Marmara Fen Bilimleri Dergisi 2018, 2 105-110
DOI: 10.7240/marufbd.349563

RESEARCH ARTICLE / ARAŞTIRMA MAKALESİ

Hull-White Stokastik Diferansiyel Denklemine Lie Simetri Analizi

Lie Symmetry Analysis to the Hull-White Stochastic Differential Equation

Burhaneddin İZGİ[1], **Ahmet BAKKALOĞLU**[2]

[1] *İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, 34469 Maslak, İstanbul*

[2] *Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Şişli-Bomonti 34380, İstanbul*

Öz

Bu makalede, stokastik diferansiyel denklemlere Lie simetri analizinin bir uygulaması olarak asıl çözümün nasıl elde edileceğini göstereceğiz. Yapacağımız bu analizler stokastik faiz oranı modellerinden Hull-White modeli özelinde yapılacaktır. İlk olarak Hull-White stokastik modeline karşılık gelen Hull-White (1+1) lineer parabolik kısmi türevli denklemini elde edeceğiz. Daha sonra, elde ettiğimiz bu denklemin Lie simetri analiz yöntemleriyle özellikle de değişmezlik kriterleri altında klasik anlamdaki ısı denklemine dönüşebileceğini göstereceğiz ve ilgili dönüşümleri bulacağız. Son olarak da, Hull-White kısmi türevli diferansiyel denkleminin asıl çözümünü, bulduğumuz bu dönüşümlerle ve ısı denkleminin literatürdeki özelliklerini kullanarak elde edeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Stokastik diferansiyel denklemler, ısı denklemi, Lie simetri analizi

Abstract

In this paper we present, as an application of the Lie symmetry analysis, that how to obtain the fundamental solution of the stochastic differential equations. Especially, we focus on Hull-White stochastic interest rate model, among others. First of all, we obtain the corresponding (1+1) scalar linear parabolic partial differential equation (PDE) to the Hull-White stochastic model. Later on, we exhibit that this Hull-White PDE can be converted to the classical heat equation under the invariant criteria, and we achieve the related transformations. Finally, we obtain the analytical solution of the Hull-White PDE with these transformations using the properties of heat equation in the literature.

Keywords: Stochastic differential equations, heat equation, Lie symmetry analysis

I.GİRİŞ

Günümüzde stokastik diferansiyel denklemlerle modelleme yapmak sadece matematiksel finans veya ekonomi alanları için değil fizik, oyun teorisi, elektrik, meteoroloji gibi birçok temel bilim ve mühendislik alanları için kaçınılmaz araçlar arasında yerini almış bulunmaktadır. Stokastik diferansiyel denklemlerle çalışmak her ne kadar gerçek olayları doğru veya daha az hatayla modellemek açısından güzel bir yöntem olsa da işin doğası gereği bazı zorlukları da aşmak bir o kadar güç olabilmektedir. Öyle ki, birçok stokastik diferansiyel denklemin açık çözümü bulunamamakta veya açık çözümü olanların bile çözüm bileşenlerinin içinde rassal terimlerin olması asıl çözüme ulaşmada bazı ekstra işlem veya adımların olması gerekliliğini yanında getirmektedir. İşte tam bu noktada, simülasyon tabanlı sayısal yöntemler oldukça ön plana çıkmaktadır. Son zamanlarda bu duruma alternatif bir yaklaşım olarak stokastik diferansiyel denklemlere Lie simetri analizleri uygulanması oldukça önem arz eden çalışmalar arasında literatürde yerini almış bulunmaktadır. Böylece, doğası gereği karmaşık yapıya sahip olan stokastik diferansiyel denklemler, Lie simetri yaklaşımı ile daha anlaşılır ve bilinen forma indirgenebilmektedir. İndirgenen form yardımıyla da ilgili stokastik denklemin çözüm veya çözüm uzayı hakkında daha kapsamlı bilgi elde etmek mümkün olabilmektedir.

Biz de bu çalışmamızda Hull-White [1] stokastik faiz oranı modelinin numerik çözümü yerine, stokastik kalkulus ile elde edilen ve ona karşılık gelen (1+1) lineer skaler parabolik kısmi türevli denkleme Lie simetri analizini uygulayarak klasik anlamdaki

Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Ahmet BAKKALOĞLU, **Tel:** 90 505 515 5155, **e-posta:** ahmetbakkaloglu@gmail.com
Gönderilme/Submitted: 06.11.2017, **Düzenleme/Revised:** 04.05.2018, **Kabul/Accepted:** 20.05.2018

ısı (birinci tip Lie kanonik formu) denklemine dönüşebileceğini göstereceğiz ve ilgili dönüşümleri elde edeceğiz. Daha sonra ise, Hull-White kısmi türevli diferansiyel denkleminin asıl çözümünü bulduğumuz bu dönüşümlerle ve ısı denkleminin literatürdeki özelliklerini kullanarak elde edeceğiz.

Literatüre baktığımızda bu konudaki öncü ilk çalışma Gazizov ve Ibragimov [2] tarafından 1998 yılında Merton-Black-Scholes [7] denklemine uygulanarak yapılmıştır. Hemen sonrasında 2000 yılında Goard [3] Lie metodu yardımıyla bono fiyatlandırması için kullanılan kısmi türevli denkleme yeni bir çözüm bulmuştur. Pooe ve arkadaşları sıfır-kupon bono fiyatlandırma problemine temel çözüm buldukları çalışmayı ise 2004 yılında yayınlamışlardır [8].

Mahomed 2008 yılında, (1+1) lineer skaler kısmi türevli denklemlerin sınıflandırması konusunda oldukça kapsamlı bir çalışmaya imza atmıştır [6]. Bu çalışmada, Mahomed (1+1) tipindeki lineer skaler kısmi türevli denklemlerin Lie'nin 1881'de [4] bulduğu dört kanonik formdan hangisine indirgenebileceği konusunda gerek ve yeter koşulları ortaya koymuştur. Daha sonra Mahomed ve arkadaşları 2013 yılında yapmış oldukları çalışmada değişmezlik koşullarını finans alanında sıkça kullanılan bazı denklemlere uygulamanın yanı sıra Hamiltonian adı verilen yeni yaklaşımı da sunmuşlardır [5].

Bakkaloğlu ve arkadaşları ise 2016'da [9] Lie simetri değişmezlik koşulları ile optimal yatırım ve harcama probleminin çözümü üzerine makale yayınlamışlardır. Buna ek olarak, Bakkaloğlu ve arkadaşları 2017 yılında yayınladıkları makalelerinde [10] de Vasicek ve Cox-Ingersoll-Ross(CIR) rassal faiz oranları için değişmezlik kriterlerini uygulayarak bu modellerin sırasıyla birinci ve ikinci tip Lie kanonik formuna indirgenebileceğini göstererek, temel çözümleri üzerine çalışmışlardır.

Benzer şekilde, İzgi ve Bakkaloğlu da 2017 yılında matematiksel finans alanında yaygın bir şekilde kullanılan Ho-Lee ve Black-Derman Toy stokastik faiz oranı modelleri için temel çözüm bulma odaklı çalışmalarını Lie simetri tabanlı analizleri kullanarak yapmışlardır. İzgi ve Bakkaloğlu, Ho-Lee modelinin ikinci tip (klasik ısı denklemi) Lie kanonik formuna indirgenebileceğini gösterdikleri [11, 12] çalışmalarında model parametrelerinin kalibrasyonu konusunda da simülasyon destekli sonuçlar ortaya koymuşlardır. Diğer bir çalışmalarında ise, Black-Derman-Toy rassal faiz oranı modelinin üçüncü tip Lie kanonik formuna indirgenebileceğini gösterip, ilgili (1+1) lineer skaler kısmi türevli denklemin de asıl çözümünü bulmuşlardır [13].

Makalenin geri kalan bölümleri ise şu şekilde organize edilmiştir. İkinci bölümünde kısaca Hull-White stokastik faiz oranı modelinden bahsedilecektir. Üçüncü bölümde lineer parabolik (1+1) kısmi türevli denklemleri için Lie simetri yöntemi ve değişmezlik şartları sunulacaktır. Dördüncü bölümde ise Hull-White modelinin için ilk olarak ikinci kanonik forma indirgenmesini sağlayacak dönüşümler elde edilecektir. Daha sonra ise değişmezlik koşulları altındaki temel çözümü bulunacaktır.

II.HULL - WHITE STOKASTİK FAİZ ORANI MODELİ

Hull-White stokastik diferansiyel denklemi 1993 yılında John Hull ve Alan White tarafından yayınlanan makalelerinde [1] tek faktörlü faiz oranı modeli olarak ortaya atılmıştır. Hull-White stokastik faiz oranı modeli

$$dr(t) = [b(t) - k\, r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

formundadır. Buradaki sürüklenme katsayısında bulunan $r(t)$ rassal faiz oranını, $k$sabiti ortalamaya dönüş hızını göstermektedir. Ayrıca difüzyon katsayısında sabit olan σ volatiliteyi, $W(t)$ de tek boyutlu Brown hareketini göstermektedir. Özellikle, arbitrajın olmadığı modellerin geliştirilmesindeki öncü modeller arasında bulunan Hull-White modeli her ne kadar Vasicek faiz oranı modeline benzese de sürüklenme katsayısında bulunan $b(t)$ parametresi iki model arasındaki en temel farkı temsil etmektedir. Öyle ki, Vasicek modelindeki sürüklenme katsayısı olan "b" sabit bir sayı iken, Hull-White modelinde bu katsayı zamana (t'ye) bağlı rassal olmayan bir fonksiyondur. Bu durum tıpkı Ho-Lee modelinde olduğu gibi gerçek datalara yaklaşım yapmak için Hull-White modelinin oldukça önemli bir özelliği olarak karşımıza çıkmaktadır.

Ayrıca, Hull-White faiz oranı modeline Lie simetri analizlerini uygulayabilmek için ilk olarak ona karşılık gelen kısmi türevli diferansiyel denklemi bulmak gerekmektedir. Bu noktada stokastik diferansiyel denklemlerdeki stokastik kalkulus veya Ito kalkulüsundan yararlanmak gerekir. Eğer $u(x,t)'te$ (buradaki $x,\ r$'yi temsil etmek üzere) Ito kalkulüsü uygulanıp, gerekli işlemler yapılırsa

$$u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} - [b(t) - kx]u_x + xu \quad (1)$$

Hull-White (1+1) lineer skaler kısmi türevli denklemi elde edilir.

III. LİNEER PARABOLİK (1+1) KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN LİE SİMETRİ YÖNTEMİ VE DEĞİŞMEZLİK ŞARTLARI

Bu bölümde kısaca, F. Mahomed'in Lie simetri tabanlı (1+1) parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemler için elde etmiş olduğu değişmezlik koşullarından bahsedeceğiz [1]. Mahomed [1]'de bir zaman ve bir uzay boyutlu (1+1) lineer kısmi türevli denklemlerden aşağıdaki formda bulunan denklemleri incelemiştir:

$$u_t = a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u$$

Buradaki $a, b \text{ ve } c$ katsayıları $t \text{ ve } x$değişkenlerine bağlı olan sürekli fonksiyonlardır. Lie 1881 yılında yapmış olduğu çalışmasında [4] skaler lineer parabolik kısmi türevli denklemlerin dört farklı kanonik tiplerinin olduğunu göstermiştir. Biz de bu çalışmamızda Hull-White (1+1) lineer kısmi türevli denkleminin, bu dört kanonik formdan ilki olan ve bilinen anlamda ısı denklemine dönüşümüyle ilgileneceğiz. Diğer üç kanonik form ve ayrıntıları için [6] nolu çalışmayı inceleyiniz.

Bu noktada, F. Mahomed'in literatüre kazandırdığı (1+1) lineer kısmi türevli denklemlerin aşağıdaki dört kanonik formdan

$$u_t = u_{xx}$$

$$u_t = u_{xx} + \frac{A}{x^2}u, A \neq 0$$

$$u_t = u_{xx} + c(x)u, c \neq 0, A/x^2$$

hangisine düşeceğini belirleyen ve makalemizde de sonuçlarından faydalanacağımız değişmezlik koşullarını içeren teoremleri sunacağız.

Theorem 1 [Mahomed, [6]]. Lineer parabolik (1+1) kısmi türevli denklem aşağıdaki dönüşümler yardımıyla birinci tip $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$ kanonik forma (ısı denklemine) dönüştürülebilinir:

$$\bar{t} = \phi(t),$$

$$\bar{x} = \pm \int \left[\dot{\phi} a(t,x)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} dx + \beta(t),$$

$$\bar{u} = v(t)\,|a(t,x)|^{-1/4}\, u \, exp\left(\int \frac{b(t,x)}{2a(t,x)} dx\right.$$

$$-\frac{1}{8}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\int \frac{1}{a(t,x)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)dx \mp$$
$$\left.\frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}}{\dot{\phi}^{1/2}}\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)$$

Buradaki $\dot{\phi} \text{ ve } a$ aynı işaretli olmak ve $\phi, \beta \text{ ve } v$ de aşağıdaki denklemleri sağlamak üzere,

$$\dot{\phi}\bar{c} = J + \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{b(t,x)}{2a(t,x)} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{|a(t,x)|^{1/2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)dx$$

$$+ f(t)\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)^2 + g(t)\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right) + h(t)$$

öyle ki buradaki *J, f(t), g(t) ve h(t) ise sırasıyla*

$$J = c - \frac{b_x}{2} + \frac{ba_x}{2a} + \frac{a_{xx}}{4} - \frac{3}{16}\frac{a_x^2}{a} - \frac{a_t}{2a} - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(t) = \frac{1}{16}\frac{(\ddot{\phi})^2}{(\dot{\phi})^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right)_t$$

$$g(t) = \pm\frac{1}{8}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\frac{\dot{\beta}}{(\dot{\phi})^{1/2}} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\beta}}{(\dot{\phi})^{1/2}}\right)_t$$

$$h(t) = \frac{1}{4}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + \frac{1}{4}\frac{(\dot{\beta})^2}{\dot{\phi}} + \frac{\dot{v}}{v}$$

eşitlikleri yardımıyla elde edilecektir.

Theorem 2 [Mahomed, [6]]. Aşağıdaki koşullar birbirlerine denk koşullardır:

(a) Skaler lineer (1+1) parabolik kısmi türevli diferansiyel denkleminin 6 tane aşikar olmayan simetrileri yanı sıra sonsuz sayıda da superpozisyon simetrileri de mevcuttur.

(b) (1+1) parabolik kismi türevli diferansiyel denkleminin katsayıları, *J* Teorem1'deki gibi ve *L, M, N* ise aşağıdaki gibi olmak üzere,

$$L = |a|^{1/2}\left[|a|^{1/2}J_x\right]_x, \; M = |a|^{1/2}\left[|a|^{1/2}\partial_t\left(\frac{b}{2a}\right)\right]_x,$$

$$N = |a|^{1/2}\partial_t^2\left(\frac{1}{|a|^{1/2}}\right)N = |a|^{1/2}\partial_t^2\left(\frac{1}{|a|^{1/2}}\right)$$

olmak üzere

$$2L_x + 2M_x - N_x = 0$$

değişmez denklemlerini sağlar.

(c) lineer parabolik (1+1) kısmi türevli diferansiyel denklemi Teorem1'deki dönüşümler yardımıyla klasik ısı $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$ denklemine aşağıdaki denklem ile dönüştürülür:

$$J + \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{b(t,x)}{2a(t,x)} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{|a(t,x)|^{1/2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)dx$$

$$+ f(t)\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)^2 + g(t)\left(\int \frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right) + h(t) = 0$$

IV. LİE SİMETRİ ANALİZİ İLE HULL-WHITE KISMİ TÜREVLİ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde 2. Bölümde elde edilen Hull-White kısmi türevli denkleminin (1), 3. Bölümde ortaya konan Lie simetri teoremleri ve değişmezlik koşulları yardımıyla çözümünü bulacağız.

İlk olarak (1) nolu Hull-White kısmi türevli diferansiyel denklemini, (1+1) lineer parabolik denklemle

$$u_t = a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u$$

karşılaştıracak olursak, katsayıların

$$a(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$b(t,x) = -[b(t) - kx]$$

$$c(t,x) = x$$

olduğu kolaylıkla görülür. İlk olarak Teorem 2 (b) yardımıyla klasik ısı denklemine dönüşebileceğini gösterelim. Öyle ki bunun için ilk olarak Teorem1'de tanımlanan

$$J = c - \frac{b_x}{2} + \frac{ba_x}{2a} + \frac{a_{xx}}{4} - \frac{3}{16}\frac{a_x^2}{a} - \frac{a_t}{2a} - \frac{b^2}{4a}$$

$a, b \; ve \; c$ katsayıları yardımıyla gerekli işlemler yapıldıktan sonra $J = x - \frac{k}{2} + \frac{[b(t)-kx]^2}{2\sigma^2}$ olarak bulunur.

Şimdi de L, M, N'yi hesaplayalım.

$L = |a|^{1/2}\left[|a|^{1/2}J_x\right]_x$ olduğundan, $L = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\frac{k^2}{\sigma^2}\right) = \frac{k^2}{2}$ olarak elde edilir. Öte yandan,

$M = |a|^{1/2}\left[|a|^{1/2}\partial_t\left(\frac{b}{2a}\right)\right]_x$, ve $N = |a|^{1/2}\partial_t^2\left(\frac{1}{|a|^{1/2}}\right)$ için gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$M = 0, \;\; N = 0 \quad (4)$$

oldukları kolayca görülür. Değişmezlik şartı altında, yani $2L_x + 2M_x - N_x = 0$ denkleminde L, M ve N yerlerine konulursa

$$2\left(\frac{k^2}{2}\right)_x + 2.0 - 0 = 0$$

olur. O halde Hull-White kısmi türevli denkleminin Teorem 2 yardımıyla klasik ısı denklemine indirgenebileceğini söyleyebiliriz.

Şimdi ilk olarak $f(t), g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarını Teorem 2'de tanımlanan

$$J + \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{b(t,x)}{2a(t,x)}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{|a(t,x)|^{1/2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)dx$$

$$+ f(t)\left(\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)^2 + g(t)\left(\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right) + h(t) = 0$$

denkleminden elde etmeye çalışacağız. Bu denklem, $a = -\frac{1}{2}\sigma^2$ olduğundan ve bazı terimler 0 olacağından aşağıdaki forma dönüşür.

$$J + \partial_t\int\frac{b}{2a}dx + f(t)\left(\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)^2 + g(t)\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}} + h(t) = 0$$

Burada, ilgili katsayılar ışığı altında gerekli basit kalkülüs hesaplamalarından sonra *f, g* ve *h* fonksiyonları

$$f(t) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{-k^2}{2\sigma^2} = \frac{-k^2}{4}$$

$$g(t) = \frac{-\sigma}{\sqrt{2}}\left(\frac{b'(t)}{\sigma^2} - \frac{kb(t)}{\sigma^2} + 1\right)$$

$$h(t) = \frac{k}{2} - \frac{b^2(t)}{2\sigma^2}$$

olarak elde edilir. Şimdi de bu fonksiyonları Teorem 1'deki koşulda aşağıdaki gibi yerlerine koyarsak

$$\frac{1}{16}\frac{(\ddot{\phi})^2}{(\dot{\phi})^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\right)_t = -\frac{k^2}{4}$$

$$\pm\frac{1}{4}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\frac{\beta}{(\dot{\phi})^{1/2}} \mp \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{(\dot{\phi})^{1/2}}\right)_t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)$$

$$\frac{1}{4}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + \frac{1}{4}\frac{(\beta)^2}{\dot{\phi}} + \frac{\dot{v}}{v} = \frac{k}{2} - \frac{b^2(t)1}{2\sigma^2}\frac{\ddot{\phi}}{4\dot{\phi}} + \frac{1}{4}\frac{(\beta)^2}{\dot{\phi}} + \frac{\dot{v}}{v} = \frac{k}{2} - \frac{b^2(t)}{2\sigma^2}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin her biri gerekli katsayılar hesaplanıp, yerlerine konulduktan sonra çözümlenirse sırasıyla

$$\phi(t) = \frac{1}{k}\tan(kt)$$

$$\beta(t) = \int\left[\pm\sqrt{2}\int\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)\sec(kt)dt\right]dt$$

$$v = exp\left(\int\left\{\frac{k}{2} - \frac{b^2(t)}{2\sigma^2} - \frac{k}{2}\tan(kt) - \frac{1}{2}\left[\int\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)\sec(kt)\,dt\right]^2\cos^2(kt)\right\}dt\right)$$

fonksiyonları elde edilir. Şimdi bu fonksiyonlar ile Teorem1'de çizgili koordinatlarda tanımlanan dönüşümleri elde edebiliriz. İlk olarak

$$\bar{t} = \frac{1}{k}\tan(kt)$$

kolayca elde edilir. Benzer şekilde, Teorem1'de

$\bar{x} = \pm\int\left[\dot{\phi}a(t,x)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}dx + \beta(t)$ şeklinde tanımlanmıştı. Burada gerekli olan

$$a(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\left[\frac{\dot{\phi}(t)}{a(t,x)}\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sec(kt)$$

$$\int[\dot{\phi}(t)a(t,x)^{-1}]^{1/2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}x\sec(kt)$$

terimleri yerlerine konulduktan sonra

$$\bar{x} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sigma}x\sec(kt) + \int\left[\pm\sqrt{2}\int\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)\sec(kt)dt\right]dt$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\bar{t}$ *ve* $\bar{x}$ yardımıyla da Hull-White kısmi türevli denkleminin çizgili koordinatlardaki çözümünü Teorem1'deki

$$\bar{u} = v(t)\,|a(t,x)|^{-1/4}\,u\,exp\left(\int\frac{b(t,x)}{2a(t,x)}dx\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\left(\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\int\frac{1}{a(t,x)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)dx \mp \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}}{\dot{\phi}^{1/2}}\int\frac{dx}{|a(t,x)|^{1/2}}\right)$$

ifade yardımıyla ve ilgili terimler hesaplandıktan sonra

$$\bar{u} = v(t)\left|-\frac{1}{2}\sigma^2\right|^{-1/4}u\,exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left[b(t)x - \frac{kx^2}{2}\right] - \frac{1}{2}ktan(kt)\frac{x^2}{\sigma^2} \pm \left(\sqrt{2}\left[\int\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)\sec(kt)\,dt\right]\cos(kt)\right)\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right)\right\}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, Pooe, Mahomed and Soh klasik ısı denkleminin çizgili koordinatlardaki çözümünün

$$\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{t}\pi}}exp\left[-\frac{(\bar{x})^2}{4\bar{t}}\right]$$

şeklinde olduğu 2004 yılındaki makalelerinde verilmiştir [8]. Bu sonuç yardımıyla da

$$\frac{1}{2\sqrt{\bar{t}\pi}}exp\left[-\frac{(\bar{x})^2}{4\bar{t}}\right] = v(t)\left|-\frac{1}{2}\sigma^2\right|^{-1/4}u\,exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left[b(t)x - \frac{kx^2}{2}\right] - \frac{1}{2}ktan(kt)\frac{x^2}{\sigma^2} \pm \left(\sqrt{2}\left[\int\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)\sec(kt)\,dt\right]\cos(kt)\right)\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right)\right\}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak, Hull-White (1+1) lineer parabolik kısmi türevli denkleminin Lie simetri analizi ile değişmezlik kriterleri yardımıyla çözümü

$$u(x,t) = v^{-1}\left|-\frac{1}{2}\sigma^2\right|^{1/4}\frac{1}{2\sqrt{\bar{t}\pi}}exp\left[-\frac{(\bar{x})^2}{4\bar{t}}\right]exp^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left[b(t)x - \frac{kx^2}{2}\right] - \frac{1}{2}ktan(kt)\frac{x^2}{\sigma^2} \pm \left(\sqrt{2}\left[\int\left(\frac{b'(t)}{\sigma} - \frac{kb(t)}{\sigma} + \sigma\right)\sec(kt)\,dt\right]\cos(kt)\right)\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sigma}\right)\right\}$$

olarak elde edilir. Dikkat edilecek olunursa, eşitliğin sağ tarafında bulunan çizgili koordinatlardaki parametreler ($\bar{x}$ ve $\bar{t}$) yerlerine yazılarak elde ettiğimiz asıl çözüm tamamen daha açık olarak da yazılabilinir.

V. TEŞEKKÜR

Makalenin yazım aşamalarındaki desteklerinden ötürü Murat Özkaya'a, ayrıca dergi editör ve hakemlerine yapıcı eleştirileri ve tavsiyerlerinden dolayı kendilerine teşekkürlerimizi sunarız.

KAYNAKLAR

[1] Hull, J. ve White, A., (1993). One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 2, 235-254.

[2] Gazizov, R. K. ve Ibragimov N. H., (1998). Lie Symmetry Analysis of Differential Equations in Finance, *Nonlinear Dynam.* 17(4), 387-407.

[3] Goard, J., (2000). New Solutions to the Bond-Pricing Equation via Lie's Classical Method, *Math. Comput. Model.*, 32, 299-313.

[4] Lie, S., (1881). On Integration of a Class of Linear Partial Differential Equations by means of Definite Integrals Archiv for Mathematik ıg Naturvidenskab, VI(3) 328-368.

[5] Mahomed, F. M., Mahomed, K. S., Naz, R. ve Momoniat, E., (2013). Invariant Approaches to Equations of Finance, *Math. Comput. Appl.*, 18(3), 244-250.

[6] Mahomed, F. M., (2008). Complete Invariant Characterization of Scalar Linear (1+1) Parabolic Equations, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 15, 112-123.

[7] Merton, R., (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous, *J. Financial Economics,* 3, 125-144.

[8] Pooe, C. A., Mahomed, F. M. ve Wafo Soh, C., (2004). Fundamental Solutions for Zero-Coupon Bond Pricing Models, *Nonlinear Dynam.*, 36, 69-76.

[9] Bakkaloğlu, A., Aziz, T., Fatima, A., Mahomed, F.M. ve Khalique, C. M., (2016). Invariant Approach to Optimal Investment-Consumption Problem: the constant elasticity of variance (CEV) model, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, 5, 1382-1395.

[10] Bakkaloğlu, A., Mahomed, ve F. M., Aziz, T., (2017). Invariant Criteria for the Zero-Coupon Bond Pricing Vasicek and Cox-Ingersoll-Ross Models, *New Trends in Mathematical Sciences*, 2, 29-46.

[11] İzgi, B. ve Bakkaloğlu, A., (2017). Deterministic Solutions of the Stochastic Differential Equations Using Invariant Criteria, *Proceedings of ICPAS 2017*, ISBN: 978-605-9546-02-7, 323-326.

[12] İzgi, B. ve Bakkaloğlu, A., (2017). Fundamental Solution of Bond Pricing in the Ho-Lee Stochastic Interest Rate Model Under the Invariant Criteria, *New Trends in Mathematical Sciences*, 5, 1, 196-203.

[13] İzgi, B. ve Bakkaloğlu, A., (2018). Invariant Approaches for the Analytic Solution of the Stochastic Black-Derman Toy Model, *Thermal Science*, 22, 1, 265 - 275, DOI https://doi.org/10.2298/TSCI171120030I.