konuya uyarlama noktasında faydalı olduğu düşünülmektedir.

1.3. Çalışmanın Önemi

Matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin dörtgenlerde alan konusuna dair var olan zihinsel yapılarının incelendiği bu çalışmanın, dörtgenlerde alan konusunu geniş bir açıdan ele alarak alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Yapılan alanyazın taramasında dörtgenlerde alan konusunu; bireylerin boyut, ölçme ve alan kavramlarına yönelik bilgi ve becerilerinden başlayarak, üçgenler ve dörtgenlerle ilişkilendirerek bütüncül bir bakış açısıyla ele alan bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Hâlbuki dörtgenlerde alan konusu daha önce de bahsedildiği üzere pek çok konu ile ilişkili bir konudur. Dolayısıyla öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu öğrenmelerini tam anlamıyla inceleyebilmek için konunun tek başına ele alınmasının yeterli olmayıp kendisiyle ilişkili konular ile birlikte kapsamlı bir şekilde ele alınması gerektiği ve bunun faydalı olacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmanın, dörtgenler konusuna yönelik sıklıkla yapılan tanımlama, sınıflama ve hiyerarşik ilişki çalışmalarının dörtgenlerde alan konusunda nasıl kullanılabileceğine yönelik sınırlı olan literatürü genişletmesi bakımından da alana katkı sağlayacağı varsayılmaktadır. Öğrencilerin dörtgenlerin tanımları arasındaki ilişkileri ve dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkileri kavrayabilmeleri için “Kare tüm kenarları eşit olan bir dikdörtgendir.”, “Paralelkenar özel bir yamuktur.” gibi ezber cümlelerden öteye gidilmesi gerektiği, söz konusu ilişkilerin bireylere hangi bilgileri sağladığı ve diğer dörtgenlerin özellik ve alanlarını bulurken nasıl kullanılabileceğinin vurgulanmasının önemli olduğu düşünülmektedir. Böylece bireylerin dörtgensel bölgelerde alan konusunda yaşadıkları zorluklar ve kavram yanlışlarının giderilmesine katkı sağlanabilir. Ayrıca bu çalışmanın, öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu nasıl öğrendikleri konusunda fikir vererek, onların konuyu öğrenmelerini geliştirmek ve etkili öğrenme-öğretme ortamlarının oluşturulması adına planlamalar yapılmasında önemli olabileceği düşünülmektedir.

APOS teorisi ile ilgili çalışmaların daha çok cebir konularında yoğunlaştığı dikkate alındığında; bu çalışmanın öğrencilerin dörtgenlerde alan gibi önemli ve zorlanılan bir geometri konusunu zihinsel yapılandırmalarını APOS teorisi çerçevesinde incelemesinin de alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Böylece bu çalışma, bir geometri konusunun öğrenilmesinin APOS teorisi çerçevesinde incelenmesi ile ilgili sınırlı olan literatürü genişletmesi ve APOS teorisinin geometri konularında da etkili bir şekilde kullanılabildiğini göstermesi bakımından önem arz edebilir. Ayrıca yapılan literatür taramasında dörtgenlerde alan konusunun öğrenilmesini APOS teorisi kapsamında ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Dolayısıyla bu çalışmanın, öğrencilerin dörtgenlerde alan konusundaki zihinsel yapılarını incelerken APOS teorisinin nasıl kullanılabileceğine yönelik bir örnek teşkil etmesi ve diğer araştırmacılara rehber olabilmesi açısından da önemli olduğu düşünülmektedir.

YÖNTEM

2.1. Araştırma Deseni

Bu çalışmada bir olgunun doğal çevresinde incelendiği, nasıl ve niçin sorularını temel alan (Yin, 2018), bir durumun, programın, eylemin, sürecin ya da bir veya birden fazla bireyin özelliklerinin derinlemesine incelendiği (Creswell, 2014) bir nitel araştırma yöntemi olan durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmada durum çalışması desenlerinden bütüncül tek durum desen temel alınmıştır. Bütüncül tek durum çalışmalarında tek bir analiz birimi vardır ve bu analiz birimi bir birey, bir sınıf, bir grup, bir okul, bir program ve benzeri olabilir (Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu tip çalışmalarda, benzer özellikte olan bir grup birim olarak kabul edilir ve benzer durumda meydana gelen farklılıklara odaklanarak durumun özellikleri detaylı şekilde açıklanır (Yin, 2018). Buradan hareketle, bu çalışmada 4 matematik öğretmenliği lisans öğrencisinin bulunduğu grup

analiz birimi olarak kabul edilmiş ve öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu zihinlerinde nasıl yapılandırdıkları incelenmiştir.

2.2. Katılımcılar

Çalışma pilot ve asıl çalışma olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Pilot çalışmanın katılımcılarını 2021-2022 eğitim-öğretim yılının güz döneminde bir devlet üniversitesinin Matematik Öğretmenliği lisans programının 1. sınıfında öğrenim gören 4 gönüllü öğrenci oluşturmaktadır. Asıl çalışmanın katılımcılarını ise 2021-2022 eğitim-öğretim yılının bahar döneminde aynı devlet üniversitesinin Matematik Öğretmenliği lisans programının 1. sınıfında öğrenim gören farklı 4 gönüllü öğrenci oluşturmaktadır. Öğrenciler uygun örnekleme ve ölçüt örnekleme yöntemleri kullanılarak belirlenmiştir (Büyüköztürk vd., 2024). Uygun örnekleme kapsamında, öğrencilerin araştırmacıların görev yaptığı üniversitede öğrenim görüyor olmalarına odaklanılmıştır. Ölçüt örnekleme kapsamında ise öğrencilerin akademik başarı olarak farklı düzeylerde olmalarına dikkat edilmiştir. Farklı akademik başarı düzeyinde öğrenciler seçilirken ise öğrencilerin derslerine girmekte olan 2. araştırmacının gözlem ve düşünceleri dikkate alınmıştır. Çalışma kapsamında öğrencilerin kimliklerini gizli tutmak amacıyla, öğrenciler Berna, Zeynep, Hale, Tarık şeklinde kodlanmış ve raporlamada bu kod isimler kullanılmıştır. Lisans öğrencilerinin tümü, gerek ilkokul gerek ortaokul gerekse lisede matematik ve geometri derslerinde dörtgenlerde alan konusunu görmüşlerdir.

2.3. Veri Toplama Araçları

Çalışma kapsamında öncelikle geçerlik ve güvenilirliği arttırmak amacıyla pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada öğrencilere boyut, ölçme, genel alan kavramı ve alan bulma stratejileri, üçgenlerde alan, genel dörtgenlerde alan ve özel dörtgenlerde alan konuları ile ilgili alt sorular içeren 20 tane soru sorulmuştur. Pilot çalışma kapsamında öğrencilere uygulanan sorular iki araştırmacı tarafından birlikte hazırlanmış ve matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesinin görüşleri alınarak yeniden düzenlenmiştir. Pilot çalışmadan elde edilen sonuçlara göre bu sorulardan biri benzer cevap gerektiren bir soru daha olması sebebiyle çıkarılmış ve diğerleri tekrar düzenlenmiştir. Böylece asıl çalışmada öğrencilere alt sorular içeren 19 soru (bkz. Ek-1) yöneltilmiştir. Bu sorular Ek-1’de verilmiştir. Soruların bir kısmı araştırmacılar tarafından hazırlanmış olup, bir kısmı da yapılan literatür taraması sonucunda ulaşılan kaynaklardan direkt alınmış veya esinlenilerek üzerlerinde değişiklik yapılmıştır. Sorular öğrencilerin dörtgenlerde alan konusu ve bu konu ile ilişkili olabileceği düşünülen her konuyu içerecek şekilde belirlenmiştir. Ayrıca soruların öğrencilerin dörtgenlerde alan konusuna yönelik zihinsel yapılarını ayrıntılı şekilde ortaya çıkarabileceği düşünülen sorular olmasına dikkat edilmiştir.

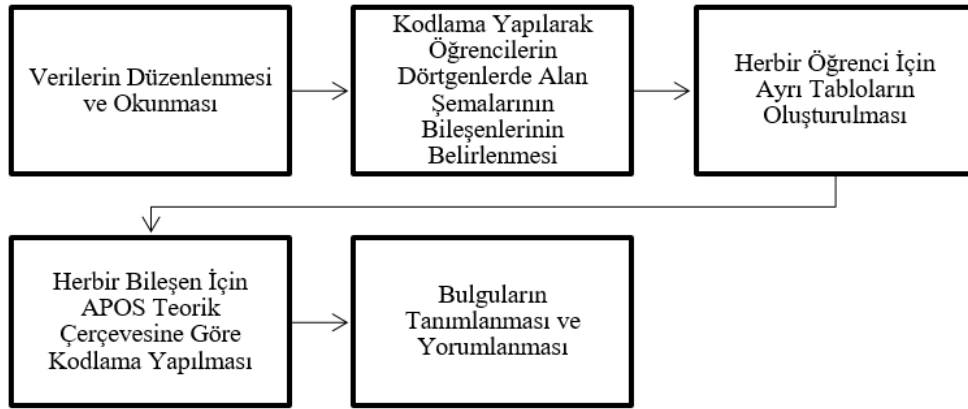
Soruların hazırlanma sürecinde, araştırmacılar bir araya gelmiş ve karşılıklı fikir alışverişini yaparak soruları birlikte tasarlamışlardır. Sorular hazırlandıktan sonra matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesinin görüşleri alınmış ve bu görüşler doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılarak sorulara son hali verilmiştir. Öğrencilere bu soruları cevaplamaları için herhangi bir süre kısıtlaması verilmemiştir. Öğrenciler soruları birbirleriyle etkileşimde bulunmadan, bireysel olarak ve kâğıt-kalem kullanarak çözmüşlerdir. Ayrıca, öğrencilerden soruları çözerken her bir adımı ayrıntılı olarak açıklamaları, fikirlerini gerekçelendirmeleri istenmiştir. Daha sonra öğrencilerle, sorulara vermiş oldukları yazılı cevaplar hakkında bireysel olarak klinik görüşmeler yapılmıştır. Klinik görüşmeler her bir öğrenci ile yaklaşık 45-60 dakika sürmüştür. Klinik görüşmeler video ile kayıt altına alınmış ve bu video kayıtları transkript edilerek veri olarak kullanılmıştır.

2.4. Veri Analizi

Çalışma kapsamında veriler APOS teorik çerçevesi bağlamında içerik analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir (Creswell, 2014). Veri analizi süreci Şekil 2’de belirtilmiştir.

Şekil 2

Veri Analizi Süreci



Şekil 2’den de görüleceği üzere, veri analizi süreci kapsamında öncelikle tüm veriler düzenlenmiş ve okunmuştur. Daha sonra her bir öğrencinin dörtgenlerde alan konusuna dair şemalarını belirlemek amacıyla kodlamalar yapılmıştır. Yapılan kodlamalar sayesinde öğrencilerin dörtgenlerde alan şemalarına dair “Boyut”, “Ölçme” ve “Alan” olmak üzere 3 ana bileşen ve bu ana bileşenlerin alt bileşenleri belirlenmiştir. Bu işlemin ardından her bir öğrenci için ayrı ayrı tablolar oluşturulmuştur. Oluşturulan tablolarda ana ve alt başlıklar olarak öğrencilerin dörtgenlerde alan konusuna dair şemalarının ana ve alt bileşenleri yer almıştır. Bu bileşenler ise 5 sütuna ayrılmıştır. Bu sütunlarda sırasıyla, söz konusu bileşene yönelik öğrenci söylemlerinin hangi sorularda yer aldığı; öğrencilerin bu sorulara yazılı olarak ve görüşme esnasında verdikleri cevaplar; yapılan kodlamalar ve bu kodlamalara ilişkin öğrencilerin zihinsel eylemlerinin, süreçlerinin, nesnelerinin, şemalarının kanıtları ile notlar bölümü bulunmaktadır. Örneğin Hale için oluşturulan tablonun “Boyut” ana bileşeni ile ilgili kısmı Şekil 3’te gösterilmiştir. Benzer tablolar “Ölçme” ve “Alan” ana bileşenleri için de hazırlanmıştır.

Şekil 3

Hale İçin Oluşturulan Tablonun “Boyut” Ana Bileşeni Kısmı

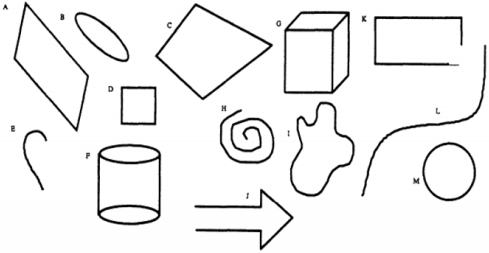
1)BOYUT				
SORU NO	SORU CEVABI	GÖRÜŞME TRANSKRİPTİ	KODLAMA VE KANITLAR	NOTLAR
1-A	Boyutu insan algısı ile eşleştiriyor ve bu sebeple 3 boyutlu sınırlandırıyor. 2 boyutlu cisimlerin eni ve boyu olduğunu söylüyor.	Araştırmacı: Bir şeklin 2 boyutlu olması eni ve boyu olması demek midir? Neden böyle düşündün? Hale: Evet uzunluk olunca sadece tek boyutlu. Bir de buna en eklersek yani uzunluk boy oluyor. Eni de... (duraksıyor.) Nasıl ifade edeceğimi bilemedim, tam şekillenmiyor kafamda. Yani uzunluğa bir tane de yükseklik eklediğimizde bunun 2 boyutlu olduğunu düşünüyorum. (Eliyle gösteriyor) Araştırmacı: Bir üçüncüyü de eklersek ne olur peki? Hale: O zaman 3 boyutlu olur. Yani bileşen sayısıyla doğru orantılı.	BOYUT KAVRAMI (GELİŞEN SÜREÇ) Hale’den boyut kavramını açıklaması istendiğinde, aşağıda belirtilen bilgilerini açıklamasına yansıtamadığı görülüyor. Hale boyut kavramını açıklarken boyutun anlamından ziyade bildiği, algılayabildiği cisimlerin boyut sayısına odaklanıyor. Bu durum Hale’nin boyut ile ilgili sahip olduğu bilgileri aslında içselleştirmede olduğunu ve hala dışsal uyarıcılara bağlı olduğunu gösteriyor. Örneğin, Hale cevaplarında tek boyutun sadece uzunluk, iki boyutun en ve boy, üç boyutun en, boy, yükseklik bileşenlerinden oluştuğunu yani bu durumun bileşen sayısı ile doğru orantılı olduğunu belirtmişti. Eğer bunu içselleştirseydi, bileşen sayısı arttıkça boyutun değişeceğini ve 3 boyutla sınırlı kalmayacağını ifade etmesi gerekirdi.	Hale kendisine 2. Soruda verilen şekillerden 2 boyutlu ve 3 boyutlu şekillere örnekler seçerken, şekillerin içlerinin dolu olması gerektiğini belirtmemiş.
2-A 2-B	E, K, H, L, J bu tek boyutlu olduğunu ve bu sebeple alanının ölçülemediğini söylüyor. G ve F şekillerinin 3 boyutlu olduğunu, bu şekillerin açılımı yapıldığında yüzeylerinin 2 boyutlu olduğunu söylüyor, diğer şekillerin de 2 boyutlu olup alanları olduğunu belirtmiş.	Araştırmacı: E, H, J, K, L şekillerinin neden tek boyutlu olduğunu düşünüyorsun? Hale: Çünkü bence 2 boyutlu olması için kapalılık söz konusu olması gerekiyor. Ama bunlarda direkt çizgi var. Yani sadece çizgi var. Kapalılık söz konusu değil. O yüzden tek boyutlu olduğunu düşünüyorum. Uzunlukları var yani sadece. ... Araştırmacı: Peki F ve G’nin neden 3 boyutlu olduğunu düşünüyorsun? Hale: Çünkü bir eni var, bir boyu var, bir de yüksekliği var. Yani koordinat düzleminde gösterirsek x, y ve z. Z (duraksıyor) tam anlatamadım da (kafasını kaşıyor). Orada bir yer kaplıyor. O yüzden 3 boyutlu olduğunu düşünüyorum. ... Araştırmacı: Soruyu anlamadığını yazmışsın. Neden anlamadın? Hale: İçeren derken ne demek istediniz? Araştırmacı: Yani hangi şekillerin alanlarından, hangi şekillerin uzunluklarından bahsedebiliriz? Hale: Bu soruyu yaparmışım aslında. Mesela söylediğim tek boyutlu şekillerin (E K H L J) uzunluklarının varlığından bahsedebiliriz. Bunların alanı yoktur. Araştırmacı: Peki diğer şekillerin hepsinin alanı var mı? Hale: Hepsinin var bence. Araştırmacı: Neden böyle düşünüyorsun? Hale: Çünkü 2 boyutlu şekillerin alanı vardır ve bunlar da 2 boyutlu F ve G hariç 2 boyutlu. En az 2 boyutlu şekillerin alanı vardır. F ve G de 3 boyutlu olduğu için en az 2 boyutlu olma şartını onlar da sağlıyor. Bu yüzden onların alanları var. ... Araştırmacı: Tek boyutlu olarak belirttiklerinin haricindekilerin uzunluğu var mı yok mu? Hale: Kenar uzunlukları vardır sadece. Bir kapalılık oluşturuyor ya, o kapalılığı oluşturan kenarlar, Yani kenarlarında siyahla gözükten çizgiler.	BOYUTSUZ, 1, 2 VE 3 BOYUTLU ŞEKİLLER VE ÖZELLİKLERİ (GELİŞEN SÜREÇ) Hale’nin cevaplarından 1 boyutlu, 2 boyutlu ve 3 boyutlu şekillerin en, boy, yükseklik boyutlarından hangilerine sahip olduğunu; şekillerin neden 1, 2 ve 3 boyutlu olduklarını ve bu şekiller ile ilgili hangi ölçme işlemlerinin yapılabileceğini bildiği görülüyor. Ayrıca, en önemlisi kendisine verilen pek çok farklı şekil arasında bu şekillere doğru örnekler seçebildiği görülüyor. Bu durum Hale’nin bir, iki ve üç boyutlu şekilleri içselleştirdiğini, dışsal uyarıcılara bağlı kalmadan 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerin boyutuna karar verebildiğini gösteriyor. Ama Hale iki boyutlu şekillerin kapalı olduğunu ifade edip, içlerinin dolu olması gerektiğinden hiç bahsetmemiş. Yani şekilde açıklık yoksa bu şekilleri kapalı olarak algılıyor ve alanı olduğunu düşünüyor, içlerinin dolu olması gerektiğini dikkate almıyor. Bu durum aslında Hale’nin 2 boyutu tam olarak kavrayamadığını gösteriyor.	Konusurken çok tedirgin, kendinden emin cevaplar veremiyor, çok duraksıyor.
2-C 2-D	Tek boyutlu cisimlerin sadece uzunluğunun ölçülebildiğini, alan ölçmek için ise cismin en az 2 boyutlu yani 2 veya 3 boyutlu olabileceğini söylüyor. K ve J deki gibi şekilde açıklık varsa bu tip şekillerin sadece uzunluğa sahip tek boyutlu şekiller olduğunu ve alan ölçülemeyeceğini belirtiyor.			

Şekil 3'teki tabloda, Hale'nin dörtgenlerde alan konusuna dair şemasının ilk ana bileşeninin "Boyut" olduğunu görülmektedir. Bu bileşene ait ilk sütunda öğrencinin 1. sorunun A ve 2. sorunun A, B, C, D şıklarında bu bileşen ile ilgili söylemleri olduğu belirtilmektedir. 2. ve 3. sütunda öğrencinin belirtilen sorulara yazılı olarak ve görüşme esnasında verdikleri cevaplar yer almaktadır. 4. sütuna bakıldığında, öğrencinin vermiş olduğu cevapların incelenmesi ve bütünleştirilmesi ile "Boyut Kavramı" ve "Boyutsuz, 1, 2 ve 3 Boyutlu Şekiller ve Özellikleri" olmak üzere 2 alt bileşen belirlendiği ve öğrencinin bu iki alt bileşen kapsamında APOS teorisinin "Gelişen Süreç" düzeyinde olduğu görülmektedir. Son sütunda yer alan notlar kısmında ise öğrencinin mimik ve hareketleri ile cevaplarındaki önemli durumlar not edilmiştir. Tablonun devamında yer alan diğer ana ve alt bileşenler için de aynı yaklaşım izlenmiştir. Benzer tablolar diğer öğrenciler için de yapılmıştır.

Öğrencilerin ana bileşenlere ait alt bileşenleri APOS teorisi çerçevesinde nasıl yapılandırdıklarını belirlerken öğrencilere sorulan 19 soru için ayrıca bir tablo oluşturulmuştur. Bu tabloda 2 sütun yer almaktadır. İlk sütunda öğrencilere yöneltilen soru, ikinci sütunda da öğrencilerin soruya yönelik olası cevapları ve bu cevapların belirttiği APOS seviyeleri bulunmaktadır. Örneğin, hazırlanan tablonun 2. soru için olan kısmı Şekil 4'te verilmiştir. Şekil 4'te görüldüğü üzere, tabloda öğrencilerin 2. soruya verebilecekleri cevaplar tahmin edilmiş ve bu olası cevaplar APOS teorik çerçevesine göre yorumlanmıştır.

Şekil 4

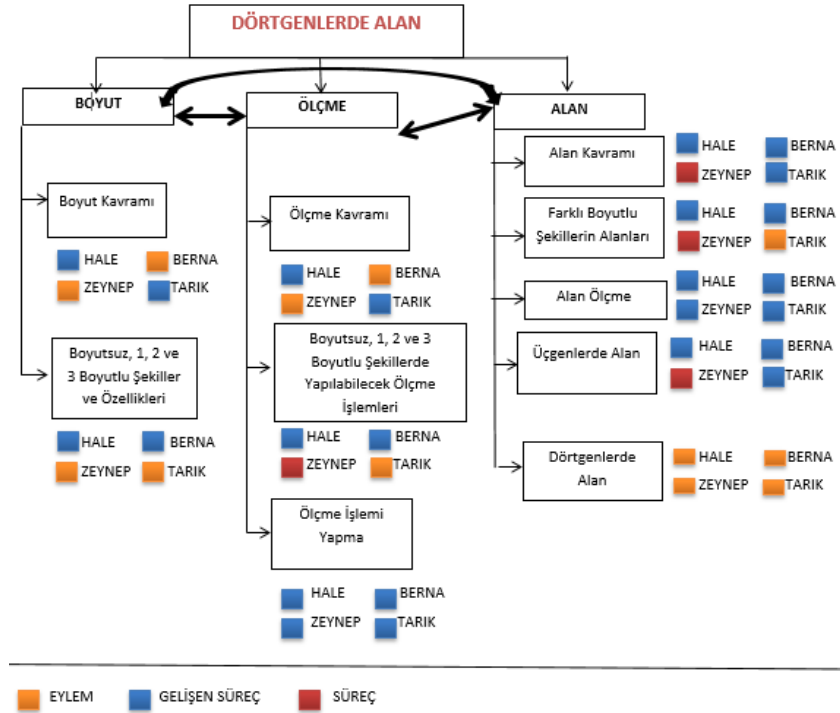
Öğrencilerin Olası Cevaplarının Belirttiği APOS Seviyelerini Gösteren Tablo

SORULAR	OLASI CEVAPLARIN BELİRTTİĞİ APOS SEVİYESİ
1)...	...
2)  a. Yukarıdaki şekillerden sırasıyla uzunluğu ve alanı içeren şekilleri belirtir misin? b. Neden bu şekli seçtin/seçmedin? c. Bir alan bulmak için şekillerin her birinin hangi kısmını ölçersin? d. Bir alanı göstermesi için Şekil J'ye ne yapabilirsin? (Batturo ve Nason, 1996)	a-b. Öğretmen adayı uzunluğu, çevreyi ve alanı içeren şekilleri belirtebilir ama cevaplarının nedenini açıklayamazsa (Eylem Aşaması) - Öğretmen adayı uzunluğu, çevreyi ve alanı içeren şekilleri belirtebilir ve cevaplarının nedenini tutarlı bir şekilde açıklayabilirse (Örneğin, uzunluk, çevre, alan ve hacim tanımlarına ve bu tanımları sağlayan şartlara odaklanarak) (Süreç Aşaması) - Bir önceki olası cevaba ilaveten öğretmen adayı uzunluk ve alan ölçmek için şekillerde nasıl bir değişiklik yapılması gerektiğini dinamik olarak düşünür ve nedenleri ile birlikte açıklarsa (Nesne Aşaması) c. Öğretmen adayı "A, B, C, D, M, t'nin içini ölçerim" gibi bir ifade kullanıp fakat bunun nedenlerini açıklamazsa (Eylem Aşaması) - Öğretmen adayı her bir şekli değerlendirip, hangi şekillerde alan ölçemeyeceğini ve alan ölçebileceği şekillerde şekillerin hangi kısmını ölçeceğini nedenleri ile birlikte açıklarsa (Süreç Aşaması) - Öğretmen adayı bir önceki olası cevaba ilave olarak alan ölçülemeyecek şekillerde nasıl bir değişiklik yapıldığında alan ölçülebileceğini ve bu değişiklik yapılsa alanın nasıl ölçülebileceğini dinamik olarak düşünüp nedenleri ile birlikte açıklarsa (Nesne Aşaması) d. Öğretmen adayı "sol taraftaki iki paralel okun ucu bir doğru parçası ile birleştirilmelidir. Çünkü alan iki boyutlu kapalı şekillerin iç bölgesi demektir. Tersten düşünersek demek ki alan ölçmek için şeklin hem iki boyutlu hem de kapalı olması gerekir. O yüzden bu şekli kapatmak için böyle bir işlem mantıklı olur böylece orada bir iç bölge oluşur" gibi bir ifade ile dinamik düşünerek Şekil J'de alan ölçmek için nasıl bir değişim yapılması gerektiğini nedenleri ile birlikte açıklarsa (Süreç Aşaması)

Şekil 3'te verilen tablonun hem diğer ana ve alt bileşenler hem de diğer öğrenciler için tamamlanmasının ardından, her bir öğrenciye ait tablolar birbiri ile karşılaştırılmış, benzerlik ve farklılıklar belirlenmiştir. Böylece öğrencilerin dörtgenlerde alan konusuna dair şemalarında hangi bileşenlerin olabileceği, bu bileşenleri zihinlerinde nasıl yapılandırabilecekleri, bu yapılandırma kapsamında gerçekleştirebilecekleri olası davranışlar saptanmıştır. Veri analizi iki araştırmacı tarafından birlikte gerçekleştirilmiştir. Analizler iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı gerçekleştirilmediği için herhangi bir uyum yüzdesi belirlenmemiştir. Analizler gerçekleştirilirken fikir ayrılıklarının olduğu durumlarda, iki araştırmacı birlikte ilgili soru için öğrenci cevaplarını APOS teorisini dikkate alarak tekrar incelemiş ve tartışarak fikir birliğine varmışlardır (Miles & Huberman, 1994). İlk analizin ardından yaklaşık 6 aylık bir süre içerisinde geçerlik ve güvenilirliği arttırmak için iki kere daha analizlerin üzerinden geçilmiştir. Böylece nihai bulgular tanımlanmış ve yorumlanmıştır (bkz. Şekil 5).

Şekil 5

Bulguların Genel Gösterimi



2.5. Etik Hususlar

Bu araştırma, etik ve yasal gerekliliklere uygun bir şekilde yürütülmüştür. Bu kapsamda ilk adım olarak, Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulu'ndan pilot çalışma (Karar No: 2021/12) ve asıl çalışma (Karar No: 2022/7) için etik onay alınmıştır. Ardından, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi'nden hem pilot çalışma hem de asıl çalışma için araştırma izni temin edilmiştir.

BULGULAR

Bu bölümde, APOS teorik çerçevesi ışığında matematik eğitimi lisans öğrencilerinin dörtgenlerde alan konusunu zihinlerinde nasıl yapılandıkları “Boyut”, “Ölçme” ve “Alan” olmak üzere üç ana başlıkta sunulacaktır.

3.1. Boyut

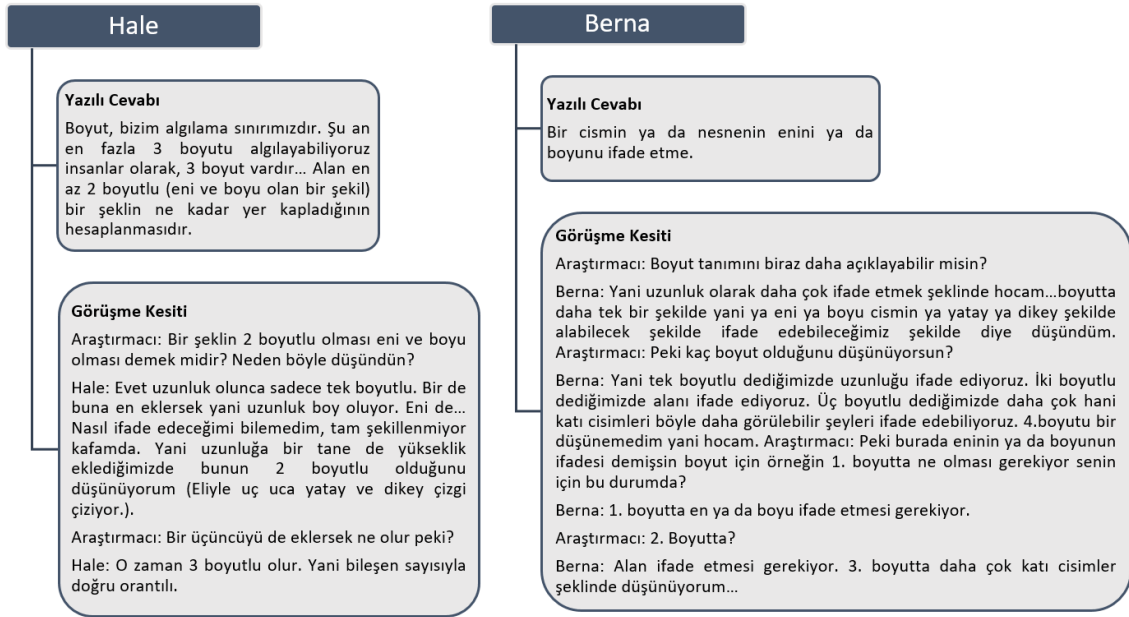
Tüm öğrencilerin dörtgenlerde alan şemalarının ilk bileşeni “boyut” kavramı temelinde incelenmiştir. Yapılan analizler bu bileşenin *boyut kavramı* ve *boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekiller ve özellikleri* olmak üzere iki alt bileşenden ve bunların etkileşiminden oluştuğunu göstermektedir.

3.1.1. Boyut Kavramı

Bu alt bileşen kapsamında Berna ve Zeynep’in “eylem” düzeyinde, Hale ve Tarık’ın ise “gelişen süreç” düzeyinde oldukları ortaya çıkmıştır. Hale ve Berna’nın “Boyut, ölçme ve alan kavramlarını tanımlar mısın?” sorusuna yazılı cevapları ve görüşme esnasında verdikleri cevaplar Şekil 6’da verilmiştir.

Şekil 6

Hale ve Berna'nın Boyut Tanımı ile İlgili Cevapları



Şekil 6’da Hale’nin boyutun tanımına ve nasıl belirlendiğine yönelik genel bir algısı olduğu dikkat çekmektedir. Ayrıca Hale’nin 2 boyutun en ve boydan oluştuğunu ifade ederken eliyle göstermesi de boyutu kısmen de olsa zihninde canlandırabildiğini göstermektedir. Fakat Hale’nin 3 ten fazla boyutlar ile ilgili benzer bir farkındalık geliştiremediği görülmüştür. Tarık’ın cevabının da Hale ile çok benzer olduğu belirlenmiştir. Tarık boyut kavramını tanımlarken el hareketiyle göstermese de boyut kavramının en, boy ve yüksekliğin uzaydaki uzanımı olduğuna vurgu yapmıştır. Buradan hareketle Hale ve Tarık’ın boyut kavramına ilişkin genel bir algılarının olduğu ama bu algılarının 3 boyutla sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmış olup, bu katılımcıların “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları belirlenmiştir.

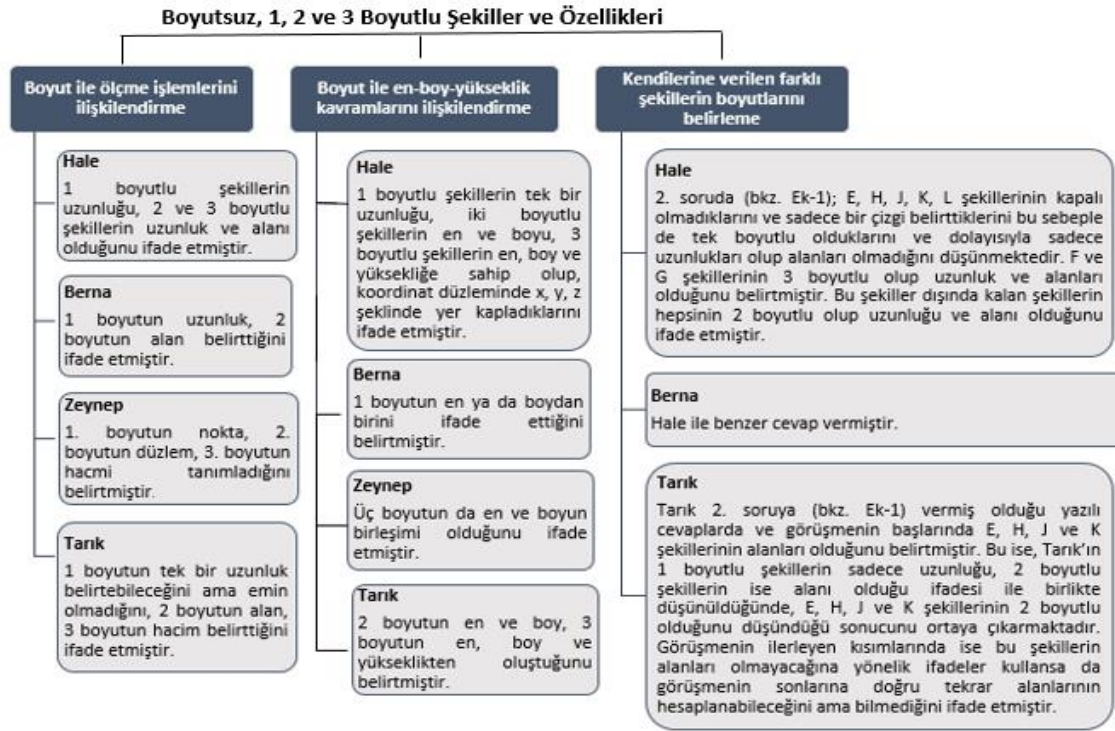
Şekil 6’da, Berna’nın boyutu bir varlığın eni ya da boyundan birini ifade etme şeklinde tanımlayıp 1, 2 veya 3 boyut için bir ayrım yapmadığı dikkat çekmektedir. Ayrıca Berna’nın 3 boyutu önceden karşılaştığı katı cisimler ile eşleştirdiği, diğer bir deyişle tanım yaparken dışsal uyarıcıları dikkate aldığı ve boyut algısının 3 boyutla sınırlı kaldığı görülmektedir. Zeynep de Berna’ya benzer cevap vermiştir. Berna ve Zeynep’in cevapları incelendiğinde, iki öğrencinin de boyut kavramını açıklayan yeterli bir tanım ortaya koyamadıkları, farklı boyutlar arasındaki ayrımların tam olarak farkında olmadıkları, boyut algılarının 3 boyutla sınırlı olduğu ve dolayısıyla “**eylem**” düzeyinde kaldıkları belirlenmiştir.

3.1.2. Boyutsuz, 1, 2 ve 3 Boyutlu Şekiller ve Özellikleri

Bu alt bileşen kapsamında, Zeynep ve Tarık’ın “eylem” düzeyinde oldukları görülürken, Hale ve Berna’nın “gelişen süreç” düzeyinde oldukları görülmüştür. Öğrencilerin boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekiller ve özellikleri ile ilgili sorulara verdikleri yazılı cevaplardan ve görüşmelerdeki söylemlerinden çıkarılan sonuçlar Şekil 7’de verilmiştir.

Şekil 7

Öğrencilerin Boyutsuz, 1, 2 ve 3 Boyutlu Şekiller ve Özellikleri ile İlgili Söylemleri



Şekil 7’de Zeynep’in 1. boyutun noktayı tanımladığı ve üç boyutun en ile boyun birleşiminden oluştuğu gibi yanlış bir algıya sahip olduğu dikkat çekmektedir. Zeynep’in boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekiller ve özellikleri ile ilgili başka bir açıklama yapmadığı görülmektedir. Zeynep’in kâğıttaki cevaplarında ve yapılan görüşmede sunduğu kanıtlardan yola çıkılarak “**eylem**” düzeyinde kaldığı belirlenmiştir. Tarık’ın cevaplarına bakıldığında, farklı boyutlu şekillerde gerçekleştirilebilecek ölçme işlemlerine ve 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerin özelliklerine yönelik doğru bilgilere sahip olduğu görülmektedir. Fakat kendisine verilen farklı şekiller arasından 1 ve 2 boyutlu şekilleri belirlerken zorluk yaşadığı ve söylediklerinin çeliştiği dikkat çekmiştir. Bu durum Tarık’ın 1, 2 ve 3 boyutlu şekiller ve özellikleri ile ilgili bilgilerinin ezber olduğunu, söylediklerini içselleştiremediğini ve “**eylem**” düzeyinde kaldığını göstermektedir.

Hale’nin cevapları incelendiğinde; 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerin en, boy, yükseklik boyutlarından hangilerine sahip olduğunu, şekillerin neden 1, 2 ve 3 boyutlu olduklarını ve bu şekillerde hangi ölçme işlemlerinin yapılabileceğini ifade ettiği görülmektedir. Hale’nin kendisine verilen pek çok farklı şekil arasından 1, 2 ve 3 boyutlu şekillere doğru örnekler seçebildiği dikkat çekmektedir. Hale açıklığı olmayan şekillerin 2 boyutlu olduğunu ve alana sahip olduğunu belirtmiştir. Bu ise 2 boyutlu şekilleri belirlerken şeklin düzlemsel olup olmadığını dikkate almadığını göstermektedir. Şekil 7’de Berna’nın da Hale ile benzer cevaplar verdiği dikkat çekmektedir. Böylece, Hale ve Berna’nın 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerin özelliklerinin çoğunu içselleştirdikleri, dışsal uyarıcılara bağlı kalmadan pek çok şeklin boyutunu belirleyebildikleri fakat 2 boyutlu şekillerin düzlemsel olması gerektiğini dikkate almadıkları belirlenmiştir. Buradan hareketle bu iki öğrencinin boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekiller ve özellikleri ile ilgili “süreç” düzeyinde olduklarına yönelik kanıtlar sunmalarına rağmen, zorluk yaşadıkları yerlerin de var olduğu yani “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları belirlenmiştir.

3.2. Ölçme

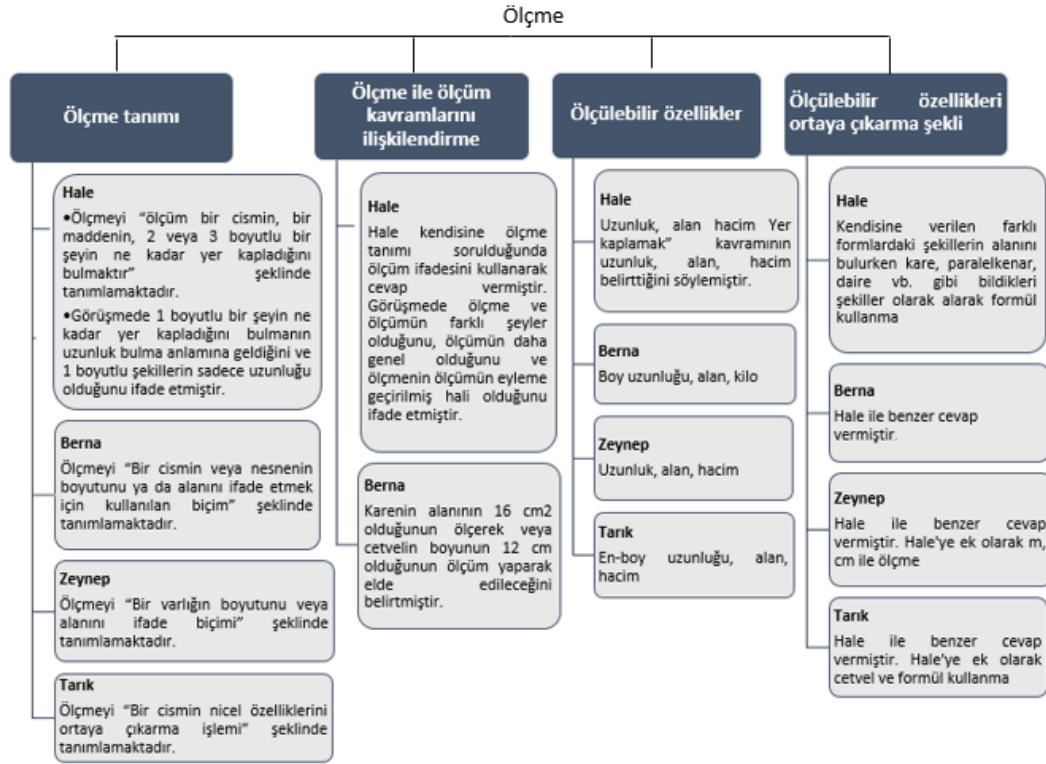
Tüm öğrencilerin dörtgenlerde alan şemalarının ikinci bileşeni “ölçme” kavramı temelinde ele alınmıştır. Yapılan analizler bu bileşenin ölçme kavramı, boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerde yapılabilecek ölçme işlemleri ve ölçme işlemi yapma olmak üzere üç alt bileşenden ve bunların birbiri ile etkileşiminden oluştuğunu göstermektedir.

3.2.1. Ölçme Kavramı

Bu alt bileşene yönelik Berna ve Zeynep’in “eylem” düzeyinde, Hale ve Tarık’ın ise “gelişen süreç” düzeyinde oldukları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin ölçme kavramı ile ilgili sorulara hem kâğıttaki cevaplarından hem de görüşmelerde söylediklerinden çıkarılan sonuçlar Şekil 8’de özetlenmiştir.

Şekil 8

Öğrencilerin Ölçme Kavramına İlişkin Söylemleri



Şekil 8’de Hale ve Tarık’ın, Berna ve Zeynep’e göre daha bütüncül bir bakış açısı kullanarak ölçme tanımı yapabildikleri; Berna ve Zeynep’in ölçme tanımlarının ise birbirine benzer olup, sadece uzunluk ve alan bulma kavramları ile sınırlı olduğu göze çarpmaktadır. Hale’nin ve Berna’nın ölçme ve ölçüm kavramlarını birbiri yerine kullanabildiği ve özellikle Hale’nin bu iki kavramı birbirine karıştırdığı görülmektedir. Şekil 8’de dikkat çeken başka bir unsur da tüm öğrencilerin farklı şekillerin alanlarını bulmak için şekilleri sadece görsellerine odaklanarak bildikleri şekillere benzettikleri ve formül kullandıklarıdır. Şekil 8’de Hale ve Berna’nın ölçmeyi açıklarken ölçü birimi veya ölçme aracı kavramları ile bir ilişki kurmadığı görülmektedir. Zeynep ise ölçme, alan ve boyut kavramlarını ilişkilendirmesi istendiğinde şu ifadeleri kullanmıştır:

Araştırmacı: Bu kavramlar arasındaki ilişkiyi biraz daha ayrıntılandırır mısın?

Zeynep: Bunların hepsi birbiriyle bağlantılı. Yan ilişkili. Neden ilişkili? Şöyle mesela ölçüm yapamazsak alanı bulamazdık. Alanı bulamazsak boyutunu bulamazdık. Bu yüzden ilişkilidir. Ölçme dediğimiz şey belli bir cm veya m ile ölçülebilir. Alan bu cm ve metrenin karesidir...

Burada Zeynep'in ölçmenin m veya cm ile ölçülebileceğini belirtmesi ölçü birimi ve ölçme aracı kavramlarını içselleştiremediğini göstermektedir. Zeynep'in ölçü birimlerini ölçme aracıymış gibi ifade ettiği ve ölçmeyi sadece m ve cm gibi yaygın kullanılan birimlerle ilişkilendirdiği dikkat çekmektedir. Tarık da benzer şekilde uzunluk ölçmek için cetvelin kullanılabileceğini, alan ölçmek için ise cetvel ile uzunluklar bulunduktan sonra formül kullanılabileceğini ifade etmiştir.

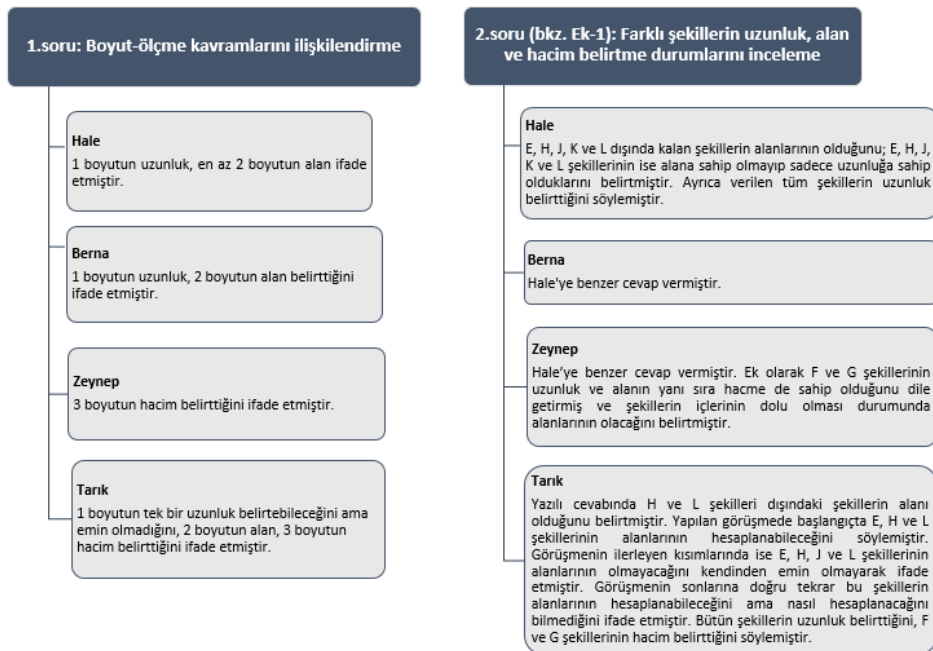
Öğrencilerin cevapları incelendiğinde, Hale ve Tarık'ın ölçme tanımlarının Berna ve Zeynep'e göre daha kapsamlı olduğu dikkat çekmektedir. Berna ve Zeynep'in ise daha çok bildikleri kısıtlı bilgiler veya örneklerle dayanarak açıklama yapmaya çalıştığı yani dışsal uyarıcıları dikkate aldıkları belirlenmiştir. İki öğrencinin ölçme ve ölçüm kavramları arasındaki ayrımın tam olarak bilincinde olmadığı saptanmıştır. Ölçme yapmak için kullanılabilecek farklı ölçü birimlerine ve ölçme araçlarına yönelik iki öğrencinin yorum yapmadığı (Hale ve Berna), diğer iki öğrencinin ise sadece sıklıkla kullanılan örnekler üzerinden açıklama yapmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Verilen bilgiler ışığında Berna ve Zeynep'in ölçme kavramı ile ilgili “**eylem**” düzeyinde kaldıkları, Hale ve Tarık'ın ise ölçme kavramına yönelik hem genel bir algılarının hem de eksikliklerinin olduğu yani “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları ortaya çıkmıştır.

3.2.2. Boyutsuz, 1, 2 ve 3 Boyutlu Şekillerde Yapılabilecek Ölçme İşlemleri

Bu alt bileşen kapsamında Tarık'ın “eylem” düzeyinde olduğu, Hale ve Berna'nın “gelişen süreç” düzeyinde oldukları, Zeynep'in ise “süreç” düzeyinde olduğu görülmüştür. Öğrencilerin bu bileşen ile ilgili sorulara hem kâğıttaki cevaplarından hem de görüşmelerdeki söylemlerinden yola çıkılarak ulaşılan sonuçlar Şekil 9'da özetlenmiştir.

Şekil 9

Öğrencilerin Boyutsuz, 1, 2 ve 3 Boyutlu Şekillerde Yapılabilecek Ölçme İşlemlerine İlişkin Söylemleri



Şekil 9’da Berna, Zeynep ve Hale’nin benzer cevaplar verdiği dikkat çekmektedir. Zeynep’in Berna ve Hale’ye ek olarak, 3 boyutun hacim belirttiğini ve F ile G şekillerinin uzunluk ve alanın yanı sıra hacme de sahip olduğunu dile getirdiği görülmektedir. Şekil 8’de dikkat çeken diğer bir unsur da Zeynep’in diğer öğrencilerden farklı olarak şekillerin içlerinin dolu olması durumunda alanları olacağını belirttiğidir. Bu üç öğrencinin cevapları incelendiğinde, kendilerine verilen pek çok farklı şekilden hangilerinde uzunluk, hangilerinde alan, hangilerinde hacim ölçülebileceğini dışsal uyarıcılara bağlı kalmadan açıklayabildikleri görülmektedir. Fakat Berna ve Hale’nin alana sahip şekilleri belirlerken şekillerin düzlemsel bir bölge belirtip belirtmediğini dikkate almadıkları göze çarpmaktadır. Zeynep ise Berna ve Hale’den farklı olarak şekillerin içlerinin dolu olması durumunda alanlarından bahsedilebileceğini belirterek konu ile ilgili tam bir farkındalık geliştirdiğini göstermiştir. Buradan hareketle Zeynep’ in boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerde yapılabilecek ölçme işlemleri konusunda “**süreç**” düzeyinde olduğu, Berna ve Hale’nin ise “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları ortaya çıkmıştır.

Şekil 9’da görüldüğü gibi, Tarık, Hale ve Berna ile benzer şekilde 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerde hangi ölçme işlemlerinin yapılabileceğini ifade etmiştir. Burada Tarık’ın 1 boyut için net bir bilgiye sahip olmadığı dikkat çekmektedir. Ayrıca Tarık diğer öğrenciler gibi 2. soruda kendisine verilen tüm şekillerin uzunluğu olduğunu, Zeynep gibi F ve G şekillerinin uzunluğa ek olarak hacme de sahip olduğunu dile getirmiştir. Fakat Tarık’ın cevapları incelendiğinde 2. soru için vermiş olduğu cevapların birbiri ile sürekli çeliştiği ve sorulan sorulara net cevaplar veremediği dikkat çekmektedir. Bu durum Tarık’ın boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerde yapılabilecek ölçme işlemleri ile ilgili söylediklerinin ezber bilgi olduğunu ve “**eylem**” düzeyinde kaldığını kanıtlar niteliktedir.

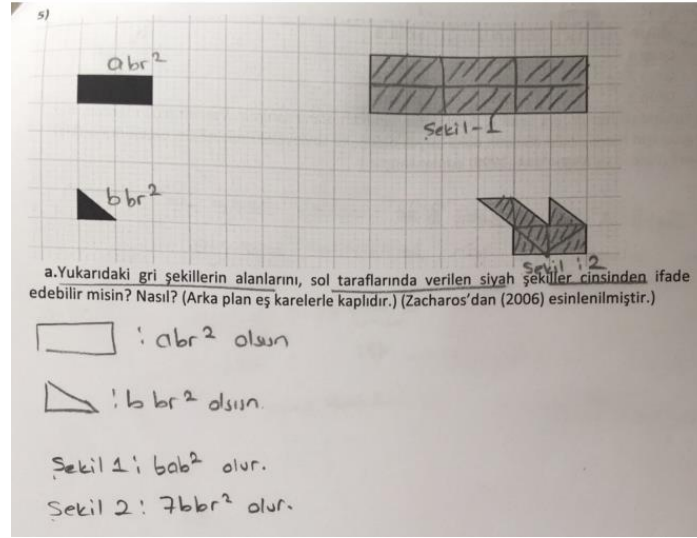
3.2.3. Ölçme İşlemi Yapma

Tüm öğrencilerin bu alt bileşen kapsamında “gelişen süreç” düzeyinde oldukları görülmüştür. Tüm öğrencilerin 2. soruda (bkz. Ek-1) kendilerine verilen şekillerin alanlarını bulmaları istendiğinde, belirtilmemesine rağmen şekillerin görsellerine odaklanarak verilen şekilleri kare, paralelkenar, daire, deltoid gibi şekillere benzeterek formül kullanımına yöneldikleri dikkat çekmiştir. Bu durum öğrencilerin ölçme işlemi yaparken dışsal uyarıcıları dikkate alma eğiliminde olduklarını göstermektedir.

3. soruda (bkz. Ek-1) öğrencilere herhangi bir bilgi verilmeyen 2 farklı şeklin alanını nasıl kıyaslayabilecekleri sorulduğunda, Hale, Berna ve Tarık’ın için sayısal veriye ihtiyaç duydukları ortaya çıkmıştır. Zeynep ise kıyaslama yapabilmek için 2 şekli eşit boyutta taşlarla kaplama yoluna gitmiştir. 4. soruda (bkz. Ek-1) öğrencilere düzgün olmayan bir şekil verilip bu şeklin alanını nasıl bulabilecekleri sorulduğunda ise, Hale ve Berna bu şeklin alanını bulabilmek için herhangi bir strateji geliştiremezken; Tarık ezbere bir şekilde alanın integral kullanılarak bulunabileceğini ifade etmiş ama nasıl bulunabileceğini açıklayamamıştır. Yine diğer öğrencilerden farklı olarak Zeynep, şekli birim karelerle kaplarsa alanı yaklaşık olarak bulabileceğini ifade etmiştir. Burada Zeynep dışındaki üç öğrencinin ölçme işlemi gerçekleştirmek için alternatif stratejiler geliştirme konusunda yeterli olmadıkları dikkat çekmektedir. 5. sorunun a şıkkı ve Berna’nın bu soruya vermiş olduğu cevap Şekil 10’da görülmektedir.

Şekil 10

5. Sorunun A Şıkkı ve Berna'nın Bu Soruya Cevabı



Şekil 10'da Berna'nın gri şekillerin alanlarını siyah şekiller cinsinden ifade edebilmek için çizim yaptığı görülmektedir. Zeynep de bu soruya benzer şekilde cevap vermiştir. Fakat kendileri ile yapılan görüşmelerde çizim yapmadan karar verip veremeyecekleri sorulduğunda, nasıl karar verebileceklerini pratik bir şekilde açıklayabildikleri, sadece araştırmacıya göstermek için çizim yapmayı tercih ettikleri ortaya çıkmıştır. Tarık aynı soruya vermiş olduğu yazılı cevapta gri şekillerin alanlarını siyah şekillerin ikisi cinsinden de ifade etmiş fakat herhangi bir açıklama yapmamıştır. Bunun üzerine kendisi ile gerçekleştirilen görüşmede ise Berna ve Zeynep gibi tek tek adımları takip etmeden, pratik bir şekilde gri şekillerin alanlarını siyah şekiller cinsinden ifade edebilmiştir. İlgili görüşme kesitti şöyledir:

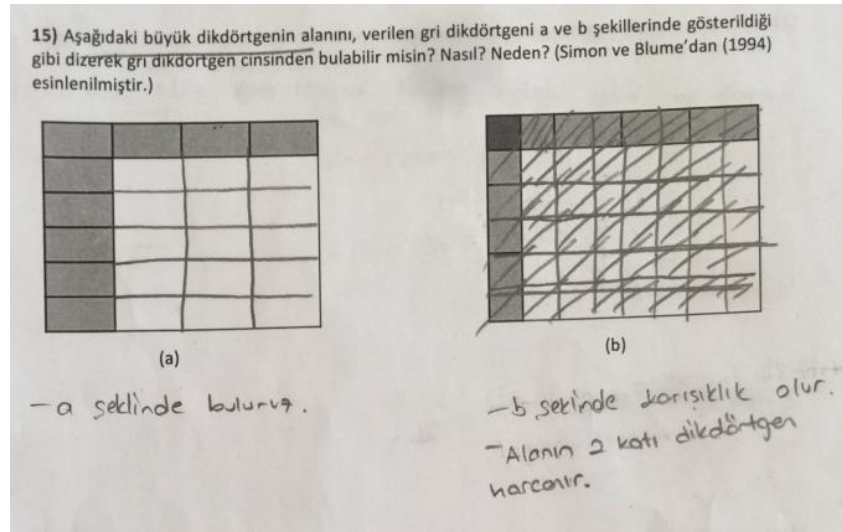
Araştırmacı: Gereçlerini açıklayabilir misin?

Tarık: Tabi. Şimdi 1.sinde bir dikdörtgen var 4 karelik bir yer kaplıyor. 2.sinde siyahlara odaklandım. Şurada bir alanlık karenin yarısı verilmiş. Bunu alıp göz hizasıyla yapıştırdığım zaman siyah dikdörtgen açısından kareleri kullanırım. O yüzden 1 kare 2 kare 3 kare 3 dikdörtgen pardon aynı şekilde altta da katlarsam altıda dikdörtgendeki alanı bulurum. Üçgen açısından şey yaparsam bunun $\frac{1}{4}$ ü olduğu için zaten bir kareye 2 siyah üçgen geliyor. Burada 6 kare olduğu için 12. Her biri yarısı olduğu için 2 ile çarpırım 24 siyah üçgen açısından öyle bulunur diye hesapladım...

6. soruda (bkz. Ek-1) öğrencilere herhangi bir bilgi verilmeyen farklı ölçü birimleri cinsinden ifade edilen ölçümlerin kıyaslanıp kıyaslanamayacağı ve kıyaslanabiliyorsa nasıl kıyaslanabileceği sorulduğunda tüm öğrenciler ölçü birimleri hakkında bilgi sahibi olunmadığı için kıyaslama yapılamayacağını ifade etmişlerdir. Burada yine öğrencilerin farklı ölçü birimleri cinsinden verilen ölçüm sonuçlarını kıyaslamak için farklı stratejiler üretemedikleri dikkat çekmektedir. 15. soruya bakıldığında ise Berna, Hale ve Tarık'ın çözümlerini çizerek gösterdiği görülmektedir. Bu soru ve Berna'nın bu soruya cevabı Şekil 11'de verilmiştir.

Şekil 11

15. Soru ve Berna'nın Bu Soruya Cevabı



15. soruda yer alan ilk şekil için hem bu üç öğrenci hem de Zeynep, 5. soruda olduğu gibi çizmeden de soruyu çözebileceklerini benzer şekilde açıklamışlardır. Bu ise tüm öğrencilerin bir şeklin alanını adımları tek tek takip etmeden başka bir şekil cinsinden ifade etmekte zorlanmadıklarını göstermektedir. 15. soruda verilen ikinci şekil için ise tüm öğrencilerin üst üste binmeden kaynaklı koyu gösterilen kısmı ayrı bir şekil olarak ele aldıkları ve sadece görseline odaklanarak bu şeklin kare olduğunu düşündükleri ortaya çıkmıştır.

Öğrencilerin cevaplarının tümü birlikte değerlendirildiğinde, tüm öğrencilerin soruları çözerken verilen şekilleri belirtilmemesine rağmen bildikleri şekillere benzetmeye çalıştıkları yani dışsal uyarıcıları dikkate aldıkları göze çarpmıştır. Zeynep dışındaki öğrencilerin sayısal veri verilmediğinde ölçme işlemi gerçekleştirmenin bir yolunu bulmakta zorlandıkları görülmüştür. Bunlar, öğrencilerin “eylem” düzeyinde olduklarına yönelik kanıt sunmaktadır. Öte yandan Zeynep’in sayısal veri verilmediğinde ölçme işlemini gerçekleştirebilmek için alternatif stratejiler üretebildiği görülmüştür. Ayrıca tüm öğrencilerin bir şeklin alanını verilen bir birim cinsinden ifade ederken her ne kadar şekil çizse de adımları atlayarak pratik bir şekilde de bulabilecekleri belirlenmiştir. Bunlar da öğrencilerin “süreç” düzeyine ulaştıklarına yönelik kanıt oluşturmaktadır. Buradan hareketle, tüm öğrencilerin ölçme işlemi gerçekleştirme konusunda “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları ortaya çıkmıştır. Zeynep’in ise diğer katılımcılara kıyasla “süreç” düzeyine yönelik daha fazla kanıt sunduğu dikkat çekmiştir.

3.3. Alan

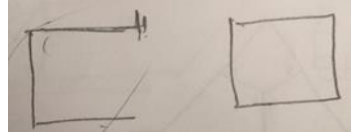
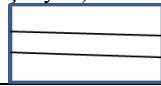
Tüm öğrencilerin dörtgenlerde alan şemalarının üçüncü bileşeni “alan” kavramı temelinde incelenmiştir. Yapılan analizler, bu bileşenin *alan kavramı, farklı boyutlu şekillerin alanları, alan ölçme, üçgenlerde alan ve dörtgenlerde alan* olmak üzere beş alt bileşenden ve bunların etkileşiminden oluştuğunu göstermektedir.

3.3.1. Alan Kavramı

Bu alt bileşen bağlamında Hale, Berna ve Tarık’ın “gelişen süreç” düzeyinde oldukları, Zeynep’in ise “süreç” düzeyinde olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin alan kavramı ile ilgili sorulan sorulara hem kâğıttaki cevaplarından hem de görüşmelerdeki söylemlerinden çıkarılan sonuçlar ve örnekler Tablo 1’de özetlenmiştir.

Tablo 1

Öğrencilerin Alan Kavramına İlişkin Söylemleri

Öğrenci	Alan Tanımları	Alanı Ölçülebilen Şekillerin Özellikleri	Kapalı-Sınırlı Şekil Algıları	Şekil Görüşme Kesiti Örnekleri
Hale	En az 2 boyutlu bir şeklin ne kadar yer kapladığının bulunması	- En az 2 boyutlu (2 ve 3 boyutlu) olmalı - Açıklık olmamalı (kapalı olmalı) - Sadece tek bir uzunluk olmamalı, en ve boy şeklinde 2 farklı doğrultuda uzunluk olmalı	Şekilde bir açıklık olmaması	
Berna	Sınırlı bölge	2 boyutu temsil etmeli - Sınırlı, kapalı bir bölge olmalı	Görüşmede Berna'ya sınırlı bölgeyle neyi kastettiği sorulduğunda; sınırlı ve kapalı bölgenin aynı anlama gelmediğini, aslında kapalı bölgeyi kastederek sınırlı bölge ifadesini kullandığını, kapalı bölgelerin alanları olduğunu ve kapalı şeklin kenarların hepsinin birleşmiş olması anlamına geldiğini belirtmiştir.	... Araştırmacı: Kapalı bölge derken ne demek istiyorsun? Berna: Yani çizerek göstermem gerekirse (aşağıdaki şekli çiziyor), şu bir alanı ifade etmezken (ilk şekil), bu bir alan ifade eder (ikinci şekil)... 
Zeynep	Bir şeklin uzayda kapladığı bölge	- Sınırlı, kapalı bir bölge olmalı - İç doluluğu olmalı	Görüşmede Zeynep'e sınırlı bölgeyle neyi kastettiği sorulduğunda; kapalılığı kastettiğini, sınırlı ve kapalı bölgenin aynı şey olmayıp kapalı bölgenin daha özel bir anlam ifade ettiğini, kapalı şeklin belli bir uzunluğun içine sıkıştırılmış veya hapsedilmiş bir ölçüm olduğunu belirtmiştir.	...Araştırmacı: Sınırlı ve kapalı senin için aynı şey mi o zaman? Zeynep: Aslında kapalı birazcık daha özel anlam. Mesela kapalı olduğunu şöyle düşünebiliriz. Şu kağıdın boyunca iki tane çizgi çekersek (Aşağıdaki 2 çizgiyi çiziyor.), bu kapalıdır ama sınırlı değildir. Mesela çizgiler uzarsa devam eder bu. Bir sınır çizilmiş. Sınırdan dolayı böyle. Yani sınır olmasaydı devam ederdi. Ama kapalılık şöyle bir şey ifade eder, kare gibi (Aşağıdaki şekli çiziyor.)... 
Tarık	Bir cismin uzayda kapladığı yer	2 boyutu temsil etmeli - Kapalı olmalı	Şeklin kenarlarının bir iç bölgeyi temsil etmesi yani o kenarların kesişmediği bir nokta olmaması ve şekilde açıkta kalan bir iç bölge olmaması	

Tablo 1'e bakıldığında Hale, Zeynep ve Tarık'ın alan tanımlarının benzer olduğu, Berna'nın ise tanımının alan kavramını yeterince açıklamadığı dikkat çekmektedir. Hale, Berna ve Tarık'ın ortak olarak alan ölçmek için şeklin 2 boyut belirtmesi gerektiğini düşündükleri görülmektedir. Yine Tablo 1'de tüm öğrencilerin alan ölçülebilen şekillerin kapalı olması gerektiğini düşündükleri ve kapalı şekillerin özelliklerine yönelik açıklamalar yapabildikleri

dikkat çekmektedir. Berna ve Zeynep'in çizimlerle açıklamalarını desteklediği görülmektedir. Ayrıca Berna ve Zeynep'in diğer iki öğrenciye ek olarak, sınırlı bölge belirten şekillerin alanı olduğunu ifade ettikleri fakat yapılan görüşmelerde sınırlı bölge derken şeklin kapalı olmasını kastettikleri ortaya çıkmıştır. Bu iki öğrencinin kapalı ve sınırlı kavramlarının aynı şey olmadığını bilincinde oldukları fakat bu kavramları birbirini yerine kullanabildikleri göze çarpmaktadır. Tablo 1'de dikkat çeken diğer bir unsur da sadece Zeynep'in bir şeklin alan belirtmesi için düzlemsel bir bölge olması gerektiğini dikkate almasıdır. Diğer öğrenciler ise bunu dikkate almadan kapalı olan tüm şekilleri 2 boyutlu olarak ele almış ve alanları olduğunu düşünmüşlerdir. Zeynep ise şunları ifade etmiştir:

Araştırmacı: ...Bu durumda kapalı olan her şeyin içi dolu mudur?

Zeynep: Aslında içi dolu değildir. Mesela çemberle daire aynı şey değil. Ama alan için ön koşul bence kapalılık olması bir de içinin dolu olması.

Araştırmacı: İşte o içi doluluk senin için ne ifade ediyor?

Zeynep: Yani bir alan olduğunu ifade ediyor. Yani şöyle (eliyle bir çember gösteriyor) bunun içi dolu olsa da olmasa da kapalıdır. Ama içi dolu değilse bu sadece bir uzunluktur, içi dolu olursa alandır...Alan için hem kapalı hem dolu olması gerek.

Öğrencilerin cevaplarına bakıldığında, tüm öğrencilerin alan kavramına ve hangi şekillerin alanlarının olduğuna yönelik içselleşmiş bir algılarının olduğu ve düşüncelerini gerekçelendirebildikleri görülmektedir. Fakat Hale, Berna ve Tarık'ın bir şeklin alana sahip olması için düzlemsel bölge belirtmesi gerektiğini dikkate almamaları, onların alan kavramı ile ilgili tam bir farkındalık geliştiremediklerini göstermektedir. Zeynep ise bunu da dikkate alarak bu konuda bir farkındalık geliştirdiğini göstermiştir. Buradan hareketle Hale, Berna ve Tarık'ın alan kavramına yönelik “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları, Zeynep'in ise “**süreç**” düzeyine ulaşabildiği sonucuna varılmıştır.

3.3.2. Farklı Boyutlu Şekillerin Alanları

Bu alt bileşen bağlamında Tarık'ın “eylem” düzeyinde olduğu; Hale ve Berna'nın “gelişen süreç” düzeyinde oldukları ve Zeynep'in ise “süreç” düzeyinde olduğu ortaya çıkmıştır. Berna ve Tarık, 2 boyutun alanı temsil ettiğini belirtmişlerdir. Hale buna ek olarak tek boyutlu şekillerin alanlarının olmadığını, en az 2 boyutlu (2 ve 3 boyutlu) şekillerin alanlarının ölçülebileceğini ifade etmiştir. 2. soruda (bkz. Ek-1) Hale, F ve G 3 boyutlu şekillerinin alanlarının ölçülebileceğini, bu şekillerin açılımı yapıldığında alan ölçülen kısımların aslında şeklin 2 boyutlu kısımları olduğunu ve alanın bu 2 boyutlu kısımların alanlarının toplamı olduğunu belirtmiştir. Berna, Zeynep ve Tarık 3 boyutlu şekillerde de alan hesaplanabileceğini özel olarak vurgulamasalar da 2. soruyu cevaplarken F ve G şekillerinde alanın nasıl hesaplanabileceğini açıklamışlardır. Burada tüm öğrencilerin alanın aslında 2 boyutlu yüzeyler ile ilgili bir kavram olduğunu ve 3 boyutlu şekiller de 2 boyutlu yüzeyler içerdiğinden bu şekillerde de alanın hesaplanabileceğinin farkında oldukları dikkat çekmektedir.

2. soruda Hale, E, H, J, K ve L dışında kalan şekillerin kapalı oldukları için alanlarının olduğunu; E, H, J, K ve L şekillerinin ise kapalı olmadıkları için alana sahip olmadıklarını belirtmiştir. Berna ve Zeynep de bu soruya Hale ile benzer cevap vermişlerdir. Zeynep, Hale ve Berna'ya ek olarak, E, H, J, K ve L dışındaki şekillerin içlerinin dolu olması durumunda alanlarından bahsedilebileceğini, alan için sadece kapalılığın yetmeyip şekillerin hem kapalı hem içlerinin dolu olması gerektiğini vurgulamıştır. Bu üç öğrencinin de kendisine verilen farklı formlardaki şekillerden alana sahip olanları belirleyebildikleri diğer bir deyişle, hangi şekillerde alan hesaplanabileceğine yönelik bilgilerini içselleştirdikleri dikkat çekmektedir. Fakat Hale ve Berna'nın alana sahip şekilleri belirlerken şekillerin düzlemsel bölge belirtme durumlarını dikkate almamaları ve tüm kapalı şekillerin alanı olduğunu düşünmeleri bu konuda tam bir içselleşme sağlayamadıklarını göstermektedir. Zeynep ise her kapalı şeklin alanı olmayacağını belirterek bu konuda tam bir farkındalık geliştirdiğini göstermiştir. Buradan hareketle boyutsuz, 1, 2 ve 3

boyutlu şekillerin alanları konusunda Hale ve Berna'nın “gelişen süreç”, Zeynep'in ise “süreç” düzeyinde olduğu orta çıkmıştır.

Tarık ise 2. soruda H ve L şekilleri dışındaki şekillerin alanı olduğunu ve kapalı şekillerin alanı olduğunu belirtmiştir. Yapılan görüşmede ise başlangıçta K ve E şekillerinin kapalı olmadığını ve H şeklinin de bir çizgi belirttiğini ama yine de alanlarının hesaplanabileceğini söylemiştir. Görüşmenin ilerleyen kısımlarında ise E, H, J ve L şekillerinin kapalı olmadıkları için alanlarının olmayacağını ifade etmiş, görüşmenin sonlarına doğru ise tekrar alanlarının olabileceğini ama nasıl hesaplanacağını bilmediğini belirtmiştir. Tüm bunlar Tarık'ın söylediklerinin tutarsız olduğunu, kendi söylemlerini aslında içselleştiremediğini ve hangi şekillerin alanları olduğunu belirlemede zorlandığını göstermektedir. Bu sebeple Tarık'ın boyutsuz, 1, 2 ve 3 boyutlu şekillerin alanları konusunda “eylem” düzeyinde kaldığı belirlenmiştir. Tarık'ın vermiş olduğu cevapların tutarsız olduğunu gösteren görüşmeden bazı kesitler şu şekildedir:

Araştırmacı: Şimdi sen mesela E şeklinde nerelerin alanını bulmuş oluyorsun?

Tarık: Şuranın bir daire olduğunu düşünürsem yarım dairenin alanını bulurum. Şöyle bir dikdörtgen yaparsam dikdörtgenin alanından bence integral yardımıyla şu kısmı çıkarırsam bana burası kalır ikisini de topladığımda şeklin alanını bulurum diye düşündüm...

Araştırmacı: Tamam b şikkında E yi alan ve uzunluk belirten şekillere almamışsın. Ama a şikkında da hesaplanabilir demişsin. Aynı şekilde J için de.

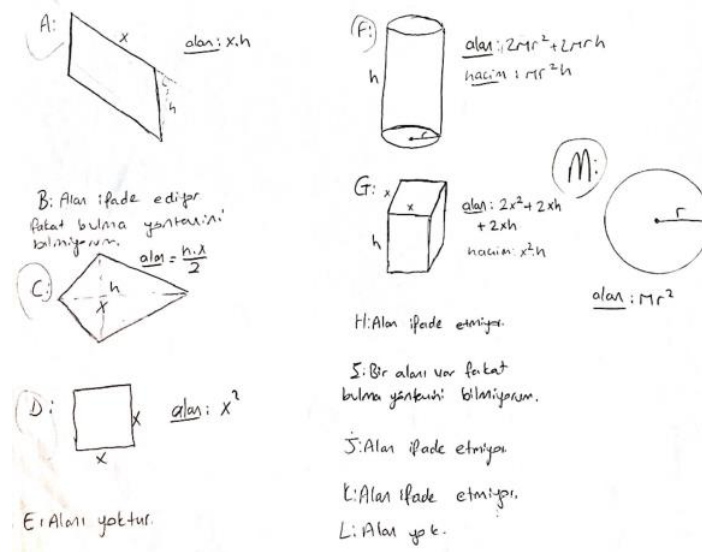
Tarık: Bunları kapalı olmadığından almadığını düşünüyorum... Ama kapalı olmayan bir şeklin alanını H deki gibi yani H de de kafam karışık. Hesaplayabileceğimizi düşünüyorum. Ama o kesin çizgi yaklaştığında da o kesin çizgiyi nasıl ayırırız nerde tamam bu kadar tamam diyebiliriz onu bilmiyorum...

3.3.3. Alan Ölçme

Bu alt bileşen kapsamında tüm öğrencilerin “gelişen süreç” düzeyinde oldukları görülmüştür. Tüm öğrencilerin 2. soruda (bkz. Ek-1) kendilerine verilen farklı şekillerin alanlarını bulurken herhangi bir bilgi verilmemesine rağmen sadece görsellerine odaklanarak şekilleri kare, paralelkenar, daire, deltoid gibi önceden bildikleri şekillere benzetmişler ve formül kullanımına yönelmişlerdir. Örneğin Zeynep'in bu sorunun a şikkına cevabı Şekil 12'de gösterilmektedir.

Şekil 12

Zeynep'in 2. Sorunun A Şikkına Cevabı

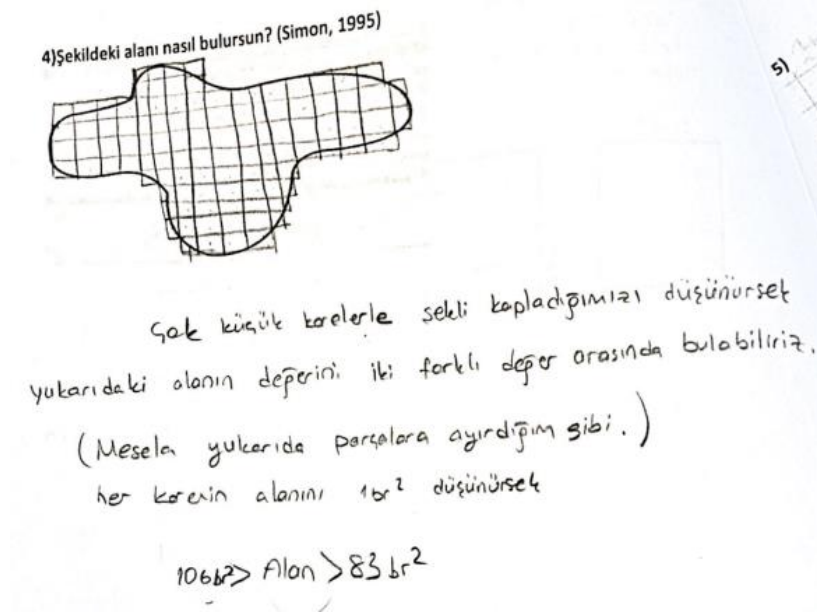


Tüm öğrenciler 3. sorunun (bkz. Ek-1) a şikkının ilk sorusuna cevaplarında, şekillerin boyutları birbirinden farklı olduğu ve bu boyutlar hakkında herhangi bir bilgi verilmediği için kıyaslama yapamayacaklarını belirtmişlerdir. Aynı şikkın ikinci sorusunda ise öğrencilere karşılaştırmak için bir yol bulup bulamayacakları sorulduğunda; Hale, Berna ve Tarık işlevsel bir yol bulamazken, Zeynep şekillerin içine eşit boyutta taşlar döşeyerek hangi şekle daha fazla taş döşediyse onun alanının daha büyük olacağını ifade etmiştir. Zeynep'in herhangi bir sayısal veri verilmeden de 2 şeklin alanını kıyaslamak için farklı bir birim seçerek şekilleri kaplama yoluna gittiği göze çarpmaktadır.

Benzer şekilde 4. soruda (bkz. Ek-1) öğrencilere düzgün olmayan bir şekil verilmiş ve bu şeklin alanını nasıl bulabilecekleri sorulmuştur. Hale ve Berna bu soruya cevap vermezken, Tarık alanın integral kullanılarak bulunabileceğini ifade etmiştir. Kendisi ile yapılan görüşmelerde Tarık'ın düzgün olmayan şekillerin alanının integralle bulunabileceğine yönelik ezber bilgi kullandığı fakat aslında alanın integralle nasıl bulunabileceğini bilmediği ortaya çıkmıştır. Yine diğer öğrencilerden farklı olarak Zeynep, şekli birim karelerle kaplarsa alanı yaklaşık olarak bulabileceğini ifade etmiştir (bkz. Şekil 13).

Şekil 13

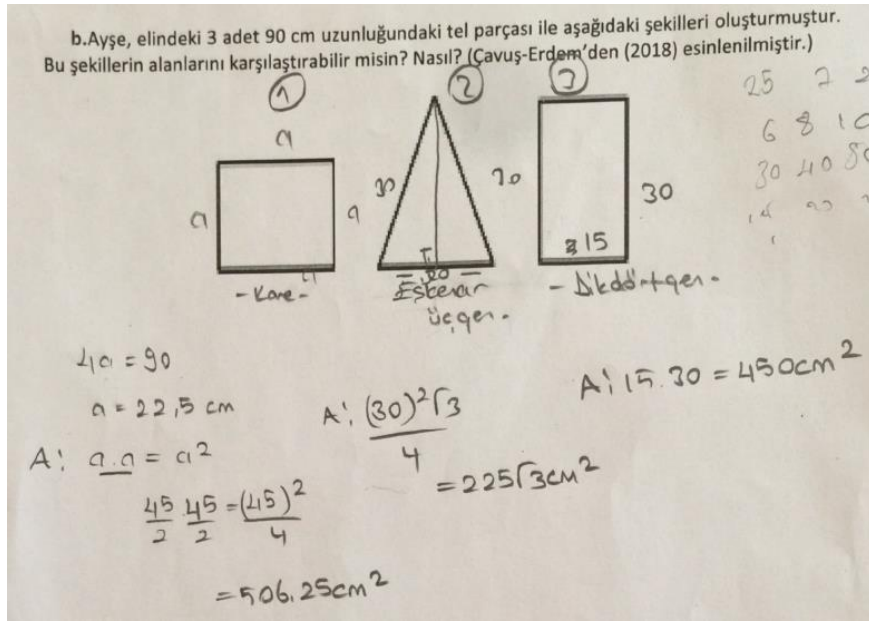
Zeynep'in 4. Soruya Cevabı



19. sorunun b şikkında (bkz. Ek-1) ise öğrencilere eşit çevre uzunluğuna sahip 3 farklı şekil verilmiş ve öğrencilerden bu şekillerin alanlarını kıyaslamaları istenmiştir. Berna'nın bu soruya cevabı Şekil 14'te yer almaktadır. Berna'nın cevabı incelendiğinde, şekilleri verilmemesine rağmen kare, eşkenar üçgen ve dikdörtgen olarak ele aldığı ve formül kullanımını tercih ettiği dikkat çekmektedir. Zeynep de bu soruyu çözerken benzer bir yaklaşım kullanmıştır. Hale ve Tarık ise herhangi bir uzunluk verilmediği için alanları kıyaslayamayacaklarını belirtmişlerdir.

Şekil 14

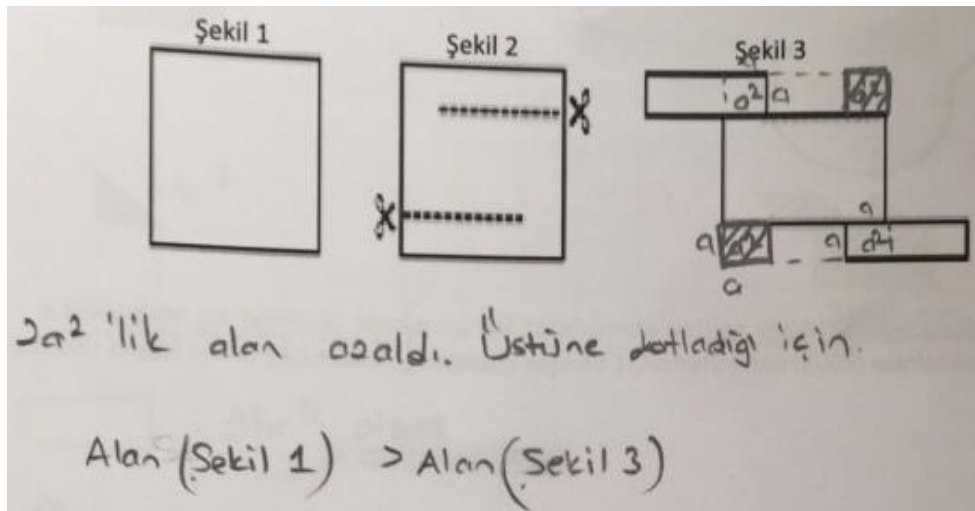
Berna'nın 19. Sorunun B Şıkkına Cevabı



Öğrencilerin bahsedilen sorulara vermiş oldukları cevaplar birlikte değerlendirildiğinde; tüm öğrencilerin alan bulurken şekilleri bildikleri şekillere benzetme ve formül kullanma eğiliminde oldukları yani öncelikle dışsal uyarıcılara yöneldikleri göze çarpmaktadır. Benzer şekilde Zeynep dışındaki üç öğrencinin de herhangi bir sayısal bilgi verilmediğinde farklı şekillerin alanlarını bulmak için alternatif stratejiler üretemedikleri ortaya çıkmıştır. Tüm bunlar, Hale, Berna ve Tarık'ın alan ölçme konusunda "eylem" düzeyinde kaldıklarına, Zeynep'in ise "gelişen süreç" düzeyinde olduğuna yönelik kanıt sunmaktadır. 3. sorunun b şıkkına (bkz. Ek-1) Berna'nın verdiği cevap ise Şekil 15'te gösterilmektedir.

Şekil 15

Berna'nın 3. Sorunun B Şıkkına Cevabı



Şekil 15'te Berna'nın ilk ve son alanı kıyaslarken üst üste binme durumuna odaklandığı fakat katlama işlemi sonucunda üst üste gelecek kısımları yanlış gösterdiği dikkat çekmektedir. Ayrıca öyle bir bilgi verilmemesine rağmen üst üste binen kısımları eşit kareler olarak ele aldığı göze çarpmaktadır. Hale ve Zeynep de bu soruya cevap verirken üst üste binme durumuna odaklanmışlardır. Zeynep, Berna gibi üst üste binen kısımları kare olarak ele almış fakat Berna'dan farklı olarak bu karelerin eş olduğunu düşünmemiştir. Hale ise Berna ve Zeynep'e göre soruya daha bütüncül bir bakış açısı ile yaklaşmıştır. Hale, üst üste binen kısımları göstererek buraların çift katlı parçaya dönüştüğünü fakat bir kere sayılması gerektiği için alanın direkt küçüleceğini ifade etmiştir. Tarık'ın bu soruya cevabına bakıldığında ise, üst üste binmeye değinmeyip şekillerin kenarlarına bilinmeyenler vererek formül kullanımını tercih ettiği görülmüştür. Burada Hale, Berna ve Zeynep'in (Berna ve Zeynep'in çözümlerinde hatalar olsa da) soruyu çözerken ara adımları atlayarak soruya daha geniş bir bakış açısıyla yaklaşabildikleri görülmektedir. Bu ise Berna ve Zeynep'in "süreç" düzeyine geçmekte olduklarına, Hale'nin ise "süreç" düzeyinde olduğuna yönelik kanıt sunmaktadır. Tarık'ın ise soruyu çözerken adımları tek tek takip etmeye ihtiyaç duyduğu ortaya çıkmıştır. Bu durum Tarık'ın "eylem" düzeyinde kaldığını göstermektedir.

"Ölçme İşlemi Yapma" bölümünde bahsedildiği gibi 5. ve 15. sorularda (bkz. Ek-1), tüm öğrencilerin bir şeklin alanını başka bir şekil cinsinden ifade ederken çizmeye gereksinim duymadan, adımları atlayabildikleri ve pratik bir şekilde çözüm yapabildikleri görülmüştür. Bu da tüm öğrencilerin "süreç" düzeyine ulaştıklarına yönelik kanıt sunmaktadır. Öğrencilerin bahsedilen sorulara verdikleri cevapların tümü birleştirildiğinde, tüm öğrencilerin hem "süreç" düzeyinde olduklarına hem de "süreç" düzeyine geçmekte zorlandıklarına yönelik kanıtlar sundukları ve dolayısıyla "gelişen süreç" düzeyinde oldukları belirlenmiştir.

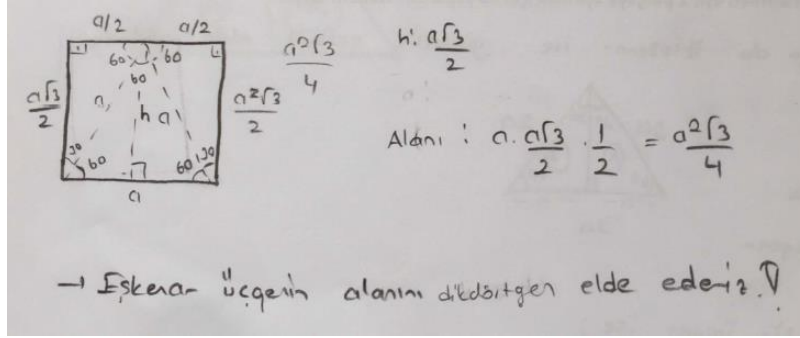
3.3.4. Üçgenlerde Alan

Bu alt bileşen kapsamında Hale ve Berna'nın "gelişen süreç", Zeynep ve Tarık'ın ise "süreç" düzeyinde oldukları görülmüştür. 7. soruda (bkz. Ek-1) tüm öğrenciler dik üçgenin alanının dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısı ile bulunabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca Tarık haricindeki öğrenciler, alanın hipotenüs uzunluğu ile hipotenüse inen yüksekliğin uzunluğunun çarpımının yarısı ile bulunabileceğini de ifade etmişlerdir. Dik üçgenin alanının dik kenarların uzunluklarının çarpımının yarısına eşit olduğunu Hale sinüs teoremi; Hale dışındaki öğrenciler ise dik üçgenin dikdörtgenin yarısı olduğunu kullanarak gerekçelendirmişlerdir.

Hale ve Tarık herhangi bir eşkenar üçgenin alanının taban ve yükseklik uzunluklarının çarpımının yarısı ile bulunabileceğini belirtmişler ve eşkenar üçgenin alan formülünün elde edilmesini bundan yararlanarak açıklamışlardır. Hale, Tarık'tan farklı olarak eşkenar üçgenin alanını bulmak için alan formülünün ve sinüs teoreminin de kullanılabileceğini ifade etmiştir. Tarık ise Hale'den farklı olarak alanın yükseklik inildikten sonra oluşan iki dik üçgenin alanlarının toplanması ile bulunabileceğini belirtmiştir. Hale ve Zeynep, diğer iki öğrenciden farklı olarak eşkenar üçgenin alan formülünün ispatını sinüs teoremine dayandırarak açıklamışlardır. Berna, Zeynep ve Tarık ise herhangi bir eşkenar üçgenin alan formülünün çevresine çizdikleri dikdörtgenden elde edildiğini ve alanın bu dikdörtgenin yarısı olduğunu ifade etmişlerdir. Berna ve Tarık bunu benzer şekilde gerekçelendirirken, Zeynep neden böyle düşündüğünü açıklamamıştır. Örneğin Berna'nın 7. sorunun d şıkkına cevabı Şekil 16'da gösterilmektedir. Öğrencilerin 7. soruya verdikleri cevaplara bakıldığında, üçgenlerde alan hesaplanmasına yönelik pek çok fikir sundukları ve fikirlerinin çoğunu gerekçelendirdikleri yani içselleştirdikleri görülmektedir. Bu ise "süreç" düzeyinde olduklarına yönelik kanıt sunmaktadır.

Şekil 16

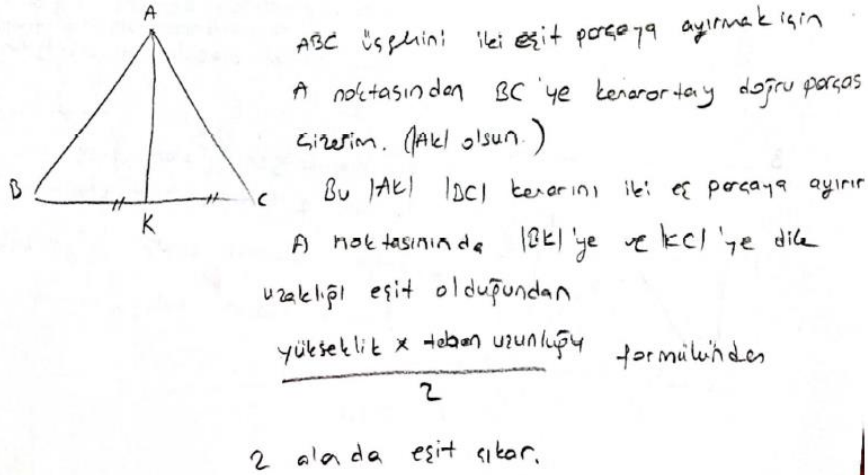
Berna'nın 7. Sorunun D Şıkkına Cevabı



8. sorunun (bkz. Ek-1) a şıkkında Hale ve Berna çeşitkenar üçgen hakkında fikri olmadığını belirtmekle beraber, eşkenar üçgende herhangi bir yükseklik çizerek, ikizkenar üçgende ise ikiz olmayan kenara ait yüksekliği çizerek alanları eşit 2 parça oluşturulabileceğini belirtmişlerdir. Yapılan görüşmede Hale bunu gerekçelendiremezken; Berna oluşan iki üçgenin açı ve kenarlarının eşit olduğunu göstererek gerekçelendirmiştir. Zeynep'in aynı soruya vermiş olduğu cevap ise Şekil 17'de verilmiştir. Şekil 17'de Zeynep'in kenarortay çizildiğinde oluşan iki üçgenin alanlarının eşitliğini taban ve o tabana ait yükseklik uzunluklarının eşit olmasına ve bu sebeple de formülden alanlarının eşit çıkmasına dayandırdığı dikkat çekmektedir. Bu soruya Tarık da Zeynep ile benzer cevap vermiştir.

Şekil 17

Zeynep'in 8. Sorunun A Şıkkına Cevabı



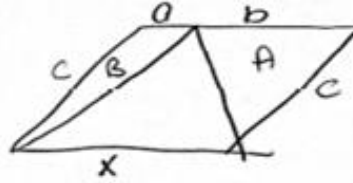
8. sorunun b şıkkında Zeynep ve Tarık genelleme yaparak, herhangi bir üçgeni alanları eş parçalara ayırmak için a şıkkındakine benzer şekilde tabanları eş parçalara ayıracaklarını, oluşan üçgenlerin yükseklikleri de eşit olacağı için alanlarının eşit olacağını ifade etmişlerdir. Zeynep ve Tarık'tan farklı olarak Berna ve Hale herhangi bir üçgeni alanları eş parçalara ayırmak için genel bir strateji oluşturamamışlardır. Bu iki öğrenci sadece bir üçgeni eşit alanlı 3 parçaya ayırmaya odaklanmışlar ve bu noktada da kural kullanımını tercih etmişlerdir. Ayrıca Hale sadece eşkenar üçgen üzerinden açıklamaya yapmaya çalışmış, diğer üçgenler için fikri olmadığını belirtmiştir.

Öğrencilerin 8. soruya verdikleri cevaplara bakıldığında, Hale ve Berna'nın ikizkenar ve eşkenar üçgen gibi daha çok özel durumları kullanmaya çalıştıkları yani dışsal uyarıcıları dikkate aldıkları; Zeynep ve Tarık'ın ise herhangi bir üçgen için genelleme yapabildikleri ortaya çıkmıştır. Bu ise Hale ve Berna'nın "eylem" düzeyinde, Zeynep ve Tarık'ın ise "süreç" düzeyinde olduklarına yönelik kanıt oluşturmaktadır.

Şekil 18

Tarık'ın 14. Sorunun B Şıkkına Cevabı

Oluşan AKB üçgeni paralelkenarın alan olarak yarıdır
K değil başka bir nokta olsaydı yine değişmezdi
Çünkü mantık olarak yükseklik zaten değişmez aynıdır.
Burda belirleyici olan tabanlardır. Neden çizsek çizelim
Oluşan iki üçgenin tabanlarının uzunluğu toplamı, oluşturduğumuz
diğer üçgenin taban uzunluğuna eşittir. Bu yüzden alanlar eşit olduğundan
paralelkenarın alanının yarıdır olur



Tarık'ın 14. sorunun b şıkkına (bkz. Ek-1) cevabı Şekil 18'de yer almaktadır. Şekil 18'de görüldüğü gibi Tarık, bir paralelkenarın alt tabandaki köşe noktaları ve üst tabandaki bir noktanın birleştirilmesi ile oluşan üçgenin alanının paralelkenarın alanının yarısı olduğunu ve K noktası sağa sola kaydırıldığında durumun değişmeyeceğini taban ve yükseklik uzunluklarına dayandırarak açıklamıştır. Diğer öğrencilerin de bu soruyu Tarık ile benzer şekilde açıkladıkları görülmüştür.

Öğrencilerin bahsedilen sorulara cevapları birlikte değerlendirildiğinde Zeynep ve Tarık'ın fikirlerini gerekçelendirebildikleri, genelleme yapabildikleri ve özel durumlara odaklanmayıp bütüncül düşünebildikleri yani "süreç" düzeyinde oldukları belirlenmiştir. Hale ve Berna'nın ise fikirlerinin çoğunu gerekçelendirebildikleri yani içselleşmiş bilgilerinin mevcut olduğu fakat özel durumlara odaklanma eğiliminde olup genelleme konusunda yeterli olmadıkları yani "gelişen süreç" düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

3.3.5. Dörtgenlerde alan

Bu alt bileşen kapsamında tüm öğrencilerin "gelişen süreç" düzeyinde oldukları görülmüştür. Öğrencilerin "eylem" düzeyinde kalan cevaplarına bakıldığında; herhangi bir dörtgenin alanını nasıl bulabileceklerine yönelik söylemleri Şekil 19'da özetlenmiştir.

Şekil 19

Öğrencilerin Herhangi Bir Dörtgenin Alanını Bulma ile İlgili Söylemleri

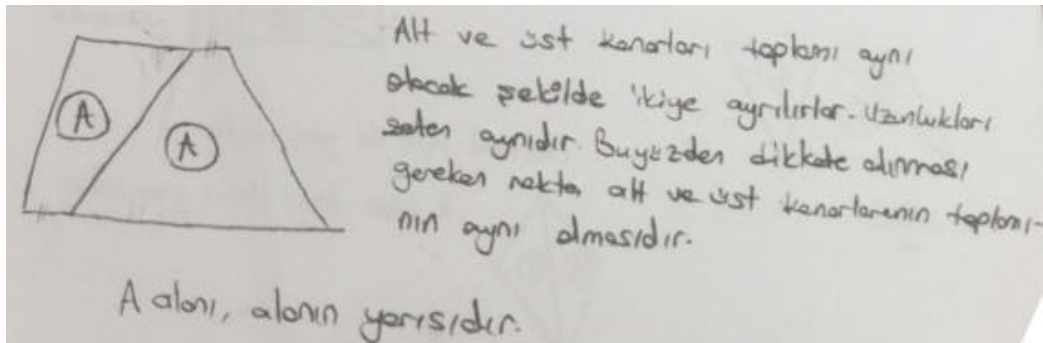
Herhangi Bir Dörtgensel Bölgenin Alanını Bulma			
Hale	Berna	Zeynep	Tarık
- Alanın iki köşegen uzunluğu ile köşegenler arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısı ile bulunacağını ifade etmiştir. - Bunun sinüs teoremi ile açıklanabileceğini ama nasıl açıklanacağını bilmediğini belirtmiştir.	- Alanın iki kenar uzunluğu ile aralarındaki açının sinüsünün çarpımının yarısı olduğunu ifade etmiştir. - Yamuk ve deltoit haricindeki herhangi bir dörtgenin alanının taban ve yükseklik uzunluklarının çarpılmasıyla bulunacağını belirtmiştir. - Yanılan görüşmede	Dörtgenin karşılıklı kenar uzunlukları eşit ve tüm açıları dik ise alanının dik kenar uzunluklarının çarpımı ile bulunduğunu; karşılıklı kenar uzunlukları eşit ama açıları dik değilse alanının iki kenar uzunluğu ve aradaki açının sinüsünün çarpımı ile bulunacağını ifade etmiştir.	Alanın taban uzunluğu ve tabana ait yükseklik uzunluğunun çarpılması ile bulunacağını ifade etmiştir.

Şekil 19'da tüm öğrencilerin herhangi bir dörtgenin alanını bulurken formül kullanma eğiliminde oldukları görülmektedir. Yapılan görüşmelerde öğrencilerden kullandıkları formüllerin elde edilmesini açıklamaları istendiğinde, hiçbir öğrencinin açıklama yapamadığı ve bilgilerinin ezber düzeyinde kaldığı dikkat çekmiştir. Yapılan görüşmelerde Berna, Zeynep ve Tarık'tan Şekil 19'da verilen cevaplarını açıklamaları istendiğinde, bu öğrenciler soruda herhangi bir dörtgenin alanı sorulmasına rağmen özel dörtgenleri kullanarak açıklama yapmışlardır. Bu ise bu üç öğrencinin özel durumlara odaklanmayı tercih ettiklerini yani dışsal uyarıcılara bağlı olduklarını göstermektedir.

Öğrencilere herhangi bir yamuğun alanını nasıl bulabilecekleri sorulduğunda, Hale ve Berna alan formülünü yazmışlar ve sorulmasına rağmen formülün elde edilmesini açıklamamışlardır. Tarık ise alan formülünün ispatını ikizkenar yamuğu kullanarak açıklamıştır. Ayrıca Hale ve Zeynep, alanın üst tabanın 2 köşesinden alt tabana yükseklikler çizdiğinde oluşan kare veya dikdörtgen ile üçgenlerin alanlarının toplanmasıyla bulunacağını belirtmişlerdir. Burada Hale ve Berna'nın ezber formül kullanımına, Hale ve Zeynep'in yaygın parçalama yöntemlerine; Tarık'ın ise herhangi bir yamuk yerine özel durumlara odaklandığı dikkat çekmektedir.

Şekil 20

Hale'nin Yamuğun İçinde Alanının Yarısına Sahip Bir Bölgeyi Oluşturma Şekli



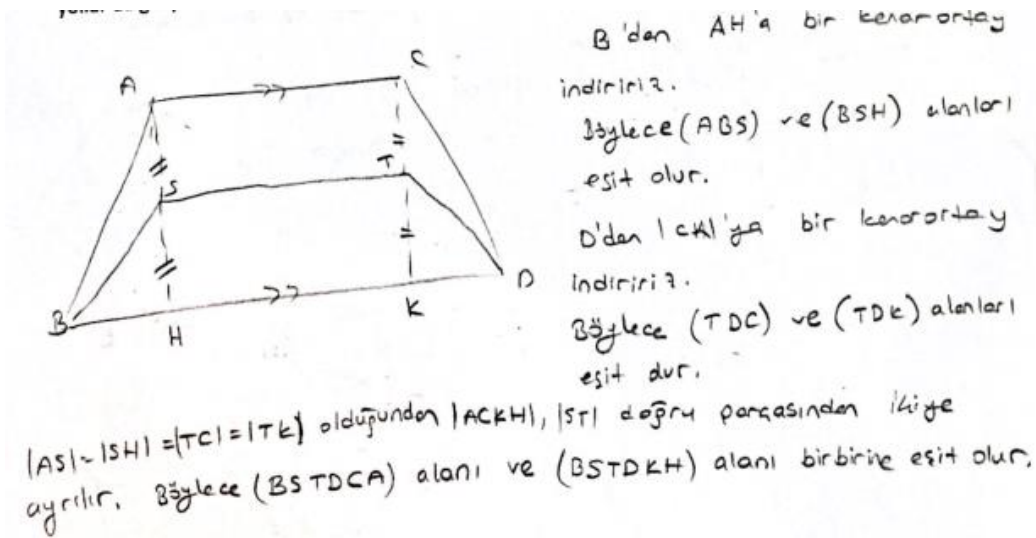
Öğrencilere herhangi bir yamuğun içerisinde alanının yarısına sahip bir bölgeyi nasıl oluşturabilecekleri sorulduğunda ise Berna cevap vermezken; Hale yamuğun üst tabanı ile alt tabanı arasına bir eğik doğru parçası çizerek, alt ve üst taban uzunlukları toplamı aynı olacak şekilde iki yamuk oluşturmuş ve yükseklikleri eşit olduğu için alanlarının aynı olduğunu ifade etmiştir (bkz. Şekil 20). Burada Hale'nin açıkladığı yöntemin yine formül kullanımına dayandığı göze çarpmaktadır. Tarık da bu soruya benzer şekilde cevap vermiştir.

Tüm öğrenciler bir karenin alanını 4 katına çıkarmak için kenarının 2 katına çıkarılması gerektiğini formülden yararlanarak ifade etmişlerdir. Öğrencilerin vermiş oldukları bu cevabın formül kullanımına dayanması, dışsal uyarıcılara odaklandıklarını göstermektedir. Öğrencilerden herhangi bir deltoidin alanını nasıl bulabileceklerini açıklamaları istendiğinde, Berna ve Tarık alanın köşegen uzunlukları çarpımının yarısı olduğunu belirtmişler ve sorulmasına rağmen formülün elde edilmesini açıklamamışlardır. Tarık benzer şekilde eşkenar dörtgenin alanının da köşegen uzunlukları çarpımının yarısı olduğunu belirtmiş fakat nedeninden bahsetmemiştir. Ayrıca Tarık eşkenar dörtgen ve deltoidin alanlarının köşegenler çizildiğinde oluşan 4 dik üçgenin alanlarının toplanmasıyla bulunacağını ifade etmiş ama bu söylemini istenmesine rağmen gerekçelendirmemiştir. Benzer şekilde Hale dışındaki tüm öğrenciler paralelkenarın köşegenlerin çizilmesiyle oluşan 4 üçgenin alanlarının eşit olduğunu söylemiş fakat sorulmasına rağmen nedenine yönelik açıklama yapmamışlardır. Bunlar tüm öğrencilerin söylemlerini içselleştiremediklerine ve ezber bilgi kullandıklarına yönelik kanıt sunmaktadır.

Öğrencilerin “süreç” düzeyinde olduklarını gösteren cevaplarına bakıldığında; Zeynep'in herhangi bir yamuğun içinde alanının yarısına sahip bir bölge oluşturmak için yamuğun ve üçgenin özelliklerinden yararlanarak yaygın olmayan bir yöntem kullandığı ve yapılan görüşmelerde bunu doğru şekilde gerekçelendirdiği görülmektedir (bkz. Şekil 21).

Şekil 21

Zeynep'in Yamuğun İçinde Alanının Yarısına Sahip Bir Bölgeyi Oluşturma Şekli

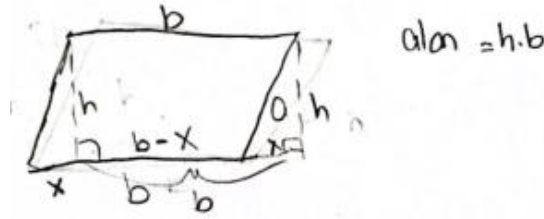


Hale paralelkenarın alanının köşegen çizildiğinde oluşan 2 eş üçgenin alanları toplamı olduğunu ve bu sebeple taban ve yükseklik uzunluklarının çarpımına eşit olduğunu ifade etmiş ve yapılan görüşmede bunu doğru şekilde açıklayabilmiştir. “Üçgenlerde Alan” bölümünde de bahsedildiği gibi, 14. sorunun b şikkında (bkz. Ek-1) tüm öğrenciler, bir paralelkenarın alt tabandaki köşe noktaları ve üst tabandaki bir noktanın birleştirilmesi ile oluşan üçgenin alanının paralelkenarın alanının yarısı olduğunu ve K noktası sağa sola kaydırıldığında durumun değişmeyeceğini gerekçelendirmişlerdir. Zeynep paralelkenarda orta tabanın alanı 2 eşit parçaya

ayıracağını belirtmiş ve açıklamıştır. Tarık ve Berna paralelkenarın alanının taban ve yükseklik uzunluklarının çarpılması ile bulunacağını ifade etmişlerdir. Örneğin Tarık'ın herhangi bir paralelkenarın alanını nasıl bulabileceği sorulduğunda verdiği cevap Şekil 22'de yer almaktadır. Şekil 22'deki yazılı cevabından ve yapılan görüşmeden Tarık'ın, paralelkenarın alanının taban ve yükseklik uzunluklarının çarpılarak bulunmasını şekli dikdörtgene tamamlayarak açıkladığı ortaya çıkmıştır. Berna da bu soru ile ilgili benzer bir açıklama yapmıştır. Tüm bunlar öğrencilerin paralelkenarın alanı ile ilgili birden fazla fikir üretebildiğini ve fikirlerini gerekçelendirebildiklerini yani içselleştirdiklerini göstermektedir.

Şekil 22

Tarık'ın Paralelkenarın Alanının Bulunuşuna Yönelik Cevabı



Dikdörtgenin alanı ile ilgili sorularda Hale köşegenin alanı 2 eş parçaya ayıracağını belirtmiş ve bunu üçgende kenar-kenar-kenar eşliğini kullanarak gerekçelendirmiştir. Berna, Zeynep ve Tarık da benzer şekilde köşegenin alanı 2 eş dik üçgene ayırdığını ve bu sebeple de dikdörtgenin alanının oluşan bir dik üçgenin alanının 2 katına eşit olduğu için taban ve yükseklik uzunluklarının çarpımı ile bulunduğunu ifade etmiştir. Zeynep ek olarak, köşegen çizildiğinde oluşan 2 dik üçgenin eşliğini üçgende kenar-açı-kenar eşliğini kullanarak açıklamıştır. Ayrıca Berna, alanın dik kenar uzunlukları ile $\sin 90^\circ$ 'nın çarpılmasından dolayı taban ve yükseklik uzunluklarının çarpımı olduğunu da belirtmiştir. Burada Berna'nın dikdörtgenin özel bir paralelkenar olduğu bilgisine dayanarak bunu söylediği düşünülmektedir.

Şekil 23

Hale'nin Dikdörtgenin Alanının 2 Katına Çıkarılması İle İlgili Soruya Cevabı

17) Kenarları 4m ve 6m olan bir dikdörtgenin alanını 2 katına çıkarmak için kenarlarda nasıl bir değişim yapmak gerekir? Açıklar mısın? Başka hangi yollarla alanı 2 katına çıkarabilirsin?

4m 6m

Alan = $6 \cdot 4 = 24$

Alanı 2 katına çıkarmak için ayrı ayrı kenarlardan birini 2 katına çıkarabiliriz. Burada 9k? seçenek vardır. O da 6m'lik kenarı 12m yapmaktır. Ve 4m'lik kenarı 8m yapmaktır. Yani ilk seçenekte kenarlar 12m ve 4m'dir. İkinci seçenekte " 8m ve 6m'dir.

Başka bir yol → Her iki kenara 2 eklenektir.

$(6+2)(4+2) = 48$

$a^2 + 10a + 24 = 48$

$a^2 + 10a - 24 = 0$

$a \quad 12$

$a \quad -2$

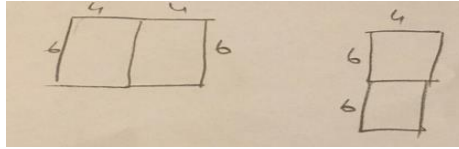
$a = 2$ $a = 12$

✓

Hale 17. soruda (bkz. Ek-1) dikdörtgenin alanını 2 katına çıkarmak için kenar uzunluklarından birinin 2 katına çıkarılabileceğini veya her iki kenar uzunluğunun da 2 arttırılabileceğini belirtmiştir (bkz. Şekil 23). Burada Hale'nin kenar uzunluklarının 2 arttırılması gerektiğini belirlerken sayısal örneklere odaklanmak cebirsel ifade kullandığı dikkat çekmektedir. Bu ise Hale'nin örneklere odaklanmak yerine bütüncül bir bakış açısı kullanabildiğini göstermektedir. Berna da bu soruya Hale ile benzer cevap vermiştir. Tarık'ın cevabına bakıldığında, ilk alanın 24 m^2 olduğunu, alan 2 katına çıktığında yeni alanın 48 m^2 olacağını ve dikdörtgenin kenar uzunluklarının çarpımları 48 olacak şekilde herhangi bir şekilde değiştirilebileceğini ifade etmiş ve bolca örnek vermiştir. Burada da Tarık'ın belirli sayısal örneklerle sınırlı kalmadığı, genel düşünebildiği dikkat çekmektedir. Zeynep'in ise alanın 2 katına çıkarılması için dikdörtgenin kopyalanarak dibine eklenebileceğini belirttiği görülmektedir. Bu ise Zeynep'in formül kullanımı veya sayısal örnekten ziyade daha farklı bir yol belirleyebildiğini yani bilgilerini içselleştirdiğini göstermektedir. Cevabı üzerine Zeynep ile gerçekleştirilen görüşme kesiti şu şekildedir:

Araştırmacı: Nasıl kopyalayıp dibine eklersin? Neden böyle düşündün?

Zeynep: (Aşağıdaki şekli çiziyor.) Yani mesela 6 ya 4 lük bir dikdörtgen çizelim. Ne istiyordu bizden? Alanı 2 katına çıkarmayı istiyordu. O zaman bunun aynısından yanına ekleyebiliriz böyle. Ya da aynı şekilde bunun aynısından altına ekleyebiliriz ki alan 2 katına çıkmış olur.

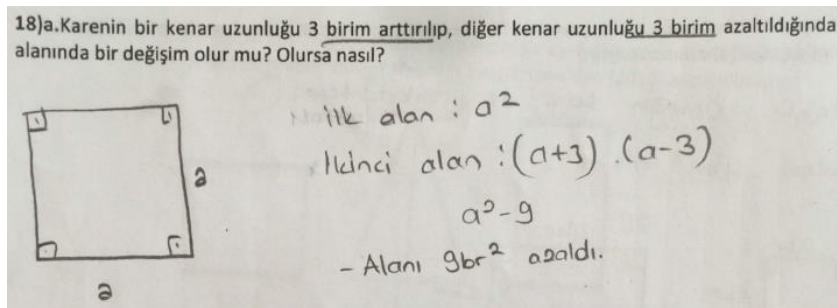


Karenin alanı ile ilgili sorularda Berna, karenin 4 kenarı eşit bir paralelkenar olduğunu ifade etmiş ve paralelkenarın alanı taban ve yükseklik uzunluklarının çarpımı olduğu için karenin alanının da kenarları eşit olduğundan iki kenar uzunluğunun çarpımı olduğunu belirtmiştir. Zeynep ise karenin bir dörtgen olduğunu ve bu sebeple de alanının köşegen uzunlukları ile $\sin 90^\circ$ 'nin çarpımının yarısına eşit olduğu için bir kenar uzunluğunun karesine eşit olduğunu söylemiştir.

18. sorunun a şıkında (bkz. Ek-1), tüm öğrencilere bir karenin bir kenar uzunluğunun 3 birim arttırılıp, bir kenar uzunluğunun 3 birim azaltılması durumunda alanının nasıl değişeceği sorulduğunda; tüm öğrenciler cebirsel ifade kullanarak çözüm yapmıştır. Örneğin Berna'nın bu soruya vermiş olduğu cevap Şekil 24'te verilmiştir. Diğer öğrenciler de bu soruya benzer cevap vermişlerdir. Şekil 24'te, öğrencilerin çözümlerinde sayısal örnekler kullanmak yerine bütüncül bir bakış açısı kullandıkları, dışsal uyarıcıları dikkate almadıkları dikkat çekmektedir.

Şekil 24

Berna'nın 18.Sorunun A Şıkına Cevabı



Verilen örneklerden görüldüğü gibi, öğrencilerin dörtgenlerde alan konusu ile ilgili kendilerine sorulan sorulara verdikleri cevaplar birlikte değerlendirildiğinde tüm öğrencilerin hem “eylem” düzeyinde kaldıklarına hem de “süreç” düzeyine ulaştıklarına yönelik kanıtlar sundukları ve dolayısıyla “**gelişen süreç**” düzeyinde oldukları belirlenmiştir.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma APOS öğrenme teorisi çerçevesinden, matematik eğitimi lisans öğrencilerinin dörtgenlerde alan konusuna dair var olan zihinsel yapılarını ayrıntılı şekilde açıklamaktadır. Bu çalışmanın öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunun bütününe yönelik var olan bilgilerine ışık tutması bakımından değerli olduğu ve öğrencilerin bilgilerinin geliştirilmesi için rehber olarak kullanılabileceği düşünülmektedir.

Çalışma kapsamında öğrencilerin dörtgenlerde alan konusuna yönelik zihinsel yapıları “Boyut”, “Ölçme” ve “Alan” olmak üzere üç ana başlıkta incelenmiştir. Boyutun iki alt bileşeni kapsamında “süreç” düzeyine ulaşabilen öğrenci olmaması dikkat çekmiştir. Ölçme ve alana yönelik belirlenen alt bileşenler kapsamında öğrencilerin genellikle “gelişen süreç” düzeyinde oldukları görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin boyut, ölçme ve alanın alt bileşenleri kapsamında farklı APOS seviyelerinde olabildikleri ortaya çıkmıştır. Bu durum öğrencilerin boyut, ölçme ve alan kavramlarına yönelik bilgileri ile kendilerine verilen şekillerin boyutlarını, alanlarını ve bu şekillerde gerçekleştirilebilecek ölçme işlemlerini belirleme becerilerinin paralel olmak zorunda olmadığını göstermektedir. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlara göre, bazen öğrencilerin bu kavramlara yönelik teorik bilgiye sahip oldukları ama bilgilerini içselleştiremeyip uygulamada kendilerine verilen şekillerin özelliklerini belirlemede kullanamadıkları, bazen de bunun tam tersinin olabildiği ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde Altıkardeş ve Koyunkaya’nın (2020) çalışmalarında da bazı öğrencilerin boyut hakkında doğru matematiksel fikirlere sahip oldukları halde kendilerine sorulan şekillerin boyutlarını doğru şekilde belirleyemedikleri, bazı öğrencilerin ise boyut hakkında doğru matematiksel fikirlere sahip olmamalarına rağmen kendilerine sorulan şekillerin boyutlarını doğru şekilde belirleyebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin sadece yarısının boyut ve ölçme kavramlarının tanımına ilişkin doğru bir matematiksel bir anlayışa sahip oldukları dikkat çekerken; tamamının alan kavramının tanımına yönelik eksiklikleri olsa da doğru matematiksel anlayışlar geliştirdikleri dikkat çekmiştir. Benzer şekilde Çavuş-Erdem’in (2018) çalışmasında da öğrencilerin çoğu alan kavramını doğru bir matematiksel anlayış kullanarak tanımlayabilmişlerdir. Bu çalışmada öğrencilerin çoğunun kendilerine verilen farklı şekillerin boyutlarını ve bu şekillerde gerçekleştirilebilen ölçme işlemlerini belirlemede zorlandıkları ortaya çıkmıştır. Bu bulguya paralel olarak da Ural (2011) da matematik eğitimi lisans öğrencilerinin boyut ölçütlerini araştırdığı çalışmasında, öğrencilerin kendilerine sorulan şekillerin boyutlarını belirlemede zorlandıklarını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışma kapsamında tüm öğrencilerin boyut algılarının 3 boyutla sınırlı olduğu görülmüştür. Altıkardeş ve Koyunkaya (2020) da matematik temelli teknoloji uygulamalarının lise öğrencilerinin boyut konusundaki algılarına etkisini inceledikleri çalışmalarında öğrencilerin neredeyse tamamının en fazla 3 boyut olduğunu düşündüklerini ve sonsuz boyut olduğunun bilincinde olmadıklarını belirlemişlerdir.

Bir önceki paragrafta bahsedilen, boyut, ölçme ve alan kavramlarına yönelik bu çalışmadan elde edilen bulgular, öğrencilerin bu kavramlara yönelik anlayışlarında eksiklikler olduğunu ve söz konusu anlayışlarının geliştirilmesi gerektiğini göstermektedir. Bu durumun bir sebebinin bu konuların müfredatlarda ayrı üniteler olarak ele alınmaması (MEB, 2024a, 2024b, 2024c) ve dolayısıyla bu konular üzerinde öğretmenler tarafından yeterince durulmaması olduğu düşünülmektedir. Bu noktada öğretmenlerin bu konular ile bağlantılı konular işlenirken öğrencilere boyut, ölçme ve alan kavramlarından da bahsetmelerinin önemli ve gerekli olduğu düşünülmektedir. Öğretmenlerin derslerinde yeri geldikçe, boyutun, ölçmenin, alanın ne anlama

geldiği, bir şeklin boyutunun nasıl belirlenebileceği ve buna bağlı olarak kaç boyut olabileceği, farklı şekillerde gerçekleştirilebilecek ölçme işlemleri ve nedenleri gibi konularda öğrencileri bilgilendirmeleri ve farklı örnekler sunmaları ile birlikte öğrencilerin bu konularda doğru bir matematiksel anlayış geliştirmeleri sağlanabilir.

Çalışmanın bulgularına genel olarak bakıldığında, öğrencilerin neredeyse tamamının dörtgenlerde alan şemalarına ait bileşenleri genellikle “gelişen süreç” düzeyinde kavradıkları sonucuna varılmaktadır. Ayrıca “süreç” düzeyine sadece iki öğrencinin ulaşabildiği, “nesne” ve “şema” düzeylerine ulaşabilen öğrencinin olmadığı görülmüştür. Bu iki öğrencinin ortak olarak üçgenlerde alan konusunu zihinlerinde “süreç” düzeyinde yapılandırdıkları dikkat çekmiştir. Bu öğrencilerin aynı zamanda bazı bileşenlerde en çok “eylem” düzeyinde kanıt sunan öğrenciler oldukları göze çarpmıştır. Benzer şekilde çeşitli matematik-geometri konularının öğrenilmesinin APOS teorisi çerçevesinde incelendiği pek çok çalışmada da öğrencilerin söz konusu konuları genellikle “eylem” veya “süreç” düzeyinde öğrendikleri sonucuna varılmıştır (Dubinsky & Wilson, 2013; Maharaj, 2010; Martínez-Planell & Cruz-Delgado, 2016; Öksüz, 2018; Şefik, 2017).

Çalışma kapsamında tüm öğrencilerin alan bulurken verilen şekilleri belirtilmemesine rağmen kare, dikdörtgen, paralelkenar, deltoid vb. şekillere benzetme ve formül kullanma eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır. Bu durum öğrencilerin kendi zihinlerindeki prototip şekillere odaklandıklarını ve dışsal uyarıcıların etkisinde kaldıklarını göstermektedir. Benzer şekilde Fujita ve Jones (2006) ve Mutluoğlu ve Erdoğan’ın (2020) çalışmalarında öğrencilerin prototip şekillerin etkisinde kaldıkları ve şeklin tanım ve özelliklerini içselleştirmeden çizdikleri; Smith ve Barrett’in çalışmalarında ise (2017) ezbere alan formülü kullandıkları belirtilmektedir. Bunun muhtemel sebeplerinden bir tanesi öğretmenlerin yeterli ilişkilendirme ve gerekçelendirme yapmadan genellikle şekillerin alan ölçümüne ilişkin formülleri öğretme eğiliminde olmalarıdır (Huang & Witz, 2011). Öğretmenlerin doğru bir terminoloji kullanarak şekiller arasında ilişkiler kurmaları, formülleri gerekçelendirmeleri ve birbiri ile ilişkilendirmeleri, belirtilmediğinde veya bir çıkarım yapmanın mümkün olmadığı durumlarda şekilleri bildikleri şekillere benzetme yaklaşımının doğru olmadığını sık sık vurgulamaları ve böyle durumlarda kullanılabilecek farklı alan bulma stratejileri hakkında örnekler sunmalarının öğrenciler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

Çalışma sonucunda üç öğrencinin sayısal veri verilmediğinde veya düzgün olmayan şekillerin alanı sorulduğunda alan ölçmenin bir yolunu bulamadıkları; sadece bir öğrencinin ise bu konuda alternatif stratejiler üretebildiği görülmüştür. Öğrencilerin çoğunun herhangi bir şeklin alanını bulmak için uzunluk bilgisi gibi verilere ihtiyaç duymaları, dışsal uyarıcıları dikkate alma eğiliminde olduklarını göstermektedir. Bireylerin gerektiğinde herhangi bir cismin veya özel dörtgen dışındaki dörtgenlerin alanını ölçmek için çevrelerindeki nesneleri kullanabilme becerisi kazanmalarının günlük hayatlarını kolaylaştırmak adına önemli olduğu ve bu konuda eğitilerek geliştirilmeleri gerektiği düşünülmektedir. Örneğin, Zacharos (2006) çalışmasında, alan ölçme araçlarının kullanımı ve alanı karelere bölme konusunda eğitim alan öğrencilerin, alan ölçmeye yönelik farklı stratejiler geliştirmede daha başarılı oldukları sonucuna ulaşmıştır.

Bu çalışmada tüm öğrencilerin haklarında bilgi verilmeyen farklı ölçü birimleri cinsinden ifade edilen alan ölçümlerinin kıyaslanamayacağını belirttikleri ve kıyaslayabilmek için herhangi bir strateji üretmedikleri ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde Güven-Akdeniz (2018), öğrencilerin aynı uzunluğun farklı büyüklükte birimlerle ölçülebilmesi, birim kavramı, ve birim ve ölçülen nesne arasındaki parça-bütün ilişkisi konularında güçlükler yaşadıklarını belirlemişlerdir. Öğrencilerin ölçü birimleri ile ilgili yaşadıkları bu zorlukların okullarda ölçme konusunun yeterince ele alınmaması ve öğrencilere verilen ölçüm sonuçlarının genellikle aynı veya birbirine çeşitli kurallar kullanılarak dönüştürülebilen evrensel ölçü birimleri cinsinden verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca öğretmenlerin evrensel ölçü birimleri dışında farklı ölçü birimleri ile verilen ölçüm sonuçlarının kıyaslanması için kullanılabilecek stratejiler ve bunların

temel mantığı ile ilgili bir farkındalık kazandırmamaları da bunda etkili olabilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğrencilerin alan ölçme konusuna yönelik bakış açılarının sınırlı olduğunu ve geliştirilmesi gerektiğini göstermektedir. Bu noktada öğrencilere farklı birimler cinsinden verilen sonuçların çevrelerinden belirledikleri uygun herhangi bir ortak birim cinsinden ifade edilerek kıyaslanabileceklerine yönelik bir farkındalık kazandırılması gerektiği düşünülmektedir. Bu sayede öğrencilerin ölçme ve özelinde alan ölçme kavramlarına yönelik algıları geliştirilebilir ve matematik ile günlük hayat arasında daha rahat ilişki kurmaları sağlanabilir.

Çalışma kapsamında ulaşılan bir diğer sonuç da, tüm öğrencilerin bir şeklin alanını birim olarak verilen bir şekil cinsinden ifade ederken, adımları atlayarak ve hayal ederek pratik bir şekilde bulabildikleridir. Burada öğrencilerin alanda kaplama, çarpma ve sayma stratejilerini başarılı bir şekilde uygulayabildikleri dikkat çekmektedir. Benzer şekilde Huang ve Witz'in (2013) çalışmalarında da dikdörtgenin alanının altında yatan çarpma stratejisini kavrayan ve uygulayabilen öğrencilerin olduğu görülmektedir. Fakat bu çalışma kapsamında öğrencilerin çoğunun bu stratejileri kendilerine bir birim verilmediğinde çevrelerinden herhangi bir birim seçip uygulayamadıkları görülmüştür. Bu durumun öğrencilerin genellikle kendilerine hazır veri verilen sorularla karşılaşmaları ve buna alışmaları sonucunda herhangi bir soruyu çözerken veriye ihtiyaç duymalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu noktada öğrencilere daha açık uçlu sorular sorulması, kimi zaman veri verilmemesi ve bu durumda ne yapabileceklerini düşünmeleri için zaman verilmesi ve öğrencilerin bu tip örneklerle karşılaşmalarının sağlanması etkili olabilir.

Çalışma sonucunda tüm öğrencilerin genel dörtgenlerin alanları konusunda yeterli bilgiye sahip olmadıkları, ezbere formül kullanma eğiliminde oldukları fakat kullandıkları formüllerin elde edilmesini açıklayamadıkları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin özel dörtgenlerin alan formüllerinin çoğu için de kullandıkları formüllerin ispatlarını açıklayamadıkları dikkat çekmiştir. Fujita ve Jones (2007), Kayış (2019), Smith ve Barrett (2017) ve Tan-Şişman ve Aksu'nun (2009) çalışmalarında da benzer bulgular yer almaktadır. Ayrıca öğrencilerin genel dörtgenlerin alan formülü ile özel dörtgenlerin alanlarını ilişkilendiremedikleri belirlenmiştir. Bu noktada öğrencilere; dörtgenlerin alan bağıntılarını oluşturma, bağıntılar arasındaki ilişkileri fark etme, bir şeklin parçalanması ve ayrışan parçalarının üst üste binmeden yeniden düzenlenmesinin şeklin alanını değiştirmeyeceği anlayışından hareketle bir dörtgenin alanını farklı dörtgenlerin alanlarından yararlanarak bulma imkânının tanınması dörtgenlerde alan konusunun kavranmasında oldukça önemlidir (Huang & Witz, 2011; Lehmann, 2022; MEB, 2018a, 2018b; Pickreign, 2007; Vincent & Stacey, 2009).

Bu çalışmada öğrencilerin özel dörtgenler içerisinde en çok yamuğun ve deltoidin alanlarını bulma konusunda zorlandıkları ve eksiklikleri olduğu göze çarpmıştır. Ayrıca bu çalışmada öğrencilerin kare, dikdörtgen ve paralelkenarın alanları konularında süreç düzeyinde olduklarına yönelik daha fazla kanıt sundukları belirlenmiştir. Bu bulgu ile paralel olarak Miller'ın (2018) çalışması da öğrencilerin sırasıyla kare, paralelkenar, dikdörtgen, yamuk, eşkenar dörtgen ve deltoidin tanımı ve özellikleri konusunda daha rahat olduklarını göstermektedir. Bunun bir sebebinin öğrencilerin ilkokuldan itibaren kare, paralelkenar ve dikdörtgen şekilleriyle daha fazla karşılaşmaları olduğu düşünülmektedir. Öğrencilere sunulan örneklerde yamuk, eşkenar dörtgen ve deltoid gibi özel dörtgenlere de sıklıkla yer verilmesi ve bu dörtgenlerin tanım ve özelliklerinin diğer dörtgenlerle ilişkilendirilerek sunulması, öğrencilerin bu dörtgen tiplerine ait bilgi birikimlerinin artmasına katkı sağlayabilir.

Çalışma kapsamında öğrencilerin dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkilerin yeterince farkında olmadıkları ve bu hiyerarşik ilişkileri dörtgenlerin alan bağıntılarını elde etmede esnek bir şekilde kullanamadıkları sonucuna varılmıştır. Bu kapsamda sadece bir öğrencinin dikdörtgenin özel bir paralelkenar olduğunu ve bu sebeple de alanının taban ve yükseklik uzunlukları çarpımı olmasından dolayı iki dik kenarının çarpımına eşit olduğunu belirttiği dikkat çekmiştir. Bunun dışında hiçbir öğrenci özel dörtgenlerin alanlarını bulurken veya formüllerini gerekçelendirirken aralarındaki hiyerarşik ilişkiye değinmemiştir. Bu durum öğrencilerin

dörtgenler arasındaki hiyerarşik düzene ilişkin bilgilerinin eksik olduğunu veya var olan bilgilerini alan konusuna entegre edemediklerini göstermektedir. Alanyazında pek çok çalışmada ulaşılan sonuçlar bu bulguyu desteklemektedir (Ayaz, 2016; Fujita & Jones, 2006, 2007; Gal & Lew, 2008; Ndlovu, 2014; Okazaki & Fujita, 2007; Özkan, 2019; Miller, 2018). Fakat Özçakır ve Çakıroğlu (2017) ve Budiarto, Rahaju ve Hartono'nun (2017) çalışmalarında ulaşılan sonuçlar bu çalışmadan farklılık göstermektedir. Örneğin; Budiarto, Rahaju ve Hartono (2017) çalışmalarında, öğrencilerin dörtgenler arasındaki ilişkilerin farkında olduğunu ve yamuksal bölgenin alanını kullanarak paralelkenarsal, deltoid dışındaki diğer özel dörtgensel bölgelerin alanlarını bulabildiklerini tespit etmişlerdir. Öğrencilerin dörtgenler arasındaki hiyerarşik düzene ilişkin bilgilerini ve hiyerarşik ilişkiyi alan bulmada kullanabilme becerilerini geliştirmek için ilkökuldan lisans eğitiminin bitimine kadar söz konusu ilişkilerin sık sık vurgulanması ve aktif kullanımının sağlanmasının önemli olduğu düşünülmektedir. Bu noktada dörtgenlerin tanımlarının ve özelliklerinin birbiri ile ilişkilendirilmesi ve buna bağlı olarak dörtgenlere ait farklı tanımların oluşturulması ve aralarında bir hiyerarşik ilişki kurulması, tersine kurulan hiyerarşik ilişkiden yararlanılarak bir dörtgen türünün tanımından ve özelliklerinden diğer dörtgen türünün tanım ve özellikleri hakkında çıkarım yapılması, dörtgenlerin alan formüllerinin hiyerarşik düzen ile ilişkilendirilmesi ve buna dayalı ispatlarının yapılması fayda sağlayabilir.

Çalışma sonucunda tüm öğrencilerin üçgen ile dikdörtgen, kare ve paralelkenarın alanları arasındaki ilişkilerin farkında oldukları dikkat çekmiştir. Bu kapsamda öğrenciler dik üçgenin alanının dikdörtgen veya karenin alanının yarısı olduğunu gerekçeleriyle açıklayabilmişlerdir. Tüm öğrenciler paralelkenarın alt tabanındaki iki köşe ve üst tabanında alınan herhangi bir noktanın birleştirilmesi ile oluşacak üçgenin alanının paralelkenarın alanının yarısı olduğunu da gerekçelendirmişlerdir. Bir öğrencinin bunun dikdörtgen ve karede de geçerli olacağını belirttiği göze çarpmıştır. Ayrıca çalışma kapsamında öğrencilerin yarısının paralelkenarın alanını dikdörtgenin alanına dayandırarak açıkladığı dikkat çekmiştir. Yine öğrencilerin yarısının üçgenlerin alanlarını bulurken ikizkenar ve eşkenar üçgen gibi üçgenlere odaklandıkları görülmüştür. Bu durum da öğrencilerin zaman zaman genel durumu düşünmek yerine özel durumları dikkate alabildiklerine yani dışsal uyarıcıları kullanma eğiliminde olduklarına yönelik kanıt sunmaktadır. Tomooğlu ve Kurtuluş'un (2020) çalışmaları da elde edilen bu bulguları desteklemektedir. Tomooğlu ve Kurtuluş (2020) çalışmalarında, öğrenciler karenin ve dikdörtgenin iki eş üçgenin birleşmesi ile oluştuğunu ve bu sebeple de alanlarının kendilerini oluşturan üçgenlerin iki katı olduğunu ifade etmişlerdir. Ek olarak öğrenciler, bu çalışma ile benzer şekilde paralelkenarı bir dikdörtgene çevirip alanını dikdörtgenden yararlanarak ifade edebilmişlerdir.

Öğrencilerin dörtgenlerde alan konusuna yönelik zihinsel yapılarının incelendiği bu çalışma, İzmir ilindeki bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 4 tane 1. sınıf ortaöğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencisi ile sınırlı tutulmuştur. Öğrencilerin kendilerine sorulan sorulara içtenlikle cevap verdiği varsayılmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin dörtgenlerde alan şemalarının bileşenleri kapsamında “nesne” ve “şema” düzeylerine ulaşamadıkları ve hatta “süreç” düzeyine ulaşan öğrenci sayısının da az olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin yarısının sadece bir alt bileşen kapsamında “süreç” düzeyine ulaşabildiği dikkat çekmiştir. Ayrıca öğrencilerin boyut, ölçme ve alan bileşenlerinin alt bileşenlerini zihinlerinde genellikle “gelişen süreç” düzeyinde yapılandırdıkları göze çarpmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, öğrencilerin konuyu öğrenme düzeylerinin geliştirilmesi gerektiğini göstermektedir. Bu çalışmanın, öğrencilerin dörtgenlerde alan konusundaki zihinsel yapılarını derinlemesine ve ilişkili konular ile birlikte incelemesi bakımından, öğrencilerin konuyu öğrenmelerini geliştirmek ve etkili öğrenme-öğretme ortamlarının oluşturulması adına önemli olduğu düşünülmektedir. Bu bağlamda, bu çalışmanın bulguları, öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu nasıl öğrendikleri konusunda fikir vererek konunun öğretimi için gerekli planlamaların yapılmasına katkı sağlayabilir. Bu çalışmada öğrencilerin dörtgenlerde alan konusunu öğrenmelerinin yeterli olmadığı ortaya çıktığından, sonraki çalışmalarda öğrencilerin bu konudaki zihinsel yapılarının

çeşitli yöntem ve tekniklerle geliştirilmesine odaklanılabilir. Bu çerçevede, öğrencilerin formülleri kendilerinin oluşturmalarına, dörtgenleri birbiri ile ilişkilendirmelerine, hiyerarşik ilişkiyi ve sağladığı bilgileri aktif kullanmalarına, şekilleri ayrıştırma ve ayrışan parçaları yeniden birleştirme yoluyla dörtgenlerin alanlarını diğer dörtgenlerden yararlanarak bulmalarına, dinamik düşüncelerine ve farklı çözüm yolları üretmelerine imkân veren zengin öğrenme ortamları tasarlanabilir. Böylece müfredatlarda gerekli iyileştirmeler yapılarak öğrencilerin konuyu etkili öğrenmelerine katkı sağlanabilir.

KAYNAKÇA

- Afriansyah, E. A., & Arwadi, F. (2021). Learning trajectory of quadrilateral applying realistic mathematics education: Origami-based tasks. *Mathematics Teaching Research Journal*, 13(4), 42-78. https://www.researchgate.net/publication/361426806_Learning_Trajectory_of_Quadrilateral_Applying_Realistic_Mathematics_Education_Origami-Based_Tasks
- Altıkardeş, E., & Yiğit-Koyunkaya, M. (2020). Matematik temelli çeşitli teknoloji uygulamalarının lise öğrencilerinin katı cisim ve boyut konularındaki algılarına etkisinin incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 39(1), 40-68. <https://doi.org/10.7822/omuefd.586755>
- Altun, M. (2008). *İlköğretim ikinci kademe (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi* (5. baskı). Bursa: Aktüel Yayınları.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, NY: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. Schoenfeld and E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II, CBMS issues in mathematics education* (Vol.2, pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Avcu, R. (2023). Pre-service middle school mathematics teachers' personal concept definitions of special quadrilaterals. *Mathematics Education Research Journal*, 35(4), 743-788. <http://dx.doi.org/10.1007/s13394-022-00412-2>
- Ayaz, Ü. B. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin kavram imajları* [Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Balgalmış, E., & Işık-Ceyhan, E. (2019). Dörtgenlerin ilişkilendirme becerisinin gelişimine yönelik öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin erişim düzeylerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(1), 130-156. <https://doi.org/10.16949/turkbilmat.393116>
- Boz-Yaman, B., & Yiğit-Koyunkaya, M. (2019). Examination of pre-service mathematics teachers' mental constructions of function transformation. *Acta Didactica Napocensia*, 12(1), 33-56. <http://dx.doi.org/10.24193/adn.12.1.3>
- Brunheira, L., & J. P.d. Ponte. (2019). From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 65-80. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.004>

- Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2024). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (35. baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D.,...Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2)
- Creswell J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (4th edition). Los Angeles, CA: Sage Publications.
- Çakmak-Gürel, Z., & Okur, M. (2016). Ortaokul 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 922-952. <https://doi.org/10.17556/jef.30116>
- Çavuş-Erdem, Z. (2018). *Alan ölçümü bağlamında matematiksel modelleme etkinliklerine dayalı öğrenme sürecinin incelenmesi* [Doktora tezi, Adıyaman Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Çontay, E. G., & Duatepe-Paksu, A. (2022). 8. sınıf öğrencilerinin karenin tanımıyla ilişkili anlayışları. *Erciyes Journal of Education*, 6(2), 166-190. <https://doi.org/10.32433/eje.1053357>
- Deniz, Ö. (2014). *8. sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğitim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Anadolu Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E., & Wilson, R. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.001>
- Eker, E. (2014). *Ortaokul 5. sınıf matematik dersinde uzunluk ölçme, dörtgenler, çevre ve alan ünitesinin aktif öğrenme yaklaşımına uygun olarak öğretiminin öğrenci başarısına ve tutumuna etkisi* [Yüksek lisans tezi, Okan Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Erez, M., & Yerushalmy, M. (2006). If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle: Young students' experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271-299. <http://dx.doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7>
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>
- Fujita, T., Doney, J., & Wegerif, R. (2019). Students' collaborative decision-making processes in defining and classifying quadrilaterals: A semiotic/dialogic approach. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 341-356. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-019-09892-9>
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learner's understanding of the definitions and classifications of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9, 3-20. <http://dx.doi.org/10.1080/14794800008520167>

- Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. and Stehlíková, N. (Eds.), In *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME30)*. International group for the psychology of mathematics education (pp. 129-136).
- Gal, H., & Lew, H. C., (2008, July 6-13). *Is a rectangle a parallelogram? Towards a bypass of Van Hiele level 3 decision making*. Topic Study Group 18. ICME 11. Monterrey, Mexico. https://www.researchgate.net/publication/344351933_Is_a_Rectangle_a_Parallelogram_-_Towards_a_Bypass_of_Van_Hiele_Level_3_Decision_Making
- Gülsoy, D., & Çekmez, E. (2022). Etkinlik temelli öğretimin öğrencilerin dörtgenlerin alan ölçümüne ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgilerine etkisinin incelenmesi. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 11(2), 263-275. <https://doi.org/10.30703/cije.890306>
- Güven-Akdeniz, D. (2018). *Öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin uzunluk kavramına ilişkin öğrenme yol haritaları: Öğretim deneyi* [Doktora tezi, Gazi Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Hartono, S. (2020). Effectiveness of Geometer's Sketchpad learning in quadrilaterals. *Mathematics Teaching-Research Journal*, 12(3), 84-93.
- Hoong, Y. H. (2012). Lesson study on the area of a parallelogram for year 7 students. *The Australian Association of Mathematics Teachers*, 68(2), 14-21.
- Huang, H. M. E., & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction*, 21(1), 1–13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.09.002>
- Huang, H. M. E., & Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10-26. <http://dx.doi.org/10.5430/jct.v2n1p10>
- Kayış, E. (2019). *Dörtgenlerin sınıflandırılması ve alan bağıntılarının oluşturulması konularında işbirlikli öğrenme yöntemiyle tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* [Yüksek lisans tezi, Trabzon Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Kosasih, U., Gita, T. W., & Nurjanah. (2024). Creative thinking ability in quadrilateral learning with pos math game. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(2), 449-460. <https://doi.org/10.31980/mosharafa.v13i2.1049>
- Kusuma, M. A., Susanto, Yuliati, N., Maharani, P., & Hasanah, N. (2021). Thinking process of 7th class students in understanding quadrilateral concepts based on Van Hiele theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 1839, 1-8. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1839/1/012012>
- Lehman, T. H. (2022). Learning to measure the area of quadrilaterals through decomposition and recomposition. *Journal of Mathematical Behavior*, 66(2022), 1-25. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100952>
- Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*, 71(71), 41-52. <http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v0i71.6>
- Manizade, A. G., & Mason, M. M. (2014). Developing the area of a trapezoid. *The Mathematics Teacher*, 107(7), 508–514. <http://dx.doi.org/10.5951/mathteacher.107.7.0508>

- Martínez-Planell, R., & Cruz Delgado, A. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 11-133. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.002>
- Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2020). Teachers using GeoGebra to visualize and verify conjectures about trapezoids. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(3), 1-19. <https://doi.org/10.1007/s42330-020-00103-9>
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018a). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Ankara: MEB Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018b). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı (hazırlık, 9, 10, 11 ve 12. sınıflar)*. Ankara: MEB Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2024a). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı (hazırlık, 9, 10, 11 ve 12. sınıflar)*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2024b). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı (5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basımevi.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2024c). *İlkokul matematik dersi öğretim programı (1, 2, 3 ve 4. sınıflar)*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basımevi.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd edition). California: SAGE Publications.
- Miller, S. M. (2018). An analysis of the form and content of quadrilateral definitions composed by novice pre-service teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50(1), 142-154. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.006>
- Mutluoğlu, A., & Erdoğan, A. (2020). 6. sınıf öğrencilerinin dörtgenler hakkındaki geometrik muhakeme süreçleri. *OPUS - Uluslararası Toplum Araştırmaları Dergisi*, 16(28), 125-144. <http://dx.doi.org/10.26466/opus.673833>
- Nadjib, A. (2016). Analisis kesalahan pemahaman dalam materi segiempat menurut tingkat berpikir Van Hiele pada siswa smp negeri 1 suppa kabupaten pinrang. *Pepatudzu: Media Pendidikan dan Sosial Kemasyarakatan*, 8(1), 14-23.
- Ndlovu, M. (2014). Pre-service teachers' understanding of geometrical definitions and class inclusion: An analysis using the Van Hiele model. In L. G. Chova, A. L. Martínez and I. C. Torres (Eds.), *INTED 2014 proceedings* (pp. 6642–6652). Valencia, Spain: International Academy of Technology, Education and Development.
- Nisiyatussani, Ayuningtyas, V., Fathurrohman, M., & Anriani, N. (2018). Geogebra applets design and development for junior high school students to learn quadrilateral mathematics concepts. *Journal on Mathematics Education*, 9(1), 27-40. <http://dx.doi.org/10.22342/jme.9.1.4162.27-40>
- Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. Woo, H. Lew, K. Park and D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol: 4, pp.41-48). Seoul: PME.
- Öksüz, R. (2018). *5. sınıf öğrencilerinin kesir kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

- Özçakır, B., & Çakıroğlu, E. (2017). Ortaokul 7. sınıfta dörtgenlerin alan bağıntılarını oluşturma sürecinde dinamik geometri yazılımlarının kullanılması. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(1), 231 – 248.
- Özkan, K. (2019). *Farklı öğretim kademesindeki öğrencilerin dörtgenlere ilişkin bilgi düzeyleri ve kavram yanlışlarının incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Uşak Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Pickreign, J. (2007). Rectangle and rhombi: How well do pre-service teachers know them? *Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-7. <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ835492.pdf>
- Rahayu, N. S., & Afriansyah, E. A. (2021). Miskonsepsi siswa SMP pada materi bangun datar segiempat. *Plusminus: Jurnal Pendidikan Matematika*, 1(1), 17-32. <http://dx.doi.org/10.31980/plusminus.v1i1.1023>
- Rahma, N. A. (2023). The effect of implementation of attention relevance confidence satisfaction learning model on interests and learning outcomes of students on quadrilateral materials. *Indonesian Journal of Education & Mathematical Science*, 4(2), 63-72. <https://doi.org/10.30596/ijems.v4i2.14576>
- Rohaeti, E. E., Nurjaman, A., Sari, I. P., Bernard, M., & Hidayat, W. (2019). Developing didactic design in triangle and rectangular toward students mathematical creative thinking through Visual Basic for PowerPoint. *Journal of Physics: Conf. Series*, 1157, 1-6. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1157/4/042068>
- Smith, J. P., & Barrett, J. E. (2017). Learning and teaching measurement: Coordinating quantity and number. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 355–385). National Council of Teachers of Mathematics.
- Smith, J. P., Males, L. M., & Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(4), 239-270. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930>
- Şefik, Ö. (2017). *Öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamalarının APOS teorisi ile analizi* [Yüksek lisans tezi, Hacettepe Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Tan-Şişman, G., & Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online*, 8(1), 243-253.
- Tan-Şişman, G., & Aksu, M. (2012). The length measurement in the Turkish mathematics curriculum: Its potential to contribute to students' learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 363-385. <http://dx.doi.org/10.1007/s10763-011-9304-1>
- Tan-Şişman, G., & Aksu, M. (2016). Altıncı sınıf öğrencilerinin uzunluk, alan ve hacim konusundaki mekânsal ölçümlerdeki yanlış kavramaları ve hataları üzerine bir çalışma. *Uluslararası Bilim ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 14, 1293–1319. <http://dx.doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5>
- Tomooğlu, Ö., & Kurtuluş, A. (2020). Altıncı sınıfta üçgen ve paralelkenarın alanını ölçmeye yönelik 5E öğretim modelinin kullanılması: Bir eylem araştırması. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Türk Dünyası Uygulama ve Araştırma Merkezi (ESTÜDAM) Eğitim Dergisi*, 5(2), 184-205.

- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5>
- Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. In *Annales de didactique et de sciences cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques* (Vol. 10, pp. 157–176). IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur.
- Tûmová, V. (2017, February 1-5). *What influences grade 6 to 9 pupils' success in solving conceptual tasks on area and volume*. CERME 10. Dublin, Ireland. hal-01925500f. https://www.researchgate.net/publication/322796059_What_influences_grade_6_to_9_pupils'_success_in_solving_conceptual_tasks_on_area_and_volume
- Ural, A. (2011). Matematik öğretmen adaylarının boyut ölçütleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(Temmuz 2011/II), 13-25.
- Vincent, J., & Stacey, K. (2009). Finding the area of a trapezium: Theme and variations. *The Australian Mathematics Teacher*, 65(2), 13-16. <https://eric.ed.gov/?redir=http%3a%2f%2fwww.aamt.edu.au%2fWebshop%2fEntire-catalogue%2fAustralian-Mathematics-Teacher>
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi.
- Yıldız, Ş., & Ezentaş, R. (2018). Ortaöğretim öğrencilerinin geometrik kavramlara ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin APOS teorisi çerçevesinde incelenmesi. *Journal of Computer and Education Research*, 12(24), 666-688. <http://dx.doi.org/10.18009/jcer.1512998>
- Yigit, M. (2014). *Learning of trigonometry: An examination of pre-service secondary mathematics teachers' trigonometric ratios schema* [Doctoral dissertation, Purdue University]. ProQuest Dissertations and Theses Global.
- Yin, R. (2018). *Case study research: Design and methods* (6th ed.). London: Sage.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224-239. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003>

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The main purpose of this study is to examine undergraduate students', who were enrolled in secondary mathematics education, existing mental structures regarding the subject of area in quadrilaterals. With this study, it is aimed to determine the students' mental structures in detail in relation to the topics of dimension, measurement, area in triangles, area in general and special quadrilaterals and the use of hierarchical relationship in the context of area. The theoretical background of the study is APOS learning theory. The theory takes its name from the combination of the first letters of the words Action, Process, Object and Shema, which are the components of the framework. According to this theory developed by Dubinsky and colleagues, individuals construct mental structures named as Action, Process, Object and Schema while making sense of mathematical concepts. Later on, the theory designed by Dubinsky et al. was developed and new mental structures were added to the theory. One of these mental structures is the Emerging Process (Arnon et al., 2014).

Method

In this study, which was designed with a case study design, 4 volunteer students studying in the first year of the Mathematics Teaching undergraduate programme of a state university in the autumn semester of the 2021-2022 academic year participated. The students were determined using convenience sampling, one of the non-random sampling methods, and criterion sampling, one of the purposive sampling methods (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz, & Demirel, 2020). The data group of the study consists of 19 questions including sub-questions that were given to the students in writing and asked to solve, and video recordings of clinical interviews conducted individually with the students on their answers to these questions. Some of the questions were prepared jointly by the researchers, and some of them were taken directly from the sources reached as a result of the literature review or were inspired and modified. The questions were determined to include the subject of area in quadrilaterals and every subject thought to be related to this subject. Students were not given any time limitations to answer these questions. The data of the study were analysed by descriptive analysis method in the light of the adopted learning theory.

Results and Discussion

How the students constructed the area in quadrilaterals in their minds was analysed under three main subheadings: 'Dimension', 'Measurement' and 'Area'. The analyses showed that the 'Dimension' component consisted of two subcomponents, namely the concept of dimension and dimensionless, 1, 2 and 3 dimensional shapes and their properties, and their interactions. Within the scope of these two subcomponents, it was revealed that two students were at the action level and two students were at the emerging process level. It was determined that the 'measurement' component consisted of three subcomponents, namely the concept of measurement, measurement operations that can be performed in dimensionless, 1, 2 and 3-dimensional shapes and making measurement operations, and their interaction with each other. Within the subcomponent of the concept of measurement, two students were at the action level and two students were at the emerging process level; within the subcomponent of measurement operations that can be performed in dimensionless, 1, 2 and 3 dimensional shapes, one student was at the action level, two students were at the emerging process level and one student was at the process level; within the subcomponent of making measurement operations, all students were at the emerging process level. The analyses showed that the 'Area' component consisted of five subcomponents: (1) the concept of area, (2) areas of shapes with different dimensions, (3) area measurement, (4) area in triangles, and (5) area in quadrilaterals. Within the subcomponent of the concept of area, three students were at the emerging process level and one student was at the process level; within the subcomponent of areas of shapes with different dimensions, one student was at the action level, two students were at the emerging process level and one student was at the process level; and within the subcomponent of area measurement, all students were at the emerging process level. Within the scope of the subcomponent of area in triangles, it was determined that two students were at the emerging process level and two students were at the process level. Finally, within the scope of the subcomponent of area in quadrilaterals, it was observed that all students were at the emerging process level.

The findings of the study showed that students' area diagrams in quadrilaterals should be improved. Within the scope of the dimension and measurement components, students were generally at the action or emerging process level, and within the scope of the area component, students were generally at the emerging process level. It was revealed that students could not reach the object and schema levels within the scope of any component. From this point of view, future studies can focus on the development of students' area schemas in quadrilaterals. By using the framework that emerged as a result of this study and that shows students' mental structures towards the subject of area in quadrilaterals, instruction can be designed to enable students to learn the subject effectively.

EKLER

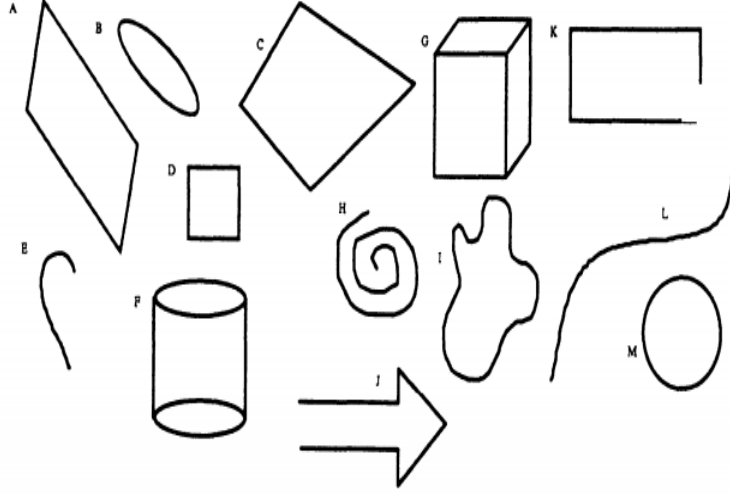
Ek-1

SORULAR

1)a.Boyut, ölçme ve alan kavramlarını tanımlar mısın?

b.Sence bu kavramlar arasında bir ilişki var mı? Varsa nasıl? Örnekler verir misin?

2)



a.Yukarıdaki şekillerin alanlarını nasıl hesaplarsın?

b.Yukarıdaki şekillerden uzunluğu ve alanı içeren şekilleri belirtir misin? Neden bu şekli seçtin/seçmedin?

c.Alanını ölçebildiğin şekillerin özellikleri için ne söylersin? Gerekçelerini açıklar mısın?

d.Alan göstermesi için Şekil J üzerinde nasıl bir işlem yapabilirsin? Neden?

(Batur ve Nason'dan (1996) esinlenilmiştir.)

3)a.

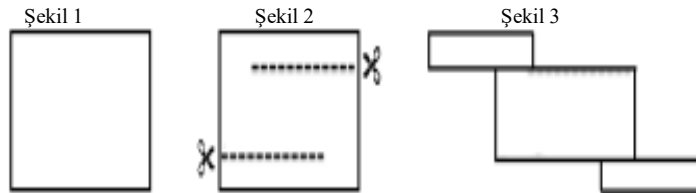


i)Yukarıdaki iki şeklin alanlarını karşılaştırır mısın?

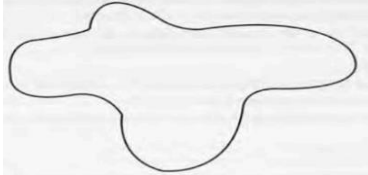
ii)Karşılaştırmak için başka bir yol düşünebilir misin?

(Batur ve Nason'dan (1996) esinlenilmiştir.)

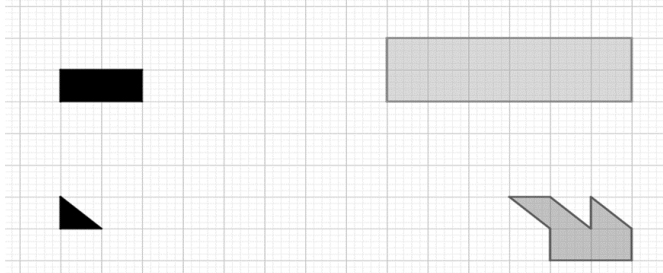
b.Şekil 1'de verilen dikdörtgen kağıt, Şekil 2'de gösterildiği şekilde her iki kenarından bir miktar kesilerek, kesildiği tarafın ters yönünde katlanmış ve Şekil 3 oluşturulmuştur. Oluşturulan 3. şeklin alanı ile 1. şeklin alanını karşılaştırır mısın? Gerekçelerini açıklar mısın? (Çavuş-Erdem'den (2018) esinlenilmiştir.)



4)Şekildeki alanı nasıl bulursun? (Simon, 1995)



5)



a.Yukarıdaki gri şekillerin alanlarını, sol taraflarında verilen siyah şekiller cinsinden ifade edebilir misin? Nasıl? (Arka plan eş karelerle kaplıdır.)

b.Siyah parçalar cinsinden bulduğun sonuçlar ile ölçme, ölçü birimi ve ölçüm sonucu kavramlarını ilişkilendirir misin? Bu açıdan bulduğun sonuçların anlamını yorumlar mısın?

(Zacharos'dan (2006) esinlenilmiştir.)

6)

GRUP	ŞEKİL A	ŞEKİL B
Grup 1	27 üçgen	20 kare
Grup 2	18 kare	26 kare
Grup 3	12 cm ²	18 cm ²

a.Yukarıdaki her grupta Şekil A, Şekil B'den farklı bir alana sahiptir. Verilen ölçümlerden, her bir grup için hangi şeklin alanının daha büyük olduğunu söyleyebilir misin? Gerekçelerini açıklar mısın?

b. Şekil A ve Şekil B'nin alanları eşit olsaydı, Grup 1'deki üçgen ve kare ölçü birimleri ile Grup 2'deki kare ölçü birimleri hakkında ne söyledin? Gerekçelerini açıklar mısın?

(Baturo ve Nason'dan (1996) esinlenilmiştir.)

7)a.Herhangi bir üçgenin alanını hesaplayabilmek için üçgenin hangi bileşenlerinin ölçülerini bilmek gerekli ve yeterli olabilir?

b.Herhangi bir dik üçgenin alanını nasıl hesaplırsın? Başka?

c.Dik üçgenin alan formülü nasıl elde edilir? Başka?

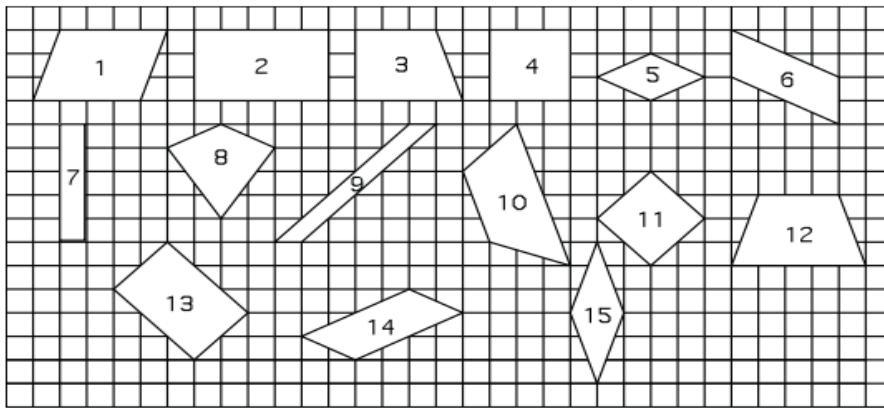
d.Herhangi bir eşkenar üçgenin alanını nasıl hesaplırsın? Başka?

e.Eşkenar üçgenin alan formülü nasıl elde edilir? Başka?

8)a. Bir üçgeni alanları eşit 2 parçaya ayırmak için ne yaparsın? Neden? Başka?

b.Bir üçgeni alanları eşit 3 parçaya ayırmak için ne yaparsın? Neden? Başka? Peki 4? Peki 5? Bir genelleme yapabilir misin?

9)



(Bu sorunun tüm şıklarında Fujita'dan (2012) esinlenilmiştir.)

a.Yukarıdaki 1-15 numaralı dörtgenden hangileri

- Yamuk ailesinin üyeleridir? Neden?
- Paralelkenar ailesinin üyeleridir? Neden?
- Eşkenar dörtgen ailesinin üyeleridir? Neden?
- Dikdörtgen ailesinin üyeleridir? Neden?
- Kare ailesinin üyeleridir? Neden?
- Deltoid ailesinin üyeleridir? Neden?

b.Yamuğu tanımlar mısın?

c.Yamuk ile ilgili aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu değerlendir misin? Gerekçelerini açıkla mısın?

İfadeler	Değerlendirmeler
Karşılıklı kenarları paraleldir.	
Sadece iki kenarı paraleldir.	
En az iki kenarı paraleldir.	
Karşılıklı iç açılarının ölçüleri eşittir.	
Ardışık iki iç açının ölçüleri toplamı 180 derecedir.	
Paralel kenarların diğer kenarlardan herhangi biriyle oluşturduğu iki iç açının ölçüleri toplamı 180 derecedir.	
Paralel olan kenarların uzunlukları eşittir.	

d.Paralelkenarı tanımlar mısın?

e.Paralelkenar ile ilgili aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu değerlendir misin? Gerekçelerini açıkla mısın?

İfadeler	Değerlendirmeler
Dik açıları olan bir paralelkenar vardır.	
Karşılıklı kenarlarının uzunlukları eşittir.	
Karşılıklı iç açılarının ölçüleri eşittir.	
Dört kenarının uzunluğu eşit olan bir paralelkenar vardır.	
Bazı paralelkenarların ikiden fazla simetri ekseni vardır.	

f.Dört köşesi bir dairenin çevresinde olan bir paralelkenar çizmek mümkün mü? Neden?

g.Dikdörtgeni tanımlar mısın?

h.Dikdörtgen ile ilgili aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu değerlendir misin? Gerekçelerini açıkla mısın?

İfadeler	Değerlendirmeler
Karşılıklı kenarlarının uzunlukları eşittir.	
Karşılıklı iç açılarının ölçüleri eşittir.	
Dört kenar uzunluğu eşit olan bir dikdörtgen vardır.	
Bazı dikdörtgenlerin ikiden fazla simetri ekseni vardır.	

ı.Kareyi tanımlar mısın?

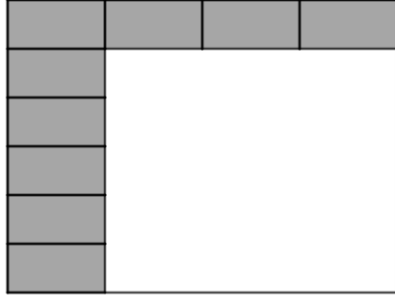
j.Kare ile ilgili aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu değerlendir misin? Gerekçelerini açıkla mısın?

İfadeler	Değerlendirmeler
Sadece karşılıklı kenarlarının uzunlukları eşittir.	
Karşılıklı kenarlarının uzunlukları eşittir.	
Tüm kenarlarının uzunlukları eşittir.	
Tüm iç açılarının ölçüsü 90 derecedir.	
Karşılıklı iç açılarının ölçüleri eşittir.	
Ardışık gelen iç açılarının ölçüleri toplamı 180 derecedir.	

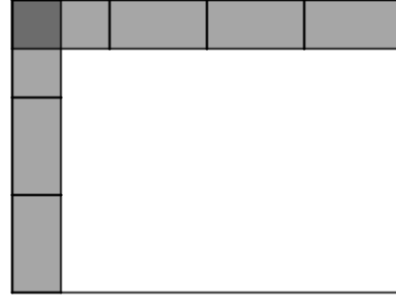
k.Eşkenar dörtgeni tanımlar mısın?

c.A noktasından birer lastik E ve F noktalarındaki çivilere tutturulursa, oluşan bölgelerin alanları hakkında ne söyleyebilirsin? Ek olarak E ve F noktalarına da bir lastik tutturursan oluşan bölgelerin alanları nasıl değişir? Neden?
(Ortaöğretim 11. Sınıf Geometri Ders Kitabı'ndan (2014) esinlenilmiştir.)

15) Aşağıdaki büyük dikdörtgenin alanını, verilen gri dikdörtgeni a ve b şekillerinde gösterildiği gibi dizerek gri dikdörtgen cinsinden bulabilir misin? Nasıl? Neden? (Simon ve Blume'dan (1994) esinlenilmiştir.)



(a)



(b)

16) Uzunluk ve genişlik kullanılarak bir alan nasıl üretilir? (Kamii ve Kysh'dan (2006) esinlenilmiştir.)

17) Kenarları 4m ve 6m olan bir dikdörtgenin alanını 2 katına çıkarmak için kenarlarda nasıl bir değişim yapmak gerekir? Açıklar mısın? Başka hangi yollarla alanı 2 katına çıkarabilirsin?

18)a. Karenin bir kenar uzunluğu 3 birim arttırılıp, diğer kenar uzunluğu 3 birim azaltıldığında alanında bir değişim olur mu? Olursa nasıl?

b. Karenin alanını 4 katına çıkarmak için nasıl bir yol izlersin? Başka?

19)a. Aynı alana sahip iki şeklin çevreleri farklı olabilir mi? Neden? Örnek verir misin? (Çavuş-Erdem'den (2018) esinlenilmiştir.)

b. Ayşe, elindeki 3 adet 90 cm uzunluğundaki tel parçası ile aşağıdaki şekilleri oluşturmuştur. Bu şekillerin alanlarını karşılaştırabilir misin? Nasıl? (Çavuş-Erdem'den (2018) esinlenilmiştir.)

