SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://www.saujs.sakarya.edu.tr

Geliş/Received
22.03.2018
Kabul/Accepted
21.03.2018

Doi
10.16984/saufenbilder.299354

Bulanık bozulma ve öğrenme etkileri altında tek makine erken/geç tamamlanma probleminin bulanık şans kısıtlı programlama tekniği ile incelenmesi

Oğuzhan Ahmet Arık*[1] M. Duran Toksarı[2]

ÖZ

Bu çalışmada tamamıyla bulanık ortamdaki tek makine çizelgeleme probleminde, öğrenme ve bozulma etkileri altındaki işlere ait ağırlıklı erken/geç tamamlanma maliyetlerinin en aza indirilmesi için bulanık karma tamsayılı doğrusal olmayan bir matematiksel model sunulmuştur. Çalışma içerisindeki işlem süreleri, öğrenme etkisi ve bozulma etkisi gibi parametreler belirsizlikleri nedeni ile bulanık sayılar olarak modellenmiştir. Öğrenme ve bozulma etkileri çizelgeleme problemlerinde yirmi yıldır oldukça ilgi görmektedirler. Erken/geç tamamlanma problemleri tam zamanında üretim felsefesini benimseyen üretim firmaları için oldukça önemlidir. Tam zamanında üretim yapan bir işletmenin gerçek hayat karmaşıklığını modelleyebilmek için bulanık küme teorisi ve erken/geç tamamlanma problemleri karma tamsayılı matematiksel modeller ile kullanılabilir. Bu çalışma içerisinde önerilen bulanık matematiksel modelin net eşleniğinin belirli güven aralıklarında oluşturularak çözülmesi için bulanık şans kısıtlı programlama tekniği kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tek makine, erken ve geç tamamlanma, bulanık parametreler, şans kısıtlı programlama, karma tam sayılı doğrusal olmayan bulanık programlama

Fuzzy chance constrained programming technique for single machine earliness/tardiness scheduling problem under effects of fuzzy learning and deterioration

ABSTRACT

To minimize total weighted earliness/tardiness costs of the jobs under effects of deterioration and learning on a single machine in a fully fuzzy environment, a mixed integer fuzzy non-linear mathematical programming model is presented in this study. Parameters in this study such as processing times, learning effect and deterioration effect are considered as fuzzy numbers because of their uncertainties. Learning and deterioration effects have been considered in scheduling problems for twenty years. Earliness/tardiness scheduling problems are significant for manufactures that adopt themselves in Just-in-Time philosophy. In order to model the real life complexity of Just-in-Time manufactures, earliness/tardiness scheduling problems can be used with mixed integer mathematical programming models. In this study, fuzzy chance

* Corresponding Author
[1] Industrial Engineering Department, Nuh Naci Yazgan University, 38170, Kayseri / Turkey, oaarik@nny.edu.tr
[2] Industrial Engineering Department, Erciyes University, 38280, Kayseri / Turkey, dtoksari@erciyes.edu.tr

constrained mathematical programming technique is used to find crisp equivalent of the proposed mixed integer fuzzy non-linear mathematical programming model and solve it.

Keywords: Single machine, earliness and tardiness, fuzzy parameters, chance constrained programming, fuzzy mixed integer nonlinear programming

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR İNCELEMESİ (INTRODUCTION AND LITERATURE REVIEW)

Bu çalışmada tek makine çizelgeleme problemleri bulanık işlem süreleri kullanılarak, bulanık öğrenme ve bozulma etkileri altında toplam ağırlıklı erken / geç (E/G) tamamlanma sürelerin en aza indirilmesi amaçlanmıştır. Literatürde model parametrelerini belirgin olarak kullanan bir çok çalışmaya rastlanabilmektedir. Biskup [1] makine çizelgeleme problemlerinde, öğrenme etkisini ortaya koyan ilk çalışmayı yapmıştır. Biskup'un ortaya koyduğu öğrenme etkisi sıra bağımlı öğrenme etkisi olarak literatüre geçmiştir. Mosheiov [2] Biskup'un öğrenme etkisi faktörünü, farklı amaç fonksiyonları için değerlendirmiş ve polinom zamanlı çözüm algoritmasına sahip olanları sıralamıştır. Ayrıca, Mosheiov [2] çalışmasında paralel makine çizelgeleme problemleri için ilk defa öğrenme etkisini incelemiştir. Mosheiov ve Sidney [3] iş bağımlı öğrenme etkisini ortaya koymuşlardır. Mosheiov ve Sidney [3], tek makine çizelgeleme problemlerinde yayılma süresinin ve toplam akış süresinin en aza indirilmesinde polinom zamanlı öncelik kurallarının kullanılabilir olduğunu ispat etmişlerdir. Ayrıca ilişkisiz paralel makine çizelgeleme problemleri için teslim tarihi atama problemini inceleyip, bu problemin iş bağımlı öğrenme etkisi altında polinom zamanlı öncelik kuralları ile çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Bachman ve Janiak [4] sıra bağımlı öğrenme etkisi altında çizelgeleme problemlerinin genel karmaşıklık yapısını ortaya koymuş ve hangi problemlerin hangilerine indirgenebileceğini göstermiştir. Kuo ve Yang [5] zaman bağımlı öğrenme etkisini literatüre kazandırmışlardır ve ayrıca tek makine çizelgeleme problemlerinde, toplam ağırlıklı tamamlanma süresini en aza indirmede en kısa işlem süresi (EKİS) öncelik kuralının optimum çizelgeyi verdiğini ispatlamışlardır. Koulamas ve Kyparisis [6] EKİS öncelik kuralının öğrenme etkisi altındaki iki makineli akış tipi atölye problemlerinde de optimum çizelgeyi verdiğini göstermişlerdir. Eren ve Güner [7] öğrenme etkisi altındaki, toplam geç kalma süresini en aza indirmeyi amaçlayan çizelgeleme problemleri için karma tamsayılı matematiksel model ortaya koymuşlardır. Ayrıca, çalışmalarında, toplam geç kalma süresini minimize etmeye çalışan bazı sezgisel metotlara yer vermişlerdir.

Gupta ve Gupta [8], bir işin bekleme nedeniyle işlem süresinin artması kavramını literatüre kazandıran ilk çalışmayı sunmuşlardır. Daha sonraları bozulma etkisi olarak adlandırılacak bu kavram, iş parçasının kuyrukta ne kadar beklediğine bağlı olarak işlem süresinin artacağını ifade etmektedir. Browne ve Yechiali [9] bozulma oranının rassal olduğu bir tek makine çizelgeleme probleminde beklenen yayılma süresini en aza indirmek için bazı öncelik kuralları geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, doğrusal fakat rassal bozulma oranını kullanmışlardır. Mosheiov [10] tüm işler için farklı bozulma etkilerinin söz konusu olduğu durumda, toplam akış süresini en aza indirme probleminde, optimum çizelgenin bozulma oranlarının önce çoktan aza, sonra da azdan çoğa doğru sıralandığı ve optimum çizelgenin V-şekline yaklaştığını göstermiştir. Masheiov [11] diğer bir çalışmasında basit doğrusal bozulma etkisi altında literatürde iyi bilinen çoğu tek makine çizelgeleme probleminin polinom zamanlı çözülebileceğini göstermiştir. Literatüre geçen bir diğer bozulma etkisi tipi olan adım-bozulma etkisi Mosheiov [12] tarafından tanıtılmıştır. Mosheiov [12] bu çalışmasında, önceden planlanmış bakım çalışmaları nedeniyle işlerin tamamlanması için harici zaman gereksinimi olmaktadır ve işlem sürelerinde artış yaşanmaktadır. İşlem sürelerindeki bu artışlar adım-bozulma etkisi olarak tanıtılmıştır. Mosheiov [13] işlerden bağımsız bozulma etkisi altında, toplam ağırlıklı tamamlanma süresinin en aza indirilmesinde, işlere ait işlem sürelerinin Λ şeklinde sıralanmasının optimum çizelgeyi vereceğini göstermiştir.

Öğrenme etkisi, benzer işlerin sürekli tekrar edilmesi neticesinde, işi yapan birimin, çalışanın ya da sistemin bu tekrarlar neticesinde tecrübe kazanmasını ve her tekrarda işi önceden planlanan süreden daha hızlı tamamlamasını ifade etmektedir. Wang ve Cheng [14] tek makine çizelgeleme problemlerinde, sıra-bağımlı öğrenme etkisi ve zaman-bağımlı bozulma etkisini eş zamanlı kullanarak yayılma süresini en aza indirmeye çalışmışlardır. Ortaya koydukları modeli çizelgeleme notasyonu ile ifade edersek, model $1|p_{i,r} = (p_0 + a_i t)r^{\alpha}|C_{max}$ şeklindedir. Wang [15] tek makine çizelgeleme problemlerini öğrenme ve bozulma etkileri altında incelemiş ve ağırlıklı tamamlanma süreleri toplamı için ağırlıklı en kısa işlem süresi (AEKİS) öncelik kuralının en iyi çizelgeyi verdiğini ortaya koymuştur. Ayrıca maksimum gecikme probleminin aynı koşullar altında, ek kısa teslim tarihi (EKTT) öncelik kuralı ile optimum çizelgeye ulaştığını göstermiştir. Cheng, Wu ve Lee [16] öğrenme ve bozulma etkileri altında yayılma süresi, toplam tamamlanma süresi, ağırlıklı tamamlanma süresi ve maksimum geç kalma süresi gibi performans kriterleri için polinom zamanlı algoritmaların varlığını göstermişlerdir. Toksarı ve Güner [17] öğrenme ve bozulma etkisi altındaki paralel makine çizelgeleme problemlerinde ortak teslim zamanlı işlere ait toplam erken tamamlanma ve geç tamamlanma maliyetlerinin en aza indirilmesini amaçlayan bir karma tamsayılı doğrusal olmayan model ortaya koymuşlardır. Toksarı ve Güner'in [18] diğer bir çalışmasında ise, ortak teslim zamanlı işlere ait erken tamamlanma sürelerinin ilk önce en çoktan en aza sıralanması, bu işlem ardından geç kalan işlerin geç kalma sürelerinin en azdan en çoğa doğru sıralanarak oluşturulan iki sıralamanın birleşiminden oluşan bir V-şekline göre oluşturulan çizelgelemenin, öğrenme ve bozulma etkisi altındaki paralel makine çizelgeleme problemleri için optimum çizelgeyi sağladığını ispatlamıştır. Öğrenme ve bozulma etkilerinin tek makine çizelgeleme problemlerindeki örnekleri için okuyucular [19], [20], [21], [22], [23], [24] [25], [26], [27], [28] ve [29] çalışmalarını inceleyebilirler.

Bulanık sayıların çizelgeleme problemlerinde kullanılmasının ilk örneklerinden birini Han, Ishii ve Fuji [30] gerçekleştirmiştir. Çalışmalarında maksimum geç kalma süresini en aza indirmeyi amaçlamışlardır ve teslim tarihlerini bulanıklaştırmışlardır. Ishii ve Tada [31] klasik 0-1 matrisi ile ifade edilen öncelik ilişkisi matrisini bulanık sayılar ile ifade etmişlerdir. Bulanık öncelik matrisi, karar vericinin hangi işin hangi işten önce yapılacağına dair isteğini bulanık sayılar ile göstermektedir. Çalışmanın iki amacı vardır, bunlar; maksimum geç kalma süresini en aza indirmek ve karar vericinin tatmin düzeyini en çoklamaktır. Liao ve Liao [32] çalışmalarında bulanık teslim tarihi ve bulanık işlem süresini eşzamanlı olarak kullanarak her işin kendi teslim tarihine uymasının seviyelerini en çoklamaya çalışmışlardır. Çalışmalarında, işlerin tamamlanma tarihlerinin, her işe ait bulanık teslim süresi üyelik fonksiyonlarından elde edilen sayılardan minimum olanını en çoklayarak; işlerin tamamlanma zamanlarının, karar vericinin daha önce tasarladığı ve tatmin düzeyini yansıtan üyelik fonksiyonuna en uygun olmasını istemektedirler. Ayrıca, ortaya koydukları problemin polinom zamanlı çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Itoh ve Ishii [33] bulanık işlem süreleri ve bulanık teslim tarihleri ile toplam geç kalan iş sayısını en aza indirmeyi amaçlayan bir model sunmuşlardır. Chanas ve Kasperski [34] tek makine çizelgeleme problemlerinde, bulanık işlem süreleri ve teslim tarihlerini kullanarak en büyük bulanık tamamlanma süresini en aza indirmeyi amaçlamışlardır. Çalışmalarında bulanık mantık ölçümlerinden, olabilirlik ve gereklilik ölçümlerini kullanmışlardır. Lam ve Cai [35] tek makine çizelgeleme problemlerinde farklı zamanlarda sisteme giren işler için bulanık teslim süreleri ile maksimum geç kalma süresini en aza indirmeyi amaçlamışlardır. Çalışmalarında, genetik algoritma tekniğini kullanmışlardır. Wang ve arkadaşları [36] tek makine çizelgeleme problemlerinde hazır olma süresi problemini bulanık işlem süreleri ile incelemişlerdir. Çalışmalarında, şans kısıtlı programlama tekniği ile olabilirlik ve gereklilik ölçümlerinden faydalanmışlardır. Chanas ve Kasperski [37] benzer iki tek makine çizelgeleme problemini bulanık işlem süresi ve bulanık teslim tarihi ile incelemişlerdir. Bu problemler sırasıyla; maksimum beklenen bulanık geç kalma süresini en aza indirmek ve maksimum bulanık geç kalma süresinin beklenen değerini en aza indirmektir. Sung ve Vlach [38] belirsizlik altında, geç kalan iş sayısının en aza indirilmeye çalışıldığı tek makine çizelgeleme problemlerinde, bulanık işlem süresi ve bulanık teslim tarihlerini kullanmışlardır. Görüldüğü üzere bulanık parametreler kullanılarak incelenen tek makine çizelgeleme problemleri literatürde görünür bir şekilde artmaktadır. Daha fazla çalışma örneği için okuyucular [39], [40] ve [41] çalışmalarını inceleyebilirler.

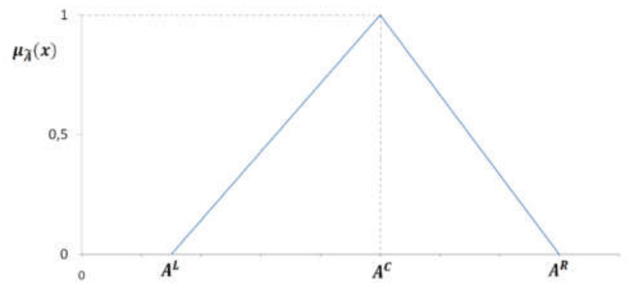
Bulanık parametreler ile çizelgeme problemlerinin kurgulanmasına yönelik artan ilgiye rağmen, bozulma ve öğrenme etkilerini bulanık ortamda inceleyen çalışma sayısı çok azdır. Mazdeh ve arkadaşları [42] toplam geç kalma süresini ve toplam yarı mamul sayısını en aza indirmeyi amaçlayan bir tek makine çizelgeleme problemi bozulma etkisi altında incelemiştir. Bulanık işlem süresi ve bulanık teslim tarihi kullandıkları çalışmalarında Bulanık Delphi yöntemini kullanmışlardır. Ahmadizar ve Hosseini [43] sıra bağımlı öğrenme etkisi altında, bulanık işlem süreleri ile tek makine çizelgeleme probleminde toplam tamamlanma süresini en aza indirmeye çalışmışlardır. Çalışmalarının sonucunda, EKİS öncelik kuralının en optimum çizelgeyi verdiğini ispatlamışlardır. Ahmadizar ve Hosseini [44] diğer bir çalışmalarında, sıra bağımlı öğrenme etkisi altında bulanık işlem süreli tek makine çizelgeleme problemi için yayılma süresinin en aza indirilmesi modelini incelemişlerdir. Çalışmalarında şans kısıtlı programlama tekniğini kullanmışlardır. Toksarı ve Arık [45] bulanık tek makine çizelgeleme problemlerini bulanık öğrenme etkisi altındaki bulanık işlem süreleri ile iyi bilinen performans kriterleri için incelemiştirler. Çalışmalarında bulanık şans kısıtlı programlama tekniği ile inceledikleri problemler için polinom zamanlı çözüm algoritmalarının olduğunu göstermişlerdir. Arık ve Toksarı [46] paralel makine çizelgeleme problemlerinde bulanık işlem süreleri ile literatürdeki farklı öğrenme ve bozulma etkileri ile karma tamsayılı doğrusal olmayan modeller ve bir sezgisel yöntem önermişlerdir. Oluşturdukları test problemlerinde, iyi bilinen bulanık matematiksel programlama teknikleri ile kendi önerdikleri yerel arama sezgiselini kıyaslamışlardır. Büyük ölçekli problemlerin çözümünde sezgisel yöntemin çözüm süresi açısından etkili olduğunu belirtmişlerdir. Toksarı ve Arık [47] akış tipi çizelgeleme problemlerini bulanık öğrenme ve bozulma etkileri altında ortak bir bulanık teslim süresi için incelemişlerdir. Ele aldıkları problemin çözümü için bir genetik algortima önermişlerdir.

2. VARSAYIMLAR VE TANIMLAR (ASSUMPTIONS AND DEFINITIONS)

Bu bölümde, modele ait varsayımlardan ve tanımlardan bahsedilmektedir. İşler arasında keyfi boş zamanlar bulunmamaktadır. İşlerin makinede işleniyorken bölünmelerine ve daha sonra tekrar işlenebiliyor olmalarına izin verilmemektedir. Tüm işlerin sisteme geliş zamanı sıfırdır ve makine başlangıçta tüm işleri işlemeye müsaittir. Öğrenme etkisi, bozulma etkisi, işlem süreleri ve teslim tarihleri üçgensel bulanık sayılarla ifade edilmiştir.

Konveks ve normalleştirilmiş bir bulanık kümeye ait olan bir bulanık sayı $\widetilde{A}$ için üyelerinin üyelik fonksiyonu $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu tüm reel sayılar için [0,1] kapalı aralığında tanımlıdır ($\mu_{\widetilde{A}}(x) : R \rightarrow [0,1]$). Eğer $\widetilde{A}$ bulanık sayısı reel sayılar ekseninde $\widetilde{A} = (A^L, A^C, A^R)$ gibi üç nokta ile ifade ediliyorsa, üyelik fonksiyonu $[A^L, A^C]$ kapalı aralığında sürekli olarak linear bir şekilde artıyor ve $[A^C, A^R]$ kapalı aralığında sürekli olarak lineer bir şekilde azalıyor ise $\widetilde{A}$ bulanık sayısı üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır. Üyelik fonksiyonu $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ ise aşağıdaki ifade (1) 'de, üyelik fonksiyonunun görünümü ise şekil 1'de görünebilir.

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-A^L}{A^C-A^L}, & if\ A^C \geq x \geq A^L \\ \frac{A^R-x}{A^R-A^C}, & if\ A^C \geq x \geq A^R \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (1)$$



Şekil 1. Üçgensel Bulanık Sayı için Üyelik Fonksiyonu
(The Membership Function for Triangular Fuzzy Number)

Olabilirlik dağılımı [48] ile X tanım kümesindeki her x elemanına bir olabilirlik derecesi $\pi_\xi(x) \in [0,1]$ atanmaktadır. Olabilirlik dağılımı X kümesi içerisinde farklı değerler alabilen ξ değişkenler hakkındaki belirsizliği temsil etmektedir. ξ bulanık değişkeninin X tanım kümesinin bir alt kümesi olan A kümesine ait olması olayının olabilirliği, $N(\xi \in A)$ şeklinde gösterilir ve ifade (2) ile hesaplanır.

$$\Pi(\xi \in A) = \sup_{\xi \in A} \mu(x) \quad (2)$$

Yukarıdaki ifade (2)'de belirtilen olabilirlik ölçümünün duali olarak gereklilik ölçümü kullanılır. $\xi \in A$ olayının gerekliliği $\Pi(\xi \in A)$ şeklinde gösterilir. A^C kümesi A kümesinin tümleyeni olmak üzere bir olayın gerekliliği aşağıdaki ifade (3) ile hesaplanır.

$$N(\xi \in A) = 1 - N(\xi \in A^C) = 1 - \sup_{\xi \in A^C} \mu(x) \quad (3)$$

$\xi \in A$ için A kümesinin herhangi bir r reel sayısından küçük sayılar kümesi olduğunu varsayalım. Bu durumda $\xi \in A$ ifadesini $\xi \leq r$ olarak ifade edebiliriz. Gereklilik ve olabilirlik ölçümleri ise aşağıdaki ifadeler (4-5) ile gösterilir.

$$\Pi(\xi \leq r) = \sup_{x \leq r} \mu(x) \quad (4)$$

$$N(\xi \leq r) = 1 - (\sup_{x > r} \mu(x)) \quad (5)$$

Gereklilik ve Olabilirlik birbirlerinin düali olmalarına rağmen, bu ölçümler kendi içlerinde düallerini barındırmazlar yani öz-düalleri yoktur. Matematiksel programlamada düallik ve konvekslik önemli kavramlardır. Bu durumdan yola çıkarak Liu ve Liu [49] güvenirlik ölçümünü ortaya atmışlardır. Herhangi bir A kümesi ve onun tümleyeni A^C kümesi için bir ξ değişkeninin güvenirlikleri $Cr(\xi \in A) + Cr(\xi \in A^C) = 1$ olacak şekilde öz-düaldir. Güvenilirlik ölçümü olabilirlik ve gereklilik ölçümlerinin ortalamasıdır ve aşağıdaki ifade (6) gibi hesaplanır.

$$Cr(\xi \leq r) = \frac{1}{2}\left(\Pi(\xi \leq r) + N(\xi \leq r)\right) \quad (6)$$

Üyelik fonksiyonu $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ olan bir üçgensel bulanık sayı $\widetilde{A} = (A^L, A^C, A^R)$ için olabilirlik, gereklilik ve güvenirlik ölçümleri sırasıyla, aşağıdaki ifadeler (7-8) gibi hesaplanır.

$$\Pi_A(A \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq A^L \\ \frac{r-A^L}{A^C-A^L}, & A^L \leq r \leq A^C \\ 1, & r \geq A^C \end{cases} \quad (7)$$

$$N_A(A \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq A^C \\ \frac{r-A^C}{A^R-A^C}, & A^C \leq r \leq A^R \\ 1, & r \geq A^R \end{cases} \quad (8)$$

$$Cr_A(A \leq r) = \begin{cases} 0, & r \leq A^L \\ \frac{r-A^L}{2(A^C-A^L)}, & A^L \leq r \leq A^C \\ \frac{A^R+r-2A^C}{2(A^R-A^C)}, & A^C \leq r \leq A^R \\ 1, & r \geq A^R \end{cases} \quad (9)$$

Olasılıksal değerlere sahip model parametrelerini modellemek ve çözmek için Charles ve Cooper [50] şans kısıtlı programlama tekniğini geliştirmişlerdir. Onların bu çalışmasına ek olarak belirsizliğin bulanık mantık ile modellendiği problemlerin çözümü için Liu ve Iwamura [51] şans kısıtlı programlama tekniğini bulanık mantığa göre tekrar kurgulamışlardır. Charles ve Cooper [50] bir olayın gerçekleşmesine ait olan şans değerini olasılıkla ifade etmişler, Liu ve Iwamura [51] ise şans değerini olabilirlik ölçümü ile ifade etmiştir. Olabilirlik ölçümünün yanında, bulanık parametreler ile yapılan şans kısıtlı programlama modellerinde gereklilik ve güvenirlik ölçümleri de şans değerini ifade etmede kullanılmaktadır. Bu çalışma içerisinde şans değeri güvenirlik ölçümü ile ifade edilecektir. Aşağıdaki modelde Liu ve Iwamura'nın [51] güvenilirlik ölçümüne göre tekrar ifade edilmiş haliyle şans kısıtlı programlama tekniğinin genel yapısı bulunmadır.

$$\begin{aligned} &\max \quad f(x) \\ &s.t.: \quad Cr\{\xi | g_i(x,\xi) \leq 0, i = 1,2,\dots,p\} \geq \alpha, \end{aligned}$$

burada x bir karar değişkeni vektörü, ξ bir bulanık model parametre vektörü, f(x) amaç fonksiyonu ve $g_i(x,\xi)$ ise kısıt fonksiyonudur. $Cr\{\xi|g_i(x,\xi) \leq 0\}$ şans kısıdını $Cr\{\xi|h_i(x) \leq \xi_i\}$ olarak tekrar yazabiliriz. $h_i(x)$ x karar değişkeni için bir fonksiyon ve ξ_i ise üyelik fonksiyonu $\mu_{\xi_i}(x)$ olan bir bulanık sayıdır. Öyle ki herhangi bir güven aralığı α_i için, bir K_{a_i} değeri bulunmaktadır. Böylece $Cr\{\xi_i | K_{\alpha_i} \leq \xi_i\} = \alpha_i$ olarak şans kısıtımızı tekrar yazabiliriz. Güvenilirlik değeri α_i olan K_{α_i} değeri güvenirlik fonksiyonunun tersidir $K_{\alpha_i} = Cr^{-1}(\alpha_i \mid K_{\alpha_i} \leq \xi_i)$. Böylelikle şans kısıdına ait net denkliği yazmış oluruz. Önceden belirlenmiş güven aralığı α_i değeri için hazırlanan şans kısıdını K_{α_i} değeri ile net denkliğine ulaştırıp, problemimizi modelleyebiliriz.

Bir fonksiyonun tersinin alınabilmesi için bire bir ve örten olması gerekiyor. Üçgensel bulanık sayıların güvenilirlik ölçümüne dair olan ifade (9)'deki fonksiyon A^L ve A^R arasında sürekli artış gösteren ve tek tepe değeri olan bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun ters fonksiyonu olan $Cr^{-1}(\alpha)$ fonksiyonu aşağıdaki ifade (10) ile gösterilebilir.

$$Cr^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha(A^C - A^L) + A^L, & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ A^R - (2-2\alpha)(A^R - A^C), & 0.5 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

İşi yapan çalışanın veya sistem birimin benzer işleri sürekli tekrarlaması nedeni ile kazandıkları tecrübenin onlara her iş tekrarında işi planlanandan daha hızlı yapmasına neden olan etkene öğrenme etkisi denilmektedir. Her yeni iş tekrarı işlem süresindeki azalma miktarını daha da artıracaktır. Çizelgeleme problemlerinde öğrenme etkisi ilk defa Biskup [1] tarafından net bir şekilde orta konmuştur. Biskup öğrenme etkisini, işin yapıldığı pozisyona bağlı bir fonksiyon olarak tanıtmıştır. Biskup'ın literatüre kattığı sıra bağımlı öğrenme etkisine ilaveten, Kuo ve Yang [5] zaman bağımlı öğrenme etkisini ortaya koymuşlardır. Bu çalışma içerisinde öğrenme etkisi, sıra bağımlı olarak kullanılmıştır. $P_{[r]}$, r pozisyonunda yapılan işin öğrenme etkisi a nedeniyle temel işlem süresi $P_i{}'$ den daha az olarak gerçekleşen gerçek işlem süresini ifade ettiğini varsaydığımızda, sıra bağımlı öğrenme etkisi altında $P_{[r]}$ hesaplamasını aşağıdaki ifade (11) ile gösterebiliriz.

$$P_{[r]} = P_i r^a \quad (11)$$

İşlerin sistemde kuyrukta beklerken veya hatta makineler üzerinde işlenmekteler iken işlem sürelerinin artmasına neden olan tüm etkenler bozulma etkisi olarak adlandırılır. Sisteme ne kadar çok iş yüklenirse, kuyruktaki yığılma o kadar fazla olacaktır ve kuyrukta bekleme işlem süresinin planlanandan daha fazla olmasına neden olacaktır. Alidaee ve Womer [52] tarafından bozulma etkisi üç farklı biçimde sınıflandırılmıştır. Bunlar sırasıyla: doğrusal, parçalı doğrusal ve doğrusal olmayan bozulma etkisi fonksiyonlarıdır. Bu çalışma içerisinde, doğrusal ve zamana bağımlı bozulma etkisi modele dahil edilmiştir. $\mathrm{P_i}$, r pozisyonunda işlenecek işe ait temel işlem süresi, $\mathrm{C_{[r-1]}}$ bir önceki pozisyona ait tamamlanma süresini ve B doğrusal bozulma etkisi olmak üzere, r pozisyonundaki işe ait gerçek işlem süresi $\mathrm{P_{[r]}}$ hesaplaması aşağıdaki ifade (12) ile gösterilebilir.

$$P_{[r]} = P_i + B * C_{[r-1]} \quad (12)$$

Bozulma etkisini işlem süresini artırırken, öğrenme etkisi ise işlem süresini azalmaktadır. Bu çalışma içerisinde doğrusal zaman bağımlı bozulma etkisi ve sıra bağımlı öğrenme etkisi kullanılacaktır. Bu iki etki neticesinde, herhangi bir r sırasında gerçek işlem süresi aşağıdaki ifade (13) ile hesaplanır.

$$P_{[r]} = (P_i + B * C_{[r-1]}) r^a \quad (13)$$

3. KARMA TAMSAYILI DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİ (MIXED INTEGER NONLINEAR PROGRAMMING MODEL)

Bu bölümde, önceki bölümde tanıtılan güvenilirlik ölçütüne dayalı şans kısıtlı programlama tekniği ile elde edilen şans kısıtlarının önceden belirlenmiş bir güven aralığı değeri için E/G problemi kurulacaktır. Teslim tarihinden önce tamamlanan işler erken tamamlanan işler, sonra tamamlanan işler ise geç tamamlanan işler olarak adlandırılırlar. Bu iki değerinin karar verici tarafından önceden belirlenmiş ağırlıklarının toplamını en aza indirmek üzere, bulanık iş bozulması ve öğrenme etkisi altında, tüm parametreleri bulanık sayılar ile ifade edilmiş modelimiz aşağıdaki gibidir.

__İndisler (Indexes)__

i : $işlere\ ait\ endeks \quad i = 1, \dots, N$

r : $makinede\ yapılacak\ işlerin\ sıra\ numarası\ endeksi \quad r = 1, \dots, N$

__Parametreler (Parameters)__

P_i^L : i $işine\ ait\ beklenen\ en\ kısa\ işlem\ süresi$

P_i^C : i $işine\ ait\ beklenen\ en\ olası\ işlem\ süresi$

P_i^R : i $işine\ ait\ beklenen\ en\ kötü\ işlem\ süresi$

D_i^L : i $işine\ ait\ beklenen\ en\ kısa\ teslim\ süresi$

D_i^C : i $işine\ ait\ beklenen\ en\ olası\ teslim\ süresi$

D_i^R : i $işine\ ait\ beklenen\ en\ kötü\ teslim\ süresi$

a^R : $Beklenen\ en\ yüksek$ öğrenme $etkisi\ katsayısı$

a^C : $En\ olası$ öğrenme $etkisi\ katsayısı$

a^L : $Beklenen\ en\ düşük$ öğrenme $etkisi\ katsayısı$

B^R : $Beklenen\ en\ yüksek\ bozulma\ etkisi\ katsayısı$

B^C : $En\ olası\ bozulma\ etkisi\ katsayısı$

B^L : $Beklenen\ en\ düşük\ bozulma\ etkisi\ katsayısı$

e_i : $i\ işinin\ erken\ tamamlanma\ ağırlığı$

t_i : $i\ işinin\ geç\ tamamlanma\ ağırlığı$

α : Önceden $belirlenmiş\ ortak\ güven\ aralığı$

__Karar Değişkenleri (Decision Variables)__

E_i : $i\ işinin\ erken\ tamamlanma\ süresi$

T_i: $i\ işinin\ geç\ tamamlanma\ süresi$

$C_{[r]}$: $r\ sırasında\ yapılan\ işin\ gerçek\ tamamlanma\ süresi$

$P_{[r]}$: $r\ sırasında\ yapılan\ işin\ gerçek\ işlem\ süresi$

C_i : $i\ işinine\ ait\ tamamlanma\ süresi$

$$X_{i,[r]} : \begin{cases} 1, & eğer\ i\ işi\ r\ sırasına\ atanmışsa \\ 0, & diğer \end{cases}$$

$$Y : \begin{cases} 1, & eğer\ 0 \le \alpha \le 0.5 \\ 0, & eğer\ 0.5 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

K_{pi}^{α}: $i\ işine\ ait\ işlem\ süresinin, \alpha\ güven\ aralığı\ için\ denkliği\ (güvenirlik\ fonksiyonun\ ters\ değeri)$

K_{di}^{α}: $i\ işine\ ait\ teslim\ süresinin, \alpha\ güven\ aralığı\ için\ denkliği\ (güvenirlik\ fonksiyonun\ ters\ değeri)$

K_{a}^{α}: öğrenme $etkisi\ katsayısının, \alpha\ güven\ aralığı\ için\ denkliği\ (güvenirlik\ fonksiyonun\ ters\ değeri)$

K_{B}^{α}: $bozulma\ etkisi\ katsayısının, \alpha\ güven\ aralığı\ için\ denkliği\ (güvenirlik\ fonksiyonun\ ters\ değeri)$

__Model (Model)__

$$Min \ \sum_{i=1}^{N} e_i E_i + t_i T_i \quad (14)$$

$S.T.$:

$$C_i + E_i - T_i = K_{di}^{\alpha} \quad \forall i \quad (15)$$

$$C_{[r]} = C_{[r-1]} + P_{[r]} \quad \forall r \quad (16)$$

$$P_{[r]} = (\sum_{i=1}^{N} X_{i,[r]} * K_{pi}^{\alpha} + K_B^{\alpha} (C_{[r-1]})) r^{K_a^{\alpha}} \ \forall r \quad (17)$$

$$K_{pi}^{\alpha} = Y\big(2\alpha\big(P_i^C - P_i^L\big) + P_i^L\big) + (1-Y)\Big(P_i^R - (2-2\alpha)\big(P_i^R - P_i^C\big)\Big) \ \forall i \quad (18)$$

$$K_{di}^{\alpha} = Y\big(2\alpha\big(D_i^C - D_i^L\big) + D_i^L\big) + (1-Y)\Big(D_i^R - (2-2\alpha)\big(D_i^R - D_i^C\big)\Big) \ \forall i \quad (19)$$

$$K_{a}^{\alpha} = Y(2\alpha(a^C - a^L) + a^L) + (1-Y)\big(a^R - (2-2\alpha)(a^R - a^C)\big) \quad (20)$$

$$K_{B}^{\alpha} = Y(2\alpha(B^C - B^L) + B^L) + (1-Y)\big(B^R - (2-2\alpha)(B^R - B^C)\big) \quad (21)$$

$$C_i = \sum_{r=1}^{N} X_{i,[r]} C_{[r]} \quad \forall i \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_{i,[r]} = 1 \quad \forall r \quad (23)$$

$$\sum_{r=1}^{N} X_{i,[r]} = 1 \quad \forall i \quad (24)$$

$$C_{[0]} = 0 \quad (25)$$

$$C_{[r]}, P_{[r]}, C_i, E_i, T_i, K_{pi}^{\alpha}, K_{di}^{\alpha} \geq 0 \ \forall i, r \quad (26)$$

$$-1 \leq K_a^{\alpha} \leq 0 \quad (27)$$

$$0 \leq K_B^{\alpha} \leq 1 \quad (28)$$

$$X_{i,[r]} \in \{0,1\} \ \forall i, r \ \ ve \ \ Y \in \{0,1\} \quad (29)$$

Yukarıda ki modelin amaç fonksiyonu (14) işler için önceden belirlenmiş erken tamamlanma ve geç tamamlanma ceza ağırlıklarını kullanarak, işlerin teslim tarihlerinden sapmaları en aza indirmeyi amaçlamaktadır. Kısıt (15) önceden belirlenmiş güven aralığı için hesaplanmış olan teslim süresinin işin tamamlanma süresi, erken bitirme süresi ve geç bitirme süresine bağlı olduğunu göstermektedir. Kısıt (16) r pozisyonunda tamamlanacak olan işe ait gerçek tamamlanma süresinin, gerçek işlem süresine ve bir önceki pozisyondaki tamamlanma süresine bağlı olduğu gösterilmektedir. Kısıt (17) önceden belirlenmiş güven aralığı α için r pozisyonundaki gerçek işlem süresinin hesaplanmasını göstermektedir. Kısıt (17)'de, kendisinden bir önceki sırada işlenen işin tamamlanmasını beklerken, mevcut pozisyondaki işe ait işlem süresi artmaya ve aynı zamanda da kendisinden yapılan işlerin kazandırmış olduğu tecrübe ile de mevcut pozisyondaki işe ait işlem süresi azalmaya devam etmektedir. Kısıtlar (18-21) ile önceden belirlenmiş güven aralığı α için, sırasıyla işlem süreleri, teslim tarihleri, öğrenme etkisi katsayısı ve bozulma etkisi katsayısı hesaplanmaktadır. Bu kısıtlarda, ifade (10)' ile gösterilen, üçgensel bulanık sayılara ait güvenilirlik dağılımının ters fonksiyonunun önceden belirlenmiş güven aralığı α için değerleri hesaplanmaktadır. Kısıt (22)'de ise herhangi bir r sırasında işlenen işin tamamlanma süresi olan ($C_{[r]}$), o sıraya atanmış olan i işi için tamamlanma süresine (C_i) çevrimi işlemi gerçekleştirilmektedir. Kısıt (23) ile her işin sadece bir sırada işlenebileceği garantiye alınmıştır. Kısıt (24) ile ise her sırada sadece bir işin işlenebileceği garantiye alınmış olmaktadır. Kısıt (25) ile makinenin işleri sırayla işlemeye başlamaya hazır olduğu andaki sürenin sıfır olduğu belirtilmiştir. Yukarıdaki modelde kısıt (26) ile r sırasındaki işe ait gerçek işlem ve tamamlanma sürelerinin ve i işine ait erken tamamlanma, geç tamamlanma, α güven aralığındaki temel işlem süresi ve teslim sürelerinin negatif değerler olmadığını gösterilmektedir. Kısıt (27) ile α güven aralığındaki öğrenme etkisi katsayısının -1 ve 0 arasında bir değer olduğu gösterilmektedir. Kısıt (28) ile α güven aralığındaki bozulma etkisi katsayısının 0 ve 1 arasında bir değer olduğu gösterilmektedir. Kısıt (29) ile işlerin hangi sırada işleneceğini gösteren karar değişkenleri $X_{i,[r]}$ ile önceden belirlenmiş güven aralığı α'ya göre değer alacak olan karar değişkeni Y değerinin sadece ikili değerler alabileceği gösterilmiştir.

4. SAYISAL ÖRNEK (NUMERICAL EXAMPLE)

Bu bölümde bir önceki bölümde tanıtılan matematiksel model için örnek veri seti ve sayısal örnek tanıtılacaktır. Bu bölümde tanıtılan sayısal örnekteki bulanık işlem süreleri, teslim tarihleri, öğrenme ve bozulma etkisi katsayıları örnek olması amaçlı oluşturulmuştur. Tek makine ya da işlemcide işlenmeye hazır olan on adet iş olduğunu varsayalım. Bu işlere ait işlem süreleri üçgensel bulanık sayılar ile ifade edilmiş ve yine bu işlere ait teslim süreleri de bulanık sayılar ile ifade edilmiştir. Aynı makine ya da işlemcide birbirine benzer işlerin sürekli tekrarı ise her tekrarda işlem sürelerinin azalmasına neden olmaktadır. Yine işler işlenmek için kuyrukta beklerken, iş yeri ortam koşulları nedeniyle veya işlem karakteristikleri nedeniyle işlem süreleri artmaktadır. Öğrenme ve bozulma etkileri katsayıları işlem sırasından bağımsız yani statiktir; fakat üçgensel bulanık sayılar ile ifade edilmişlerdir. Bu nedenle bu tek makine / işlemci çizelgeleme problemi öğrenme ve bozulma etkisi altındadır. Karar verici işlerin tam zamanında teslim edilmesini istemektedir. Bu nedenle işlere ait erken tamamlanma ve geç tamamlanma süreleri için ağırlıklar belirlemiştir. Problemin amacı öğrenme ve bozulma etkisi altında erken ve geç tamamlanma sürelerinin ağırlıklı toplamını en aza indirmektir. Sayısal örneğe ait veriler Tablo 1'de verilmiştir. Bu örnek için bulanık üçgensel öğrenme etkisi katsayısı $\tilde{a}$ ={-0,08; -0,05; -0,02} ve bulanık üçgensel bozulma etkisi katsayısı $\widetilde{B}$ = {0,02; 0,05; 0,08} olarak belirlenmiştir.

Tablo 1. Sayısal Örnek için Veriler
(Data for Numerical Example)

i	$\widetilde{P}_i$	$\widetilde{D}_i$	e_i	t_i
1	(10,12,14)	(30,33,36)	10	20
2	(8,9,13)	(28,29,33)	20	30
3	(6,7,9)	(13,18,20)	15	5
4	(12,13,17)	(21,28,35)	5	12
5	(16,18,19)	(45,50,55)	9	17
6	(7,9,12)	(23,30,39)	13	9
7	(5,9,13)	(17,22,27)	18	2
8	(12,14,19)	(32,37,39)	19	27
9	(17,19,20)	(41,44,48)	23	23
10	(17,18,21)	(63,70,72)	12	11

Önceden belirlenmiş farklı güven aralığı değerleri için oluşturulan çizelgeler Tablo 2'de ve bu çizelgelerdeki işlere ait tamamlanma süreleri Tablo 3'de sunulmuştur. Tablo 2'de verilen sonuçlar GAMS 21.6 yazılımı içerisindeki DICOPT çözücüsü ile elde edilmiştir. Aşağıdaki tablo 2'de görülebileceği üzere, güven aralığı değeri artıkça amaç fonksiyonu değeri de artmaktadır. Bu artışın nedeni güven aralığı artıkça üçgensel bulanık işlem süresi, teslim tarihi, bozulma etkisi ve öğrenme etkisi gibi değerlerin artarak tanımlı aralıktaki en büyük değere yaklaşmalarıdır. İlk işe ait bulanık işlem süresinin 0,1 güven aralığındaki denkliği 10,4 iken aynı işin 0.9 güven aralığındaki işlem süresinin denkliği 13,6 değeridir. Bu sayısal örnekte de görüleceği gibi kapalı bir aralıkta tanımlanan belirsiz değerlerden oluşan bir matematiksel modelin optimum sonucunun sahip olabileceği en büyük ve en küçük değerlerde kapalı bir aralık içerisinde sunulabilir. Tablo 2'deki sonuçlara göre optimum çizelgenin amaç fonksiyonunun değeri [2840,257; 5321,215] kapalı aralığındadır.

Tablo 2. Sayısal Örnek için Sonuçlar
(Results for Numerical Example)

Güven Aralığı	**Amaç Fonksiyonu Değeri**	**Çizelge**
0,00	2840,257	6,2,1,8,9,5,3,4,7,10
0,05	2902,396	6,2,1,8,9,5,3,4,10,7
0,10	2896,164	3,2,1,8,6,9,5,4,10,7
0,15	3054,626	3,6,2,8,1,9,5,4,10,7
0,20	3189,731	3,6,2,8,1,9,5,4,10,7
0,25	3343,107	3,6,2,8,1,9,5,4,10,7
0,30	3470,962	3,6,2,8,1,9,4,5,10,7
0,35	3617,280	3,6,2,8,1,9,4,5,10,7
0,40	3745,255	2,1,8,9,5,6,4,10,3,7
0,45	3869,884	2,1,8,9,5,6,4,3,10,7
0,50	3975,327	2,1,8,9,5,6,4,10,3,7
0,55	3976,111	4,2,8,1,9,6,5,10,3,7
0,60	4113,894	4,2,8,1,9,6,5,10,3,7
0,65	4363,396	1,2,8,6,9,4,3,5,10,7
0,70	4496,497	2,1,8,9,5,4,6,3,10,7
0,75	4631,750	2,1,8,9,5,4,6,3,10,7
0,80	4770,859	2,1,8,9,5,4,6,3,10,7
0,85	4873,405	2,1,8,9,5,4,6,10,3,7
0,90	5061,087	2,1,8,9,5,4,6,3,10,7
0,95	5149,565	1,2,8,6,9,4,5,10,3,7
1,00	5321,215	2,1,8,9,5,4,6,10,3,7

Tablo 3. Sayısal Örnek için Tamamlanma Süreleri
(Completion Times for Numerical Example)

$\alpha \backslash C_i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0,00	24.129	14.701	71.871	83.249	65.613	7.000	88.840	35.301	50.868	104.457
0,05	24.726	15.036	85.785	79.039	67.290	7.200	108.375	36.202	52.133	101.889
0,10	16.233	24.182	6.200	87.241	75.107	43.339	110.955	35.940	59.565	103.788
0,15	44.073	21.754	6.300	89.217	76.687	13.709	114.113	33.745	60.696	106.232
0,20	45.216	22.248	6.400	91.670	78.718	14.036	117.812	34.545	62.255	109.181
0,25	46.377	22.747	6.500	76.826	94.026	14.365	121.453	35.355	63.842	112.050
0,30	47.555	23.251	6.600	96.753	82.908	14.695	125.535	36.174	65.458	115.320
0,35	48.751	23.759	6.700	99.388	85.069	15.027	129.566	37.004	67.103	118.515
0,40	20.331	8.800	126.149	96.033	70.750	81.345	138.236	33.961	52.554	115.637
0,45	20.678	8.900	108.838	98.511	72.251	83.342	142.315	34.614	53.594	129.324
0,50	21.026	9.000	133.549	101.044	73.775	85.377	147.522	35.273	54.646	121.820
0,55	50.480	22.580	137.014	13.100	103.274	82.666	151.967	37.202	70.762	124.653
0,60	51.437	22.841	140.913	13.200	105.857	84.618	156.900	37.780	72.194	127.876
0,65	12.600	22.362	97.392	85.969	119.749	48.744	159.883	37.580	69.785	142.929
0,70	22.435	9.400	125.217	97.263	80.105	111.965	167.477	37.964	58.981	149.285
0,75	22.791	9.500	128.709	99.419	81.749	114.797	172.944	38.651	60.097	153.586
0,80	23.149	9.600	132.291	101.615	83.417	117.692	178.585	39.344	61.226	158.013
0,85	23.508	9.700	163.295	103.854	85.111	120.653	185.178	40.042	62.369	146.323
0,90	23.869	9.800	139.739	106.136	86.831	123.679	190.411	40.747	63.526	167.262
0,95	13.800	24.589	170.852	98.798	125.006	55.423	195.279	41.841	79.579	152.200
1,00	24.596	10.000	177.901	110.832	90.351	129.940	203.907	42.173	65.881	158.138

Bu sayısal örnekte artan güven aralığının amaç fonksiyonu değerini nasıl artırdığı gösterilmeye çalışılmıştır. Bu nedenle tüm parametrelere dair sabit oranda artan ortak güven aralıkları kullanılmıştır. Karar verici güven aralıklarını her parametre için farklı kullanmak istediği zaman, her bir parametre için belirsizliğin ne oranda gerçekleşeceğine dair güven aralıklarını saptaması gerekecektir. Ayrıca, bu sayısal örnekte olduğu gibi belirli oranlarda her parametre için güven aralıklarının artırılması veya azaltılması yoluyla optimum sonuç için daha detaylı bir çözüm uzayı elde edilebilir ama yine çözüm uzayının alt ve üst sınırları güven aralığının tüm parametreler için 0 ve 1 olduğu değerler olacaktır. Sunulan örnekte tüm işler için sabit bulanık öğrenme ve bozulma etkileri kullanılmıştır. Bu durumun aksi de mümkündür, karar verici her işin kendisinden önce yapılan işlerden ne kadar etkilendiğini ve dolayısıyla ne miktarda öğrenebileceğini ya da bozulacağını yine bulanık sayılar ile modelleyebilir. Bu çalışma içerisinde sunulan modelde erken/geç tamamlanma ağırlıkları deterministik sayılar ile sunulmuştur. Yine, karar verici problemin karmaşıklığını artırmayı göz önünde bulundurarak erken/geç tamamlanma ağırlıklarını bulanıklaştırmayı düşünebilir.

5. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMALAR (CONCLUSION AND FUTURE RESEARCHES)

Bu çalışmada bulanık öğrenme ve bozulma etkileri altındaki bulanık işlem sürelerinin, bulanık teslim tarihleri dikkate alındığında ağırlıklı erken/geç tamamlanma maliyetlerinin en aza indirilmesi problemi incelenmiştir. İncelenen probleme bulanık karma tam sayılı doğrusal olmayan bir matematiksel model önerilmiş ve ardından bu modelin bulanık şans kısıtlı programlama tekniği ile belli güven aralıklarındaki net denklikleri ile bir sayısal örnek sunulmuştur. Bu çalışma içerisinde şans kısıtlı programlama için bulanık ölçümlerden güvenirlik ölçümü kullanılmıştır. İleriki çalışmalarda, literatürde yer alan farklı bulanık matematiksel programlama tekniklerinden, olabilirsel programlama veya tamamıyla bulanık programlama yöntemleri ile problem tekrar ele alınabilir. Gelecek çalışmalarda problemin makine karakteristiği daha da karmaşık bir hale getirilerek paralel makine çizelgeleme problemleri için ve diğer iş karakteristikleri (öncelik ilişkisi, sıra bağımlı hazırlık süresi, yığın işleme …) eklenerek incelenebilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] D. Biskup, “Single-machine scheduling with learning considerations,” *European Journal of Operational Research,* cilt 115, no. 1, pp. 173-178, 1999.

[2] G. Mosheiov, “Scheduling problems with a learning effect,” *European Journal of Operational Research,* cilt 132, no. 3, pp. 687-693, 2001.

[3] G. Mosheiov ve J. B. Sidney, “Scheduling with general job-dependent learning curves,” *European Journal of Operational Research,* cilt 147, no. 3, pp. 665-670, 2003.

[4] A. Bachman ve A. J. Janiak, “Scheduling jobs with position-dependent processing times,” *Journal of the Operational Research Society,* cilt 55, no. 3, p. 257–264, 2004.

[5] W. H. Kuo ve D. Yang, “Minimizing the total completion time in a single machine scheduling problem with a time dependent learning effect,” *European Journal of Operational Research,* cilt 178, no. 2, pp. 1184-1190, 2006.

[6] C. P. Koulamas ve G. J. Kyparisis, “Single-machine and two-machine flowshop scheduling with general learning functions,” *European Journal of Operational Research,* cilt 178, no. 2, pp. 402-407, 2007.

[7] T. Eren ve E. Güner, “Minimizing total tardiness in a scheduling problem with a learning effect,” *Applied Mathematical Modelling,* cilt 31, no. 7, pp. 1351-1361, 2007.

[8] J. N. D. Gupta ve S. K. Gupta., “Single facility scheduling with nonlinear processing times,” *Computer and Industrial Engineering,* cilt 14, pp. 387-393, 1988.

[9] S. Browne ve U. Yechiali, “Scheduling deteriorating jobs on a single processor,” *Operations Research,* cilt 38, pp. 495-498, 1990.

[10] G. Mosheiov, “V-shaped policies for scheduling deteriorating jobs,” *Operations Research,* cilt 39, pp. 979-991, 1991.

[11] G. Mosheiov, “Scheduling jobs under simple linear deterioration,” *Computers and Operations Research,* cilt 21, no. 6, pp. 653-659, 1994.

[12] G. Mosheiov, “Scheduling jobs with step-deterioration; Minimizing makespan on a single machine,” *Computers and Industrial Engineering,* cilt 28, pp. 869-879, 1995.

[13] G. Mosheiov, “Λ-shaped policies to schedule deteriorating jobs,” *Journal of Operations Research Society,* cilt 47, pp. 1184-1191, 1996.

[14] X. Wang ve T. Cheng, “Single-machine scheduling with deteriorating jobs and learning effects to minimize the makespan,” *European Journal of Operational Research,* cilt 178, no. 1, pp. 57-70, 2007.

[15] J. Wang, "Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration," *Omega,* cilt 35, no. 4, pp. 397-402, 2007.

[16] T. Cheng, C. Wu ve W. Lee, "Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects," *Computers and Industrial Engineering,* cilt 54, no. 4, pp. 972-982, 2008.

[17] M. D. Toksarı ve E. Guner, "Minimizing the earliness/tardiness costs on parallel machine with learning effects and deteriorating jobs: A mixed nonlinear integer programming approach," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* cilt 38, no. 7-8, pp. 801-808, 2008.

[18] M. D. Toksarı ve E. Güner, "Parallel machine earliness/tardiness scheduling problem under the effects of position based learning and linear/nonlinear deterioration," *Computers & Operations Research,* cilt 36, no. 8, pp. 2394-2417, 2009.

[19] J. Wang, X. Huang, X. Wang, N. Yin ve L. Wang, "Learning effect and deteriorating jobs in the single machine scheduling problems," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 33, pp. 3848-3853, 2009.

[20] J. Wang ve Q. Guo, "A due-date assignment problem with learning effect and deteriorating jobs," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 34, pp. 309-313, 2010.

[21] Y. Wu, M. Wang ve J. Wang, "Some single-machine scheduling with both learning and deterioration effects," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 35, pp. 3731-3736, 2011.

[22] S. Yang, "Group scheduling problems with simultaneous considerations of learning and deterioration effects on a single-machine," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 35, pp. 4008-4016, 2011.

[23] P. Lai ve W. Lee, "Scheduling problems with general effects of deterioration and learning," *Information Sciences,* cilt 181, pp. 1164-1170, 2011.

[24] J. Bai, Z. Li ve X. Huang, "Single-machine group scheduling with general deterioration and learning effects," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 36, pp. 1267-1274, 2012.

[25] S. Yang, "Single-machine scheduling problems simultaneously with deterioration and learning effects under deteriorating multi-maintenance activities consideration," *Computers and Industrial Engineering,* cilt 62, pp. 271-275, 2012.

[26] J. Wang, C. Hsu ve D. Yang, "Single-machine scheduling with effects of exponential learning and general deterioration," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 37, pp. 2293-2299, 2013.

[27] J. Wang, L. Liu ve C. Wang, "Single machine SLK/DIF due window assignment problem with learning effect and deteriorating jobs," *Applied Mathematical Modelling,* cilt 37, pp. 8394-8400, 2013.

[28] S. H. Pakzad-Moghaddam, H. Mina ve R. Tavakkoli-Moghaddam, "An approach for modeling a new single machine scheduling problem with deteriorating and learning effects," *Computers & Industrial Engineering,* cilt 78, pp. 33-43, 2014.

[29] X. Huang, M. Z. Wang ve P. Ji, "Parallel machines scheduling with deteriorating and learning effects," *Optimization Letters,* cilt 8, no. 2, pp. 493-500, 2014.

[30] S. Han, H. Ishii ve S. Fujii, "One machine scheduling problem with fuzzy due dates," *European Journal of Operational Research,* cilt 79, pp. 1-12, 1994.

[31] H. Ishii ve M. Tada, "Single machine scheduling problem with fuzzy precendence relation," *European Journal of Operational Research,* cilt 87, no. 2, pp. 284-288, 1995.

[32] L. Liao ve C. Liao, "Single machine scheduling problem with fuzzy due date and processing time," *Journal of the Chinese Institute of Engineers,* cilt 21, no. 2, pp. 189-196, 1998.

[33] T. Itoh ve H. Ishii, "Fuzzy due-date scheduling problem with fuzzy processing time," *International Transactions in Operational Research,* cilt 6, no. 6, pp. 639-647, 1999.

[34] S. Chanas ve A. Kasperski, "Minimizing maximum lateness in a single machine scheduling problem with fuzzy processing times and fuzzy due dates," *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* cilt 14, pp. 377-386, 2001.

[35] S. Lam ve X. Cai, "Single machine scheduling with nonlinear lateness cost functions and fuzzy due dates," *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* cilt 3, pp. 307-316, 2002.

[36] C. Wang, D. Wang, W. Ip ve D. Yuen, "The single machine ready time scheduling problem with fuzzy processing times," *Fuzzy Sets and Systems,* cilt 127, pp. 117-129, 2002.

[37] S. Chanas ve A. Kasperski, "On two single machine scheduling problems with fuzzy processing times and fuzzy due dates," *European Journal of Operational Research,* cilt 147, pp. 281-296, 2003.

[38] S. Sung ve M. Vlach, "Single machine scheduling to minimize the number of late jobs under uncertainty," *Fuzzy Sets and Systems,* cilt 139, pp. 421-430, 2003.

[39] K. Muthusamy, S. Sung, M. Vlach ve H. Ishii, "Scheduling with fuzzy delays and fuzzy precedences," *Fuzzy Sets and Systems,* cilt 134, pp. 387-395, 2003.

[40] S. Chanas ve A. Kasperski, "Possible and necessary optimality of solutions in the single machine scheduling problem with fuzzy parameters," *Fuzzy Sets and Systems,* cilt 142, no. 3, pp. 359-371, 2004.

[41] T. Itoh ve H. Ishii, "One machine scheduling problem with fuzzy random due-dates," *Fuzzy Optimization Decision Making,* cilt 4, pp. 71-78, 2005.

[42] M. Mazdeh, F. Zaerpour ve F. Jahantigh, "A fuzzy modeling for single machine scheduling problem with deteriorating jobs," *International Journal of Industrial Engineering Computations,* cilt 1, no. 2, pp. 147-157, 2010.

[43] F. Ahmadizar ve L. Hosseini, "Single-machine scheduling with a position-based learning effect and fuzzy processing times," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* cilt 65, pp. 693-698, 2011.

[44] F. Ahmadizar ve L. Hosseini, "Minimizing makespan in a single-machine scheduling problem with a learning effect and fuzzy processing times," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* cilt 65, pp. 581-587, 2013.

[45] M. D. Toksarı ve O. A. Arık, "Single machine scheduling problems under position-dependent fuzzy learning effect with fuzzy processing times," *Journal of Manufacturing Systems,* cilt C, no. 45, pp. 159-179, 2017.

[46] O. Arık ve M. Toksarı, "Multi-objective fuzzy parallel machine scheduling problems under fuzzy job deterioration and learning effects," (Article in Press).

[47] M. Toksarı ve O. A. Arık, "Genetic algorithm applied to the flow shop scheduling problem under effects of fuzzy learning and deterioration with a common fuzzy due date," *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences,* cilt 4, no. 10, pp. 306-3016, 2017.

[48] L. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.," *Fuzzy Sets and Systems,* cilt 1, pp. 3-28, 1978.

[49] B. Liu ve Y.-K. Liu, "Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* cilt 10, no. 4, pp. 445-450, 2002.

[50] A. Charnes ve W. Cooper, "Chance-constrained programming," *Management Science,* cilt 94, no. 227-282, pp. 73-79, 1959.

[51] B. Liu ve K. Iwamura, "Chance constrained programming with fuzzy parameters," *Fuzzy Sets and Systems,* cilt 94, pp. 227-282, 1998.

[52] B. Alidaee ve N. Womer, "Scheduling with time dependent processing times: review and extensions," *Journal of Operation Research Society,* cilt 50, no. 7, pp. 711-720, 1999.