BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING
Volume 6(1), 2013, 1-9

DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİNİN REZİDÜ ÇÖZÜMÜ ve SABİT GERİLİM KAYNAKLI RC DEVRESİ PROBLEMİNE UYGULANMASI

Bahaddin SİNSOYSAL, Mahir RASULOV
Beykent Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik-Bilgisayar Bölümü,
Ayazağa Maslak Yerleşkesi, 34396, İstanbul, Türkiye
bsinsoysal@beykent.edu.tr
mresulov@beykent.edu.tr

ÖZET

Makalede sabit katsayılı adi diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış Cauchy probleminin rezidü metodu ile gerçek çözümü elde edilmiş ve söz konusu metot uygulanarak sabit gerilimli bir RC devre probleminin çözümünün bulunması için uygulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Rezidü yöntemi, adi diferansiyel denklemler sistemi, gerçek çözüm, RC devresi

ABSTRACT

Residue Solution of System of Differential Equations and its Application to RC Circuit Problem

In this paper the exact solution of the Cauchy problem of the system of ordinary differential equations with constant coefficients is obtained using the residue method. This method has been applied to find the exact solution of the constant voltage of a RC circuit problem.

Keywords: Residue method, System of ordinary differential equations, Exact solution, RC circuit

1 GİRİŞ

Mühendisliğin birçok dalında, özellikle elektrik teknolojisinde, tıpta, biyolojide sık rastlanan pratik problemlerin teorik incelenmesi adi diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış başlangıç değer probleminin çözümüne indirgenir. Söz konusu problemin çözümünü elde etmek için seçilen yöntemler genelde sistemin katsayılarından oluşturulan matrisin yapısına bağlı olur. Örneğin, iyi tanımlanmamış matrislere sahip olan problemlerin çözümünü elde etmek için uygulanan metotlarda bazı zorluklarla karşılaşılabilir. Diğer taraftan katlı özdeğerlere sahip olan problemlerde temel çözümler sisteminin tamlığı konusuna da özel olarak dikkat edilmelidir.

Adi diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış problemlerin çözümünde kullanılan pratik yöntemlerden biri de temeli Cauchy tarafından konulan rezidü metodudur, [3]. Daha sonraları rezidü metodu kısmi türevli diferansiyel denklem ve denklemler sistemi için yazılmış başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemleri için [1]'de geliştirilmiştir.

Rezidü yöntemini kullanarak [5]-[7] de self adjoint olmayan bir sınıf pratik önem taşıyan problemlerin çözümü bulunmuştur.

Bu makalede elektrik konusunda ortaya çıkan, sabit gerilim kaynaklı RC devresini ifade eden diferansiyel denklemler sisteminin uygun başlangıç koşulu çerçevesinde gerçek çözümü elde edilmiştir. Bunun için rezidü yöntemi normal şekilde yazılmış diferansiyel denklemler sisteminin çözümünün bulunması için uygulanmıştır.

2 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN REZİDÜ YÖNTEMİ

Aşağıdaki vektör şekilde yazılmış

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

adi diferansiyel denklemler sistemini göz önüne alalım. Burada $x = colon(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bilinmeyen vektör fonksiyon, A ise a_{ij}, $(i,j = 1,2,\dots,n)$ elemanlarından oluşan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22\dots} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

biçiminde sabit bir matristir. Şimdi,

$$x_i(t) = \operatorname{Res} \frac{e^{\lambda t}\, \varphi_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (i = \overline{1,n})$$

ifadelerinin (1) sisteminin çözümü olduğunu gösterelim. Burada $\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)dz$ anlamında kullanılmaktadır. c eğrisi $f(z)$ nin singüler noktasını içeren bir çember, $\Delta(\lambda)$ ise (1) sistemine karşılık gelen

$$\Delta(\lambda) = det(A - \lambda I) \tag{2}$$

karakteristik determinantıdır ve $\varphi(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ ile ortak sıfırlara sahip olmayan tam fonksiyon, I ise $n \times n$ boyutlu birim matristir.

(2) ifadesini açık şekilde yazılmış (1) sisteminde yerine yazarsak

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{-a_{i1}\varphi_1(\lambda) - \dots - (a_{ii} - \lambda)\varphi_i(\lambda) - \dots - a_{in}\varphi_n(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right\} e^{\lambda t} = 0, \quad (i = \overline{1,n})$$

alırız. Bu eşitliğin korunması için, α_i, $(i = \overline{1,n})$ ler keyfi sabitler olmak üzere

$$-a_{i1}\varphi_1(\lambda) - \dots - (a_{ii} - \lambda)\varphi_i(\lambda) - \dots - a_{in}\varphi_n(\lambda) = \alpha_i \Delta(\lambda)$$

eşitliğinin korunması yeterlidir. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}(\lambda)\alpha, \quad (i = \overline{1,n}) \tag{3}$$

sonuncu sistemin çözümü olur. Burada $\frac{Q_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, $(i, j = \overline{1,n})$

$$\lambda I\text{–}A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{11} \dots & -a_{2n} \\ -a_{n1} & a_{n2} \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

matrisinin tersinin elemanları olmaktadır, yani

$$(\lambda I - A)\left(\frac{Q_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)_{i,j=1} = I$$

dır. Buradan $Q_{ij}(\lambda)$ lerin $i = j$ olduğunda λ ya göre $(n-1)$. dereceden, $i \neq j$ olduğunda ise $(n-2)$. dereceden polinom olduğu açıkça görülmektedir. Böylelikle, (1) sisteminin çözümleri n tane α_i, $(i=\overline{1,n})$ sabitlerini içeren

$$x_i(t) = \operatorname{Res}\frac{\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(\lambda)\alpha_j}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t}, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{5}$$

fonksiyonları olmaktadır. Ayrıca bu çözümler $t=0$ da

$$x_i(0) = \alpha_i, \ (i=\overline{1,n}) \tag{6}$$

koşullarını da korumaktadır. Gerçekten de $Q_{ij}(\lambda)$ fonksiyonları $i \neq j$ olduğunda $(n-2)$. dereceden, $\Delta(\lambda)$ ise n. dereceden polinom olduğu için, $\operatorname{Res}\frac{Q_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 0$ olur. $Q_{ij}(\lambda)$, $i=j$ olduğunda $(n-1)$. dereceden, $\Delta(\lambda)$ ise n. dereceden polinom olduğu için onların en yüksek dereceli terimindeki katsayıları bire eşit olur. Buna göre de $\operatorname{Res}\frac{Q_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 1$ olur. Böylelikle (5) den

$$x_i(0) = \operatorname{Res}\frac{Q_{ij}(\lambda)\alpha_i}{\Delta(\lambda)} = \alpha_i, \quad (i=\overline{1,n})$$

elde ederiz.

2.1 Homojen Olmayan Denklemler Sistemi

$$\frac{dx_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = f_i(t), \ (i=\overline{1,n}) \tag{7}$$

sistemini göz önüne alalım. Görüldüğü gibi, $f_i(t) \equiv 0$, $(i=\overline{1,n})$ olduğu durumda (7) sistemin çözümü (5) formülü ile ifade edilir.

Sabitin varyasyonu yönteminde olduğu gibi homojen olmayan denklemler sisteminin en azından i nin herhangi bir değeri için, çözümünü elde ederken α_i nin t ye bağlı olduğunu varsayacağız. Böylelikle (7) sisteminin çözümünü

$$x_i(t) = \operatorname{Res}\frac{\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(\lambda)\alpha_i(t)}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t}, \ (i=\overline{1,n}) \tag{8}$$

şeklinde arayacağız. Kolaylık için denklemler sistemini matris şeklinde yazalım, yani (7) sistemini

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)x = f(t) \tag{9}$$

gibi yazalım. Burada x ve f uygun elemanlardan oluşan sütun vektörler olmaktadır. (5) formülünü matris formda

$$x(t) = Res\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\alpha(t)$$

olarak yazabiliriz. Burada $\alpha(t) = colon(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ dir. Bu ifadeyi (9) da yerine yazarak

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)x(t) = \text{Res}\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}\alpha(t)$$

$$+\text{Res}\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt} = \text{Res}\, e^{\lambda t}\alpha(t) + \quad (10)$$

$$+\text{Res}\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt} = \text{Res}\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt}$$

alırız. $e^{\lambda t}$ nin rezidüsü sıfıra eşit olduğundan

$$\text{Res}\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt} = f(t) \quad (11)$$

olur. (11) eşitliğinin korunması için

$$e^{\lambda t}\frac{d\alpha(t)}{dt} = f(t) \quad (12)$$

yazmak yeterlidir. $(\lambda I - A)^{-1}$ matrisinin elemanları $\frac{Q_{ij}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olduğundan tam rezidü $i = j$ olduğunda bire, $i \neq j$ olduğunda ise sıfıra eşit olmaktadır. (12) den

$$\alpha(t) = c + \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)d\tau \quad (13)$$

elde ederiz, burada $\boldsymbol{c} = colon(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ dir.

(5) çözümünün $t = 0$ olduğunda sıfıra eşit olması istenildiğinde $c = 0$ yazmak gerekmektedir. Bu koşul çerçevesinde (13) ifadesi (9) da yerine konursa $x(0) = 0$ koşulunu koruyan çözümünü

$$x(t) = \text{Res}(\lambda I - A)^{-1}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)d\tau \quad (14)$$

şeklinde elde ederiz. Böylelikle, (7), (6) Cauchy probleminin çözümü

$$x(t) = \text{Res}\, e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\alpha + \text{Res}\int_0^t (\lambda I - A)^{-1} e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)d\tau \quad (15)$$

şeklinde elde ederiz. Sonuncu eşitliği açık şekilde

$$x_i(t) = \text{Res}\, e^{\lambda t}\frac{\sum_{j=i}^{n} Q_{ij}(\lambda)\alpha_j}{\Delta(\lambda)} + \text{Res}\int_0^t \frac{\sum_{j=i}^{n} Q_{ij}(\lambda) f_j(\tau) e^{\lambda(t-\tau)}}{\Delta(\lambda)}d\tau \quad (16)$$

gibi yazabiliriz.

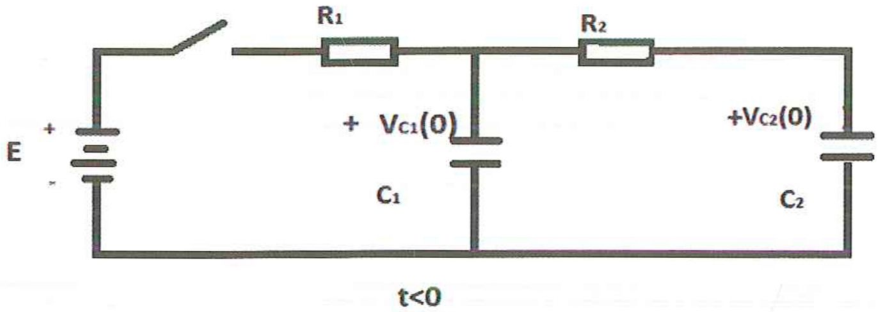
2.2 Sabit Gerilim Kaynaklı Bir RC Devresinin Rezidü Yöntemiyle Çözümü

Bu bölümde rezidü yöntemini Şekil 1 de gösterilen sabit gerilim kaynaklı bir RC devresinin çözümü için geliştireceğiz. Bu devrede S ile gösterilen anahtarın $t = 0$ anında kapatıldığını varsayalım. Anahtar kapatılmadan çok kısa bir zaman önce C_1 ve C_2 kondansatörlerinin uçlarındaki gerilimler gelişigüzel seçilmiş olan $V_{c1}(0^-)$ ve $V_{c2}(0^-)$ değerlerinde olsunlar. S anahtarı kapatıldığı an C_1 in ucundaki gerilim E değerine eşit olacaktır ve genel halde $V_{c1}(0^-) \neq E$ olduğundan, $V_{c1}(t)$ kapasite gerilimi $t = 0$ anında $V_{c1}(0^-)$ değerinden E değerine sıçrama yapacaktır. Benzer biçimde, C_2 kondansatörüne ilişkin $V_{c2}(t)$ geriliminin $t = 0$ anında $V_{c2}(0^-)$ değerinde kalıp kalmayacağı da açık değildir.

Söz konusu devreyi ifade edebilen diferansiyel denklemler sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{dV_1(t)}{dt} = -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)V_1 + \dfrac{1}{C_1R_2}V_2 + \dfrac{1}{C_1R_1}t, \\ \dfrac{dV_2(t)}{dt} = -\dfrac{1}{C_2R_2}V_1 + \dfrac{1}{C_2R_2}V_2 \end{cases} \tag{17}$$

olmaktadır.



Şekil 1

Örneğe sayısal olarak devam edebilmek için, $C_1 = C_2 = 10^{-6}F$, $R_1 = \frac{1}{3}10^6\ ohm$, $R_2 = \frac{1}{2}10^6\ ohm$, $E = 1\ volt$ alınmıştır.

(17) denklemler sistemini:

$$V_1(0) = 5,\ V_2(0) = 5 \tag{18}$$

başlangıç koşulu çerçevesinde çözeceğiz. (17), (18) problemini çözmek için

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{C_1R_2} \\ -\frac{1}{C_2R_2} & \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

matrisinin tersini bulalım. Bunun için aşağıdaki ifadeleri hesaplayalım

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+5 & -2 \\ -2 & \lambda+2 \end{pmatrix},\ det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 7\lambda + 6.$$

Diğer taraftan $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$ olduğundan $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -1$ elde ederiz. Bu ifadeler doğrultusunda

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 2 & \lambda+5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 2 & \lambda+5 \end{pmatrix}$$

olur. $(\lambda I - A)^{-1}$ matrisinin elemanlarını

$$Q_{11}(\lambda) = \lambda + 2,\quad Q_{12}(\lambda) = 2,\quad Q_{21}(\lambda) = 2,\ Q_{22}(\lambda) = \lambda + 5$$

olarak gösterelim. (16) formülüne göre

$$V_1(t) = \text{Res}\,\frac{\sum_{j=1}^{2} Q_{1j}(\lambda).\alpha_j}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} + \text{Res}\int_0^t \frac{\sum_{j=1}^{2} Q_{2j} f_j(\tau)}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda(t-\tau)} d\tau$$

$$= V_{11} + V_{12},$$

$$V_{11} = \text{Res}\,\frac{\sum_{j=1}^{2} Q_{1j}(\lambda)\alpha_j}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} = \text{Res}\,\frac{Q_{11}(\lambda)\alpha_1 + Q_{12}(\lambda)\alpha_2}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t}$$

$$= \frac{(\lambda_1+2)\,\alpha_1 + 2\alpha_2}{\Delta'(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2+2)\,\alpha_1 + 2\alpha_2}{\Delta'(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t}$$

$$= \frac{(-6+2)\,\alpha_1 + 2\alpha_2}{-5} e^{-6t} + \frac{(-1+2)\alpha_1 + 2\alpha_2}{5} e^{-t}$$

$$= \frac{(-4)\alpha_1 + 2\alpha_2}{-5} e^{-6t} + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{5} e^{-t} = 2e^{-6t} + 3e^{-t}$$

ve

$$V_{12} = \text{Res}\int_0^t \frac{Q_{11}(\lambda)\, f_1(\tau) + Q_{12}(\lambda)\, f_2(\tau)}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda(t-\tau)} d\tau$$

$$= Res\int_0^t \frac{-4.3 + 2.0}{-5} e^{-6(t-\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{3}{5} e^{-(t-\tau)} d\tau$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{-6t} + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\ e^{-t}$$

olur. Elde ettiğimiz ifadeler yerine konursa

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{4\,\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1}{5} e^{-6t} + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6}{5} e^{-t} + 1 \\ &= 3\frac{4}{5}(3e^{-t} + 2e^{-6t}) + 1 \end{aligned} \tag{20}$$

Benzer yolla $V_2(t)$ yi de hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \mathrm{Res}\frac{\sum_{j=1}^{2} Q_{2j}(\lambda)\alpha_j}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} \\ &\quad + \mathrm{Res}\int_0^t \frac{\sum_{j=1}^{2} Q_{2j} f_j(\tau)}{\Delta(\lambda)}\ e^{\lambda(t-\tau)} \\ &= \mathrm{Res}\frac{Q_{21}(\lambda)\alpha_1 + Q_{22}(\lambda)\alpha_2}{\Delta(\lambda)}\ e^{\lambda t} \\ &\quad + \mathrm{Res}\int_0^t \frac{Q_{21}(\lambda)\ f_1(\tau) + Q_{22}(\lambda)\ f_2(\tau)}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &= V_{21}(t) + V_{22}(t) \end{aligned} \tag{21}$$

Burada

$$V_{21}(t) = \frac{2\alpha_1 + (\lambda_1 + 5)\alpha_2}{\Delta'(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{2\,\alpha_1 + (\lambda_2 + 5)\alpha_2}{\Delta'(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} = -\ e^{-6t} + 6\ e^{-t}$$

ve

$$V_{22}(t) = \mathrm{Res}\ \int_0^t \frac{6\ e^{\lambda(t-\tau)}}{-5} d\tau = \int_0^t \frac{6\ e^{-6t}\ e^{6\tau}}{-5} d\tau + \int_0^t \frac{6\ e^{-t}\ e^{\tau}}{5}\ d\tau$$

$$= \frac{4}{5}(3e^{-t} + 2e^{-6t}) + 1$$

dır. Son olarak (17), (18) probleminin çözümünü

$$V_1(t) = \frac{4}{5}[\ 3e^{-t} + 2e^{-6t}\ ] + 1, \quad V_2(t) = \frac{4}{5}[\ 6e^{-t} - e^{-6t}\ ] + 1$$

şeklinde elde ederiz.

Bu probleme bizim dikkatimizi yönelten Prof. Dr. Adnan Kaypmaz'a teşekkürlerimizi sunarız.

3 Sonuçlar

Sabit katsayılı adi diferansiyel denklemler sistemi için yazılmış başlangıç değer probleminin gerçek çözümü elde edilmiştir.

Sabit gerilim kaynaklı bir RC devresinin rezidü yöntemiyle gerçek çözümü bulunmuştur.

KAYNAKÇA

[1] Rasulov, M.L., Methods of Contour Integration, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

[2] Tokad, Y., Devre Analizi Dersleri, Kısım IV, 1982.

[3] Cauchy, A.L., Memoira sur l'application du calcul des residus a'la solution des problems de physique mathematique VIII, Paris, 1827.

[4] Coddington, E.A., Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

[5] Rasulov, M., Sinsoysal, B., Residue Method of the Solution of Heat Equation with Nonlocal Boundary Condition, Beykent University *Journal of Science and Technology*, 2 (1), pp. 146-158, 2008.

[6] Sinsoysal, B., Residue Method for the Solution of Wave Equation with Nonlocal Boundary Condition, Beykent University Journal of Science and Technology, 3 (1), pp.74-81, 2009.

[7] Sinsoysal, B., Rasulov, M., Residue Method for the Solution of a 2D Linear Heat Equation with Nonlocal Boundary Conditions, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol.3, No.34, (2008) 1693-1700.