

Tabakalı Bileşik Levhaların Dinamik Analizi İçin Üç Bağlantı Noktalı Bir Melez-Gerilme Elemanı

Suha ORAL

Y.Doç.Dr.
Makina Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ANKARA

Bilgin KAFTANOĞLU

Prof.Dr.
Makina Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ANKARA

Bu çalışmada, tabakalı bileşik levhaların dinamik analizi için geliştirilen üç bağlantı noktalı, kayma şekil değiştirmeli, anizotropik bir melez-gerilme sonlu eleman tanıtılmaktadır. Eleman, Yang-Norris-Stavsky teorisi kullanılarak formüle edilmiş olup, bütün kalınlık rejimlerinde iyi sonuç vermektedir. Standard melez-gerilme fonksiyoneli Gauss teoremi ile değişik bir forma sokulmuş ve böylelikle kütle matrisi uyumlu olarak elde edilmiştir. Üç bağlantı noktalı, kayma şekil değiştirmeli eğilme elemanlarında ince levhalarda görülen kilitlenme, anizotropik interpolasyon fonksiyonları kullanılarak önlenmiştir. Geometrik değişmezlik özelliğine sahip olan elemanda bir adet yapay mekanizma bulunmaktadır.

GİRİŞ

Tabakalı bileşik levhaların analizi için çoğunluğu yer değiştirme modeli olmak üzere çeşitli elemanlar türetilmiştir. Yer değiştirme modeli elemanlarda homojen denge denklemlerinin mutlaka sağlanması gerekmektedir. Ayrıca yer değiştirme modeli elemanlar yüksek interpolasyon dereceleri kullanmadığı takdirde katı sonuçlar vermektedir. Her ne kadar yer değiştirme modellerinin performansı azaltılmış integrasyon tekniği ile yükseltilebilirse de ince levha limitinde görülen kilitlenme ortadan kalkmamaktadır. Dolayısıyla bu çalışmada melez-gerilme modelinin kullanılması uygun görülmüştür.

Literatürde mevcut bulunan melez-gerilme elemanları arasında MLP3K [1] uygulama açısından en elverişli eleman olarak nitelendirilebilir. Bu dörtgen elemanda dört bağlantı noktası olup, tabaka sayısından bağımsız olarak 20 serbestlik derecesi ve 16 gerilme katsayısı vardır. Diğer taraftan, karmaşık sınır ve yüzey geometrilerinde üçgen eleman kullanımının kolaylığı ve/veya gerekliliği açıktır. Mevcut melez-gerilme elemanları arasında bu ihtiyacı karşılayacak bir elemanın olmaması bu çalışmanın temel nedenini oluşturmuştur. Bu makalede formülasyonu gösterilen eleman, serbestlik dereceleri ve gerilme katsayılarının tabaka sayısından bağımsız olması açısından MLP3K elemanın üç bağlantı noktalı bir versiyonu olarak düşünülebilir. Fakat, bağlantı noktası sayısının dörtten üçe düşmesiyle ortaya çıkan izoparametrik kayma kilitlenmesinin anizotropik interpolasyonlar ile önlenmesi ve mevcut elemanda bütün integrasyonların analitik olarak yapıldığı göz önüne alındığında, iki eleman arasında formülasyon açısından önemli farklar olduğu ortaya çıkar.

Aşağıda katılık matrisi ve uyumlu kütle matrisinin formülasyonu açıklanmakta ve sayısal örnekler

kısımında eleman çeşitli değişkenlere göre denenecektir.

FORMÜLASYON

Melez-gerilme fonksiyoneli, tabakalı bileşik levhalar için dinamik rejimde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{n=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{A_n} -\frac{1}{2} \{\tau\}^T [S] \{\tau\} dA + \int_{A_n} \{\tau\}^T \{\epsilon\} \right. \\ & - \int_{A_{t_n}} \{\bar{u}\}^T \{\bar{T}\} dA \\ & \left. + \int_{A_n} \left[\sum_{\ell=1}^L \int_{h_\ell}^{h_{\ell+1}} \rho_\ell \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dz \right] dA \right\} dt \quad (1) \end{aligned}$$

Bu ifadede $\{u\}$ yer değiştirme, $\{\bar{u}\}$ sınır yer değiştirme, $\{\tau\}$ gerilme ve $\{\epsilon\}$ şekil değiştirme vektörleri olup, $[S]$ malzeme matrisidir. A_n , n elemanın alanı, h_ℓ ise ℓ tabakasının alt yüzeyinin levhanın geometrik orta yüzeyine olan vektörel uzaklığıdır. $\{\bar{T}\}$, dış kuvvetler vektörü olup, mevcut çalışmada sadece doğal frekans analizi yapılacağı için formülasyonun bundan sonraki kısımlarında göz önüne alınmayacaktır. ρ_ℓ , ℓ tabakasının özgül ağırlığıdır. L , n elemandaki toplam tabaka sayısı, N ise, sonlu eleman örgüsündeki toplam eleman sayısıdır.

Melez-gerilme fonksiyoneli gerilme ve yer değiştirme sahaları için iki bağımsız kabul yapmak gerekir. Hız ve şekil değiştirme sahaları, yer deği-

tirme sahasının uygun türevleri şeklinde elde edilir. Bu durumda gerilme sahası

$$\{\tau\} = [P]\{\beta\} \quad (2)$$

şeklinde $\{\beta\}$ gerilme katsayıları cinsinden, yer değiştirme sahası ise,

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (3)$$

şeklinde $\{q\}$ serbestlik dereceleri cinsinden seçilebilir. Bu kabuller sonucunda, melez-gerilme fonksiyonelinin gerilme katsayılarına göre birinci değişimi, bu katsayılar ile serbestlik dereceleri arasında aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$\{\beta\} = [H]^{-1}[G]\{q\} \quad (4)$$

Burada

$$[H] = \int_{A_n} [P]^T [S] [P] dA$$

ve

$$[G] = \int_{A_n} [P]^T [B] dA \quad (5)$$

olup, $[B]$ matrisi, $[N]$ matrisinin türevi alınarak bulunur ve serbestlik dereceleri ile ön çarpımı, şekil değiştirme vektörünü verir.

Bu bağıntının kullanılması ile eleman katılık ve kütle matrisleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$[k] = [G]^T [H]^{-1} [G]$$

$$[m] = \int_{A_n} \left[\sum_{\ell=1}^L \int_{h_\ell}^{h_{\ell+1}} \rho_\ell [N]^T [N] dz \right] dA \quad (6)$$

Melez-gerilme modelinde gerilme sahası homojen denge denklemlerini sağlayacak şekilde seçilir. Bunun yanı sıra, elemanın geometrik değişmezlik özelliğine sahip olması için gerilme sahası tam polinomlar ile ifade edilmelidir. Orta yüzeyi xy -düzleminde olan bir levha için aşağıdaki gerilme fonksiyonları her iki şartı da sağlamaktadır:

$$N_{xx} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

$$N_{yy} = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y$$

$$N_{xy} = \beta_7 - \beta_8 x - \beta_2 y$$

$$M_{xx} = \beta_8 + \beta_9 x + \beta_{10} y \quad (7)$$

$$M_{yy} = \beta_{11} + \beta_{12} x + \beta_{13} y$$

$$M_{xy} = \beta_{14} + \beta_{15} x + \beta_{16} y$$

$$Q_{xz} = \beta_9 + \beta_{16}$$

$$Q_{yz} = \beta_{13} + \beta_{15}$$

Yang-Norris-Stovsky teorisine göre yer değiştirmelerin kalınlık boyunca dağılımı aşağıdaki gibi olmalıdır [2]:

$$U(x,y,z,t) = u(x,y,t) + z\phi(x,y,t)$$

$$V(x,y,z,t) = v(x,y,t) + z\theta(x,y,t) \quad (8)$$

$$W(x,y,z,t) = w(x,y,t)$$

Burada U, V, W sırasıyla x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeler olup, u, v, w orta yüzey yer değiştirmeleri, θ ve ϕ ise, x ve y eksenleri etrafındaki normal dönmelerdir. Normal dönmeler, orta yüzey yer değiştirmelerinden bağımsızdır. Dolayısıyla geliştirilen eleman C^0 devamlılık tipi olup u, v, w, θ ve ϕ , bağlantı noktalarındaki serbestlik dereceleridir.

İzoparametrik interpolasyon fonksiyonları kayma kilitlenmesine neden olduğundan, yer değiştirme sahasının kabulünde anizoparametrik fonksiyonlar kullanılmıştır [3]. Bu fonksiyonların kullanılması sonucu ortaya çıkan orta-kenar bağlantı noktaları, kenarlar boyunca sabit kayma açısı kabulü ile ortadan kaldırılmıştır. Buna göre yer değiştirme sahası aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$s = \xi_i s_i \quad (s = u, v, \theta, \phi)$$

$$w = \xi_i w_i + \frac{1}{2}(b_k \xi_i \xi_j - b_j \xi_i \xi_k) \theta_i$$

$$+ \frac{1}{2}(a_j \xi_i \xi_k - a_k \xi_i \xi_j) \phi_i \quad (9)$$

$$(i=1,2,3; j=2,3,1; k=3,1,2)$$

Yukardaki bağıntılarda ξ_i üçgen alan koordinatları olup a_i ve b_i aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$a_i = x_k - x_j \quad (i=1,2,3; j=2,3,1; k=3,1,2) \quad (10)$$

$$b_i = y_j - y_k$$

Levha şekil değiştirmeleri (9) bağıntılarının türevleri alınarak bulunur ve $[B]$ matrisi oluşturulur. Malzeme matrisi $[S]$ ise, her tabakanın elastik özellikleri, fiber açıları ve kalınlıklarına bağlı olarak levha için hesaplanır [4].

SAYISAL ÖRNEKLER

Bu kısımda geliştirilen elemanın dinamik davranışı çeşitli kalınlık rejimlerinde ve fiber açılarında denenmektedir. Mevcut elemanın 6×6 örgüsü ile elde edilen sonuçlar Reddy [5] tarafından geliştirilen 8 bağlantı noktalı kayma şekil değiştirmeli dikdörtgen yer değiştirme modeli eleman ile alınan sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Basit mesnetli ($45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ$) simetrik dizilimli kare levhaların temel doğal frekansları: Bu problemde her tabakası eşit kalınlıkta basit mesnetli kare bir simetrik bileşik levhanın temel frekansı çeşitli kalınlık rejimleri için hesaplanmaktadır. Her tabakanın elastik özellikleri aynı olup, aşağıdaki gibidir:

$$E_{11}/E_{22} = 25$$

$$G_{12}/E_{22} = 0.5$$

$$G_{23}/E_{22} = 0.2$$

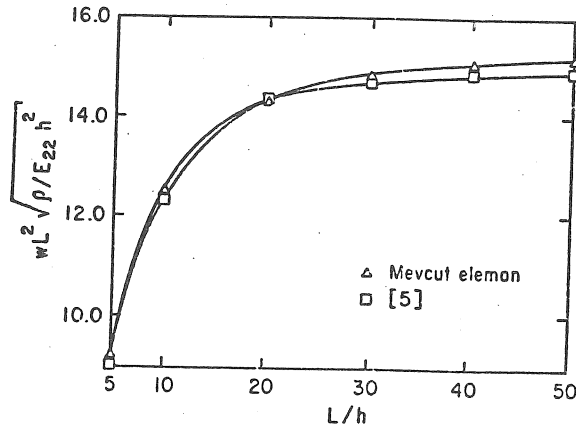
$$G_{31} = G_{12}$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

Kayma düzeltme faktörü 5/6 olarak alınmıştır. Çizelge 1'de çeşitli kalınlık/kenar oranları için hesaplanan boyutsuz temel frekanslar verilmektedir. Şekil 1'de ise, hesaplanan sonuçlar Reddy'nin çözümleri ile birlikte gösterilmektedir.

Çizelge 1 Basit mesnetli ($45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ$) kare bileşik levhaların temel doğal frekansları

L/h	5	10	20	30	40
λ	9.235	12.542	14.352	14.852	15.064
50					
					15.174

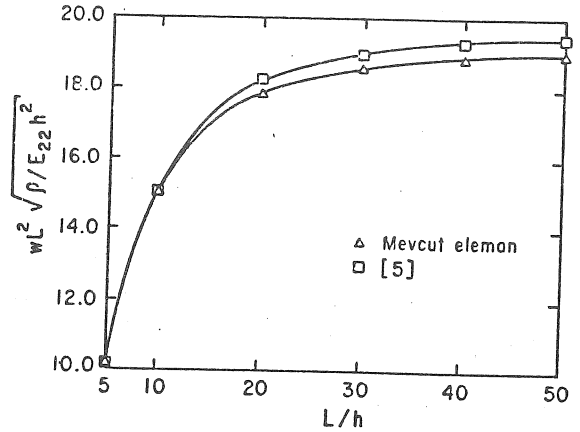


Şekil 1 L/h kalınlık/kenar uzunluğu oranının basit mesnetli bir simetrik bileşik levhanın temel doğal frekansı üzerindeki etkisi

Basit mesnetli ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$) anti-simetrik diziliimli kare levhaların temel doğal frekansları: Bu örnek dengelenmiş ve dengelenmemiş bileşik levhaların dinamik davranışları arasındaki farkı incelemek açısından seçilmiştir. Malzeme özellikleri ve tabaka dizilimi dışında diğer geometrik özellikler bir önceki problem ile aynıdır. Mevcut eleman ile hesaplanan değerler Çizelge 2'de verilmekte, Reddy tarafından bulunan sonuçlar ile karşılaştırma ise, Şekil 2'de gösterilmektedir.

Çizelge 2 Basit mesnetli ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$) kare bileşik levhaların temel doğal frekansları

L/h	5	10	20	30	40
λ	10.235	15.024	17.840	18.566	18.843
50					
					18.976



Şekil 2 L/h kalınlık/kenar uzunluğu oranının basit mesnetli bir antisimetrik bileşik levhanın temel doğal frekansı üzerindeki etkisi

Basit mesnetli ($\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha$) anti-simetrik diziliimli kare levhaların temel doğal frekansları: Bu örnekte anti-simetrik bileşik levhaların temel doğal frekanslarının fiber açılarına göre değişimi incelenmiştir. L/h oranı bütün fiber açıları için 10 olarak alınmıştır. Her tabakanın kalınlığı ve malzeme özellikleri aynı olup, malzeme özellikleri aşağıda gösterildiği gibidir:

$$E_{11}/E_{22} = 40$$

$$G_{12}/E_{22} = 0.6$$

$$G_{23}/E_{22} = 0.5$$

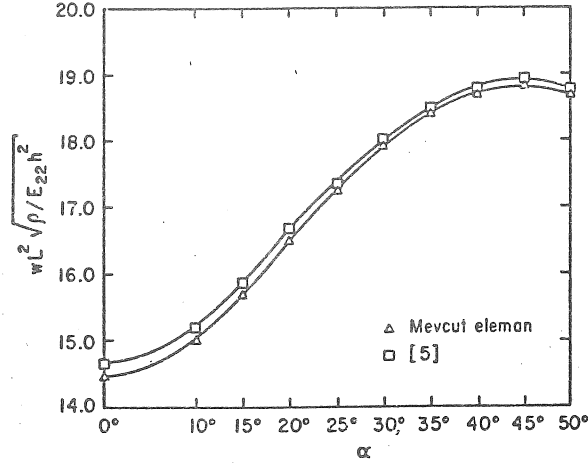
$$G_{31} = G_{12}$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

Kayma düzeltme faktörü 5/6 olarak alınmıştır. Çizelge 3'de çeşitli α açılarında mevcut eleman ile hesaplanan değerler verilmektedir. Bu değerler Şekil 3'de Reddy tarafından hesaplanan frekanslar ile karşılaştırılmaktadır.

Çizelge 3 Basit mesnetli ($\alpha/-\alpha/\alpha/-\alpha$) kare bileşik levhaların temel doğal frekansları

α	5°	10°	15°	20°	25°
λ	14.490	15.005	15.699	16.501	17.268
	30°	35°	40°	45°	50°
	17.916	18.402	18.705	18.809	18.705



Şekil 3 Fiber açılarının basit mesnetli bir antisimetrik bileşik levhanın temel doğal frekansı üzerindeki etkisi

SONUÇ

Bileşik levhaların dinamik analizi için 15 serbestlik dereceli, C^0 devamlılık tipi, kayma şekil değiştirmeli bir melez-gerilme modeli geliştirilmiştir. Eleman kilitlenmemekte ve geometrik değişmezlik özelliğine sahip bulunmaktadır. Sayısal çözümlerde elemanın yüksek hassasiyete ulaştığı görülmüştür. Eleman, serbestlik derecelerinin basitliği ve üçgen olması dolayısıyla her türlü levha ve katlanmış levha probleminde kolaylıkla kullanılabilir.

A THREE-NODE HYBRID STRESS ELEMENT FOR THE DYNAMIC ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES

In this study, a three-node shear-flexible anisoparametric hybrid-stress element is developed for the dynamic analysis of multi-layered composite plates. The element is based on the Yang-Norris-Stavsky theory and can be used in all thickness regimes. The standard form of the hybrid-stress functional is modified by the Gauss theorem so as to obtain the element mass matrix consistently. The shear locking found in three-node shear flexible bending elements is alleviated by using anisoparametric interpolation functions. The element is invariant but has one spurious zero energy mode.

KAYNAKÇA

1. Spilker, R.L., Chou, S.C. and Orringer, O., "Alternate Hybrid-Stress Elements for Analysis of Multilayer Composite Plate", *J. Compos. Mater.*, 11 (1977), 51-70.
2. Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, Y., "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates", *Int. J. Solids Struct.*, 2 (1966), 665-684.
3. Tessler, A. and Hughes, T.J.R., "A Three-Node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 50 (1985), 71-101.
4. Oral, S. ve Kaftanoğlu, B., "Tabakalı Bileşik Levhaların Analizi İçin Bir Sonlu Eleman Yöntemi", 2. Ulusal Makina Tasarım ve İmalat Kongresi, Bildiri Kitabı, 443-454, ODTÜ, 1986.
5. Reddy, J.N., "A Penalty Plate Bending Element for the Analysis of Laminated anisotropic Composite Plates", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 15 (1980), 1187-1206.