



An Analysis of Seventh Graders' Skills in Doing Proofs¹

Ebru AYLAR²

Abstract. This research explores how 48 seventh graders' ability to do proofs have changed as a result of a treatment consisting of 14 hours of instruction, aimed at developing formal approach to proofs, spread to 13-weeks. In this study, first activities focusing on formal proofs were carried out, in a classroom setting, followed by a Proof Test, designed to measure students' ability to do proofs. After the test, clinical interviews were carried out with the students. After the interventions, an improvement on students' ability to do proofs was observed. Students were more successful doing proofs by contradiction than other methods. Students clearly had difficulty in writing proofs by cases.

Keywords: Ability to do proofs, direct proof, proof by contradiction, exhaustive proof, proof by cases, proofs in middle school

¹ This article includes a section of the doctorate dissertation titled " Examination of 7th Grade Students' Ability on Proving and Their Perception of Proving" and whose advisor is Assoc. Prof. Dr. Yeter Şahiner.

² Res. Assist. Dr., Ankara University, Faculty of Educational Sciences, Department of Secondary School Science and Mathematics Education, eaylar@ankara.edu.tr

SUMMARY

Purpose and Significance: In the last few decades, even though NCTM has suggested the integration of proofs to all mathematics areas and grades, in the literature, very few studies were found focusing on how middle school students deal with proofs. Moreover, Aktaş (2002) claims that the concept of proof initially begins during pre-school. Such skills as categorizing, determining equivalence, ordering, comparing, which constitute the basis of proving, are gained in early years (Altıparmak ve Öziş; 2005). This research explores how seventh graders' ability to do proofs have changed as a result of a treatment consisting of 14 hours of instruction, aimed at developing a formal approach to proofs, spread to 13-weeks. The study focuses on direct proof, proof by cases, proof by contradiction, and exhaustive proof. Study also describes the difficulties encountered by students when doing proofs. The results of this work may guide future efforts in program development.

Method: The research utilized both qualitative and quantitative data, and the collected data was analysed descriptively. The research participants were composed of 48 7th grade students, representing two different socioeconomic groups. For data collection, three instruments, one measuring students' readiness for doing proofs, another measuring students' ability to do proofs and clinical interview form were developed and used. The frequency and percentages of observations from the data was calculated.

Results: Before the classroom intervention that concentrated in proofs, students could not prove propositions, but attempted at justification by giving numerical examples, and sometimes could not even do that. After the intervention, a decrease was observed in the tendency to attempt to justify propositions via giving numerical examples; however, this tendency did not cease all together. Despite this tendency, it was observed that 23% of the students could write a direct proof. Students' success rate in writing exhaustive proofs was similar to that of direct proofs. Students had the highest success rate (58.3%) with propositions that could be proved using a proof by contradiction. Students' lowest performance (2.1%) was in dealing with proofs by cases, because they had a hard time analysing the necessary cases.

Discussion and Conclusions: Even after the interventions, students were not comfortable doing proofs; though, they learned to do direct proofs, proofs by contradiction, and exhaustive proofs to various degrees. Students had the most difficulty doing proofs by cases.



7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Becerilerinin İrdelenmesi¹

Ebru AYLAR²

ÖZ. Bu araştırmada, 7. sınıf öğrencisine ispat becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretim uygulandığında, ispat becerilerinin nasıl değişeceği sorusuna yanıt aranmıştır . Araştırmada 7. sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ilk olarak Hazır Bulunuşluk Testi ile ölçölmüş, daha sonra 13 haftaya yayılmış 14 saatlik formal ispat yapabilecekleri uygulamalara yer verilmiştir. Gerçekleştirilen bu uygulamaların ardından doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemlerini içeren İspat Testi öğrencilere uygulanmıştır. Sınav sonrasında, öğrencilerle yapılan bire bir görüşmelerle, düşönceleri daha çok irdelenmiştir. Gerçekleştirilen uygulamaların ardından öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinde bir gelişim gözlenmiştir. Öğrenciler karşı örnek vererek ispat yönteminde diğer yöntemlere göre daha başarılı olurken, durum yolu ile ispat yönteminde belirgin bir şekilde başarısız olmuşlardır.

Anahtar Sözcükler. İspat becerisi, doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat, durum yolu ile ispat, ortaokulda ispat

¹ Bu makale Doç. Dr. Yeter şahiner danışmanlığında yürütölen "7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi" başlıklı doktora tezinin bir bölümünü içermektedir.

² Arş. Gör. Dr. Ebru Aylar, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakölteesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, eaylar@ankara.edu.tr

GİRİŞ

Matematiksel ispat matematiğin önemli bir parçasıdır. Matematik ve matematik eğitiminin temelinde yer alan önemli kavramlardan birisi olan ispat kavramının (Lee, 2002) önemine her iki alan literatüründe de değinilmektedir. İspat, matematiksel bilgilerin doğruluğunu ya da yanlışlığını ortaya koyar (Tall & Mejia-Ramos, 2006). Matematik öğretimi açısından ise matematiksel bilginin inşasının sağlanmasında önemli bir rol oynar. İspat, matematik bilmek ve yapmak adına, matematik algısının temelini oluşturmak adına, matematiksel bilginin kavranması, kullanılması ve geliştirilmesi adına önemlidir (Hanna & Jahnke, 1996; Kitcher, 1984; Polya, 1981). Tüm bu vurgular ispatın sadece matematikteki önemini değil, matematik eğitimindeki önemine de işaret eder. Matematik eğitiminde, ispat, matematiksel bilginin kavranması açısından önem taşımaktadır. Bu bağlamda, ispat, öğretim sürecinde ezberin önlenmesi, kavramsal bilginin inşa edilmesi yolu ile anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi için de kritiktir. Buna rağmen, ispatın sadece ileri düzey matematikte yer almasını, ancak lise ve üstü seviyede öğrencilerinin ispata yönelik anlamlı öğrenme geliştirebildiğini savunan geleneksel bir eğilim de vardır (Fawcett, 1995; Cooper vd., 2011). NCTM'in (National Council of Teachers of Mathematics) 2000 yılında yayınladığı "Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları" raporu bu eğilimde önemli bir kırılmaya sebep olmuştur. NCTM bu raporunda ispat öğretimini her yaş kuşağı için matematik öğretiminin önemli bir bileşeni olarak ele almış ve bu alana yönelik ilgi ve tartışmaların yoğunlaşmasına neden olmuştur. NCTM, ispatı, programın belirli konuları için belirli zamanlarında yapılan özel bir aktivite olarak ele almamaktadır. İspat ve akıl yürütme, hangi konuda olursa olursun, ders işleme sürecinin doğal akışının bir parçası olmalıdır (NCTM, 2000). NCTM matematiği anlamak için ispatı kavramının önemine değinir. Buna karşın, ülkemizin 2013 yılında güncellenen ilkökul ve ortaokul matematik programının içeriğinde NCTM'nin süreç ve içerik standartlarına büyük oranda yer verdiği halde ispata aynı derecede önem verilmediği gözlemlenmektedir.

12 yıllık zorunlu eğitime geçiş uygulaması ile öğretim programları 2013 yılında tekrar güncellenmiştir. Güncellenen programlar incelendiğinde, ilkökul ve ortaokul programında, ispata kavram olarak değinilmediği görülmektedir. Öğrencilere kazandırılması gereken beceriler problem çözme, ilişkilendirme, iletişim, tahmin ve akıl yürütme olarak sıralanmış, ispat bir beceri olarak programda ele alınmamıştır. Buna karşın akıl yürütme becerisi programda şu şekilde tanımlanmıştır: "*Akıl yürütme (muhakeme), eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim,*

karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak tanımlanabilir." (MEB, 2013:5). Akıl yürütme becerisi öğrencilerin matematiksel çıkarımların doğruluğunu ve geçerliğini savunmalarını da içerir ve böylelikle öğrencilerin kuralları doğrudan ezberlemeleri yerine, kuralların arkasında yatan kavramları anlamaları beklendiğini ortaya koyar. Bu bağlamda 2013 Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Programı incelendiğinde, ispat kavramına programda yer verilmemiş olsa da, ispat ile akıl yürütme becerisi arasında dolaylı bir ilişki kurulduğu gözlemlenmektedir.

Aktaş (2002), bilişsel gelişim süreci içerisinde, ispat kavramının oluşmasının okul öncesi dönemde başladığını söyler. Piaget tarafından sezgisel dönem olarak adlandırılan bu süreç aynı zamanda mantıksal düşünmeye geçiş dönemidir. Sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma gibi ispatın temelini oluşturan kavramların bu süreçte kazandırılması hedeflenir ve bu hedefler mantıksal düşünmeye geçişte köprü görevi üstlenirler (Altıparmak ve Öziş; 2005).

Altıparmak ve Öziş'e (2005) göre ilkökul döneminde ise çocuklar somut işlem dönemindedirler. Bu süreç zarfında öğrencilerin somut nesne ve durumlar üzerinden akıl yürütmeleri ve varsayımda bulunmaları sağlanmalıdır. 3. sınıfa kadar fiziksel materyaller üzerinden nesnelere karşılaştıran, benzerlik veya farklılıklarına yönelik muhakemede bulunan ve bunun üzerinden genellemeye ulaşan öğrenciler, 3. sınıftan itibaren ulaştıkları genellemeleri ve varsayımları test edip, savunmaya teşvik edilmelidirler. Bu seviyedeki öğrenciler varsayımlarını sınamak veya varsayımlarının doğruluğunu göstermek için birkaç örneğin yeterli olmadığını bilmeli, birbirlerinin muhakemelerini sorgulayabilmeli ve karşı örnekleri varsayımlarını çürütebilmek için kullanabilmelidirler. Matematiksel iddia kavramı bu yaşlarda oluşmaktadır (Altıparmak ve Öziş; 2005).

Ortaokul döneminde öğrencilerde soyut düşüncenin gelişimi söz konusudur. Öğrenciler bu dönemde matematiksel ifadeleri sembolik dil kullanarak ifade etmeye başlarlar. Öğrenciler matematiksel iddiaları tümdengelim ve tümevarım yöntemlerini kullanarak sınavabilir, yanlış olan ifadelere karşı örnekler sunabilirler (NCTM, 2000). Tüm bu aktarımlar bireyde bilişsel gelişim süreci içerisinde ispat düşüncesinin erken yaş döneminden başlayarak gelişmekte olduğunu ortaya koymaktadır. Anaokulundan başlayarak tüm öğretim düzeylerinde bu gelişim yayılabilir. Öğretim sürecini bu bağlamda düzenlemek ve çeşitli öneriler sunabilmek için tüm öğretim kademelerinde öğrencilerin ispata yönelik yaklaşımını, ispatı ne oranda algılayıp, yapabileceklerini betimleyecek çalışmalara ihtiyaç vardır.

İlgili alan yazın incelendiğinde, ülkemizde lise öncesi dönemde ispat ve ispat öğretimine yönelik yapılan çalışmaların oldukça sınırlı sayıda olduğu görülmektedir. Ortaokul düzeyinde gerçekleştirilen çalışmalarda (Arslan, 2007; Çalışkan, 2012; Zaimoğlu, 2012) öğrencilere ispat öğretimi üzerinden hiçbir müdahalede bulunulmamış, öğrencilerin ispata yönelik algı veya performansları verili öğretim süreci içerisinde sınanmış ve betimlenmiştir. Bu çalışmalar öğrencilerin ispatı kavramakta yaşadıkları zorluklar ile genellemeye ulaşmak için örnekle doğrulamayı veya deney ve gözleme dayalı başka tümevarımsal yaklaşımları tercih ettiklerini ortaya koymaktadır. Yabancı alan yazında ise NCTM'nin (2000) raporunun ardından, ispat öğretiminin lise öncesi öğretim kademelerinde ele alınabileceğini savunan çalışmalarda sayıca bir artış görülmektedir (Ball vd., 2002; Cyr, 2011; Knuth vd., 2012; Stylianides, 2007).

Ortaokul dönemindeki öğrencilere ispat yapmanın öğretilmesinin onların ispat yapabilmesine etkisini anlamak ve alan yazınındaki bir boşluğu doldurmak amacı ile bu çalışmada 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerileri irdelenmektedir. Ortaokul öğrencileri somut düşünceden soyut düşünceye geçiş aşamasında yer alırlar ve tümdengelimsel çıkarımlar yapmaya başlarlar. 6. sınıf öğrencileri için sembolik dili kullanabilmek temel bir beceridir. Bu düzeyde öğrencilerden sembolik gösterimleri anlamlandırılmaları ve cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapmaları beklenmektedir (MEB, 2013). 7. sınıfta ise sembolik dil kullanımı pekiştirilmektedir. Cebir soyut düşünme becerisinin gelişiminde önemli bir adımdır. Bu nedenle bu çalışmada 7. sınıf öğrencilerinin belirli bir soyutlama düzeyinde genellenebilir yargılar sunarak formal ispat yapabilecekleri, tümdengelimsel akıl yürütme kullanabilecekleri varsayılmaktadır. Bu etkenler çerçevesinde, çalışmada 7. sınıf öğrencilerine ispat becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretim uygulandığında, ispat becerileri ve performanslarının nasıl değişeceği sorusuna yanıt aranmaktadır. Çalışmada ispat kavramıyla birlikte “doğrudan ispat”, “durum yoluyla ispat”, “karşı örnek vererek ispat” ve “tüketerek ispat” yöntemleri de ele alınmaktadır. Öğrencilerin performansları dışında, bu ispat yöntemlerinin öğrenciler tarafından nasıl uygulandığı ve ispat yaparken karşılaştıkları zorlukların betimlenmesi de hedeflenmektedir. Elde edilen bulguların, eğitimcilere uygulamalar ve öğretim programının geliştirilebilmesinde ışık tutması amaçlanmaktadır.

YÖNTEM

Bu araştırma nitel araştırma yaklaşımlarından birisi olan eylem araştırması olarak kurgulanmıştır. Sosyal durum içerisinde eylemin niteliğini

geliştirmenin amaçlandığı eylem araştırmasında (Elliot, 1991), eğitimcilerin uygulamalarının geliştirilmesinin yanı sıra bu doğrultuda bilgilendirilmeleri de amaçlanabilmektedir (Calhoun, 2002). Araştırmada ilk olarak 7. sınıf öğrencilerinin ispat becerilerini geliştirmeye yönelik, şu an yürürlükte olan programda olmayan bir içerik uygulanarak yeni bir yaklaşım denenmektedir. Eylem araştırmasında verilerin toplanması ve analizi sürecinde çeşitli yöntem ve teknikler kullanılabilir. Bu araştırmada nitel ve nicel veriler birlikte kullanılmıştır. Uygulama sonrası toplanan veriler betimsel bir analize tabi tutulmuştur.

Örnekleme

Bu çalışma, kapsamında farklı sosyoekonomik düzeylerden öğrencilerin verilerinin yer alması amaçlandığı için, Ankara ilinde Yenimahalle ve Çankaya merkez ilçelerine bağlı iki ortaokulun birer 7. sınıf şubesindeki öğrenciler ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı okul yönetimi ve matematik öğretmenin izin verdiği oranda derse girip uygulamayı gerçekleştirebileceği için, okul seçiminde öncelikli olarak bu iki unsurun elverişliliği dikkate alınmıştır. Bu bağlamda rastlantısal değil amaçsal bir örneklem oluşturulmuştur. Çankaya ilçesinde yer alan A şubesinde 15'i kız, 13'i erkek ve Yenimahalle ilçesinde yer alan B şubesinde ise 10'u kız, 13'ü erkek olmak üzere toplam 51 öğrenci ile uygulamaya başlanmıştır. Araştırma kapsamında gerçekleştirilen İspat Testi'ne girmeyen 3 öğrencinin varlığı nedeniyle örneklem daha sonra 48 kişi ile sınırlanmıştır.

Veri Toplama Araçlarının Geliştirilmesi

7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik beceri ve performanslarının irdelendiği bu araştırmada veri toplama aracı olarak Hazır Bulunuşluk Testi, İspat Testi ile görüşme formu kullanılmıştır. Veri toplama araçları araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

Öğrencilerin ispata yönelik becerilerinin geliştirilmesi amacıyla uygulanan ispat öğretiminin öncesinde, öğrenciler ispat kavramıyla matematik dersi bünyesinde hiç karşılaşmamışlardır. Hazır Bulunuşluk Testi ile öğrencilerin ispata yönelik ilk becerilerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Hazır Bulunuşluk Testinde 3 soru bulunmaktadır; 1. ve 3. sorularında öğrencilerden verilen önermelerin doğruluğunu ispatlamaları, 2. soruda ise önermenin yanlış olduğunu göstermeleri beklenmektedir.

İspat Testi ise ispat öğretiminin ardından uygulanmak amacıyla geliştirilmiştir. Bu soru formunda dört grup soru bulunmaktadır ve bu gruplar araştırmada ele alınan ispat yöntemlerinden birisiyle

ilişkilendirilmiştir. Her grupta iki matematiksel önermeye yer verilmiş. Öğrencilerden dört grubun her birinden bir önerme seçmeleri ve soruda belirtilen ispat yöntemi ile seçtikleri önermeyi ispatlamaları beklenmektedir. Böylelikle öğrenciler toplamda dört ayrı ispat yöntemi içeren, dört önermenin ispatını yapacaklardır.

Görüşme formu ise sınavlarda yer alan sorular temel alınarak hazırlanmıştır. Öğrencilerin verdikleri yanıtları gerekçelendirmelerini, ispatı yaparken zorlandıkları noktaları ifade etmelerini sağlayacak sorulardan kurgulanmıştır.

Hazırlanan tüm veri toplama araçlarına son şekli 8 öğretim elemanı ve 2 ortaokul matematik öğretmeninden oluşan uzman görüşüne başvurularak verilmiştir. Sınavların güvenilirliğini test etmek üzere pilot uygulama yapılamamıştır.

Veri Analizi

Sınavlarda elde edilen veriler, öğrencilerin her bir soruya verdikleri yanıtlar üzerinden kodlanmıştır. Kodlama işleminde, öğrencilerin verdikleri yanıtlar ile önermenin ispatında kullanılan ispat yöntemi doğrultusunda bir kodlama sistemi araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Be nedenle her bir ispat yöntemi için ayrı birer kod sistematığı oluşturulmuştur. Kodların kapsam geçerliğinin sağlanması için üç kişiden oluşan uzman görüşüne başvurulmuş, onların değerlendirmeleri ile her bir ispat yöntemi için ayrı olarak geliştirilen kod sistemine son şekli verilmiştir. Veri analizinde kullanılan kodlar Bulgular bölümünde detaylı olarak açıklanmıştır.

Veri Toplama Süreci

7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik beceri ve performanslarının irdelendiği bu çalışmada ilk olarak ispat öğretimine yönelik 14 saatlik ders planı hazırlanmıştır. Ders planı 2 kişiden oluşan uzman görüşüne sunulmuş ve Ankara ilinde, Mamak ve Çankaya ilçelerinde yer alan iki ortaokulda yapılan pilot uygulama ile sınanmıştır. Pilot uygulamada 36 öğrenci yer almıştır. Pilot uygulama değerlendirilerek ders planına son şekli verilmiştir.

Uygulama sürecinde, ilk olarak her iki şubeye 3 sorudan oluşan Hazır Bulunuşluk Testi uygulanmıştır. Bu testin ardından, haftada 1 saat olmak üzere (12. hafta 2 saat ders yapılmıştır), toplamda 13 hafta süren ispat öğretimi uygulamasına geçilmiştir. Bu süreçte, sayılar, ardışıklık, teklik çiftlik ve bölünebilme konuları üzerinde durulmuş ve bu konularla ilgili ispat örneklerine derslerde yer verilmiştir. 13 hafta boyunca sınıfta ele alınan örnekler üzerinden doğrulama ile ispat arasındaki fark tartışılmış, doğrudan

ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemleri, ispatlar üzerinden öğretilmeye çalışılmıştır. 13 hafta süren uygulamanın ardından, öğrencilere ispata yönelik becerilerini betimlemeyi amaçlayan İspat Testi uygulanmıştır.

Her iki testte elde edilen veriler, öğrencilerin her bir soruya verdikleri yanıtlar üzerinden kodlanmıştır. Kodlamanın güvenilirliği için tüm sınav kâğıtlarının %20'si birisi araştırmacı, diğerleri ortaokul matematik öğretmeni ve ispat alanında çalışması bulunan bir akademisyen tarafından ayrı ayrı okunmuştur. Yanıtlara verdikleri kodlar birbirleri ile karşılaştırılmış ve verilen farklı kodlar üzerinde tartışma yürütülerek bu kodlarda fikir birliğine ulaşılmıştır. Gerçekleştirilen kodlama ilk etapta %93,75 oranında tutarlılık göstermişken, tartışmanın ardından yapılan kodlamalarda %100 güvenilirlik elde edilmiştir. Gerçekleştirilen kodlamanın yüzde ve frekans dağılımı hesaplanmıştır.

Uygulanan testlerin ardından, her iki sınıftan da öğrencilerin verdikleri doğru / yanlış tüm yanıtların çeşitliliğini içerecek şekilde 16 öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilerle yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde öğrencilerden her bir soruya verdiği cevabı anlatması ve gerekçelendirmesi istenmiş, verdiği yanıt ile genellemeye ulaşip ulaşmadığı sorgulatılarak ispata yönelik algı ve becerileri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin onayı ile ses kaydına alınan bu görüşmeler daha sonra çözümlenmiştir ve raporlaştırma sırasında öğrencilerin isimleri değiştirilerek aktarılmıştır.

BULGULAR VE YORUM

7. sınıf öğrencilerinin ispata beceri ve performanslarının irdelendiği bu araştırmada elde edilen veriler uygulanan sınavlar bazında incelenerek sunulmuştur. Yarı yapılandırılmış derinlemesine görüşmeler ile ulaşılan veriler, sınavlar temel alınarak gerçekleştirilen analizi desteklemek ve ileriye taşımak için kullanılmıştır.

Hazır Bulunuşluk Testine İlişkin Bulgular

Hazır Bulunuşluk Testine 51 öğrenci katılmıştır. Üç sorudan oluşan Hazır Bulunuşluk Testinin 1. ve 3. sorularında öğrencilerden verilen önermelerin doğruluğunu ispatlamaları beklenmektedir. Bu sorularının analizinde aşağıdaki kodlama sistemi kullanılmıştır:

Kod1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Hazır Bulunuşluk Testinin 2. sorusu olan ‘Ardışık iki sayının toplamı çift sayıdır.’ önermesinin ispatında ise öğrencilerden verilen önermenin yanlış olduğunu göstermeleri istenmiştir. Bu soruların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfade karşı örnek vererek ispatlanmış.

Bu soruda tüm öğrencilerin %53’ü önermeyi karşı bir örnek vererek ispatlarken (Kod 2), %47’sinin cevabı Kod 1 olarak kategorize edilmiştir. B şubesindeki öğrencilerin önemli bir kısmı (%60,9) soruyu boş bırakırken, önermeyi karşı örnek vererek ispatlayanların oranı %39,1 olarak bulunmuştur. A şubesinde ise karşı örnek vererek ispatlayanların oranı %64,3’tür. Bu soruya ilişkin cevapların kodlamalara göre sayısı, yüzdesi ve şubelere göre dağılımı Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Hazır Bulunuşluk Testi 2. soruya ilişkin bulgular

Çözümüne ilişkin kodlar	A Şubesi (n = 28)		B Şubesi (n = 23)		Toplam (n=51)	
	f	%	f	%	f	%
Kod 1	10	35,7	14	60,9	24	47
Kod 2	18	64,3	9	39,1	27	53

Hazır Bulunuşluk Testinde yer alan bu 3 soru, öğrencilerin ispata yönelik bilgilerinin azlığını ortaya koymaktadır. Öğrenciler bu aşamada sembolik dili kullanamamakta, önermeleri örnek vererek ispatladıklarını zannetmekte veya boş bırakma, yanıtlarını gerekçelendirememeye eğilimindedirler. Öğrenciler, doğru bir önermenin ispatını yapamamışlardır. Fakat yanlış olan bir önerme kendilerine sunulduğunda, öğrenciler önermenin yanlış olduğunu algılayıp, ispat yöntemine dair bir bilgileri olmasa da, karşı örnek vererek ispat yapabilmişlerdir.

İspat Testine İlişkin Bulgular

İspat Testinde yer alan önermeler her bir grupta yer alan ispat yöntemi bazında, dört yöntem halinde analiz edilmiştir. İspat Testi'ne 48 öğrenci girmiştir. Hazır Bulunuşluk Testine giren 3 öğrenci bu sınava okulda olmadıkları için teste girememişlerdir.

Öğrencilerin Doğrudan İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

İspat Testi, 1. Grup'ta yer alan önermeler:

1. Çift bir sayı tutun, daha sonra bu sayıya yarısını ekleyin.
Bulduğunuz sayı her zaman 3'e bölünen bir sayıdır.
2. ab , ba , aa ve bb iki basamaklı sayılar olsun.
Bu durumda $ab + ba = aa + bb$ dir.

Öğrencilerden bu önermelerden birisini seçerek, doğrudan ispat yöntemi ile ispatlamaları istenmiştir. Doğrudan ispat yöntemine ilişkin soruların analizinde aşağıdaki kodlama sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: Örnek vererek önerme doğrulanmış. Bu kod kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır; tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar ve birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar.

Kod 3: İspat fikri var ama ispat eksik.

Kod 4: Doğrudan ispat yapılmış.

Doğrudan ispat yöntemindeki cevapların %20,8'i Kod 1'de yer almaktadır ve bu kategoride cevap veren öğrencilerin hepsi B şubesi öğrencileridir. Kod 2 türü cevaplar, tüm cevapların %50'sini oluşturmakta olup, tek örnekli cevaplar %18,8 iken, çok örnekli cevaplar %31,2 düzeyindedir. İspat fikrine sahip ama ispatında eksikler olan (Kod 3) öğrenciler %6,2 iken, ispat yapan öğrencilerin (Kod 4) oranı %23'tür. A şubesinde öğrencilerin %33,3'ü Kod 3 ve Kod 4 grubunda yer alırken B şubesinde Kod 3 grubunda hiç öğrenci bulunmadığı ve Kod 4 grubundaki öğrencilerin ise B şubesindeki öğrencilerin %23,8'ini oluşturduğu gözlemlenmiştir. Bu soru için verilen cevapların kodlamalara göre sayısı, yüzdesi ve şubelere göre dağılımı Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. Doğrudan İspat Yöntemini İçeren Soruya İlişkin Bulgular

		İspat Testi, 1. Grup					
		A		B		Toplam	
		Şubesi (n = 27)		Şubesi (n = 21)		(n=48)	
		f	%	f	%	f	%
Kod 1		-	-	10	47,6	10	20,8
Kod 2	Tek örnek	7	25,9	2	9,5	9	18,8
	Çok örnek	11	40,7	4	19	15	31,2
Kod 3		3	11,1	-	-	3	6,2
Kod 4		6	22,2	5	23,8	11	23

1. Grup'ta yer alan önermelerden birisini seçerek ispatlayan öğrencilerin tamamının sembolik dili kullandığı gözlenmiştir. Örneğin B şubesinden İlayda'nın seçmiş olduğu 1. önermeyi nasıl ispat ettiği Şekil 1'de verilmiştir.

doğruluğunu ispatladım.

a. Seçtiğiniz ifadeyi **doğrudan ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

Gift sayı = $2k$ $2k + \left(\frac{2k}{2}\right) = 3$ $\frac{2k}{2} = k$

$2k + k = 3k$

$3k = 3 = k$

Şekil 1. B şubesinden İlayda - Kod 4

A şubesinden Selda ise aynı önermeye Kod 3 türü bir cevap vermiştir. Selda sembolik dil kullanarak önermeyi ispatlamaya çalışmış, fakat yaptığı işlem hatası nedeniyle ispatı tamamlayamamıştır. Selda'nın cevabı Şekil 2'de verilmiştir.

a. Seçtiğiniz ifadeyi **doğrudan ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

$\frac{2x}{1} + \frac{2x}{2} = \frac{4x}{2}$

$\frac{4x}{2} = 3$

Şekil 2. A şubesinden Selda - Kod 3

İspat yapan öğrencilerin bir kısmında gözlenen ortak bir eğilim gerçekleştirdikleri ispata ek olarak, verilen önermeyi örnekle de doğrulamalarıdır. B şubesinden Derya seçtiği 1. önermeyi önce örnek vererek doğrulamış, ardından sembolik dil kullanarak ispata tamamlamıştır (Şekil 3). Örnek vermesinin nedenini ise: "Öncelikle örnek verme ihtiyacı duyuyorum. Önce onu kendi kafamda canlandırabilmek istiyorum. Onu yaptıktan sonra doğru ya da yanlış olduğuna karar veriyorum ve ondan sonra ispatlama yoluna geçiyorum." şeklinde ifade etmiştir.



Şekil 3. B Şubesinden Derya - Kod 4

Soruda doğrudan ispat yönteminin kullanılması istenmiş olsa da Derya yöntemin isminden önermenin doğru olduğunu çıkarsayamamıştır. Örnek deneyerek önermenin doğru ya da yanlış olduğunu sınavan Derya, sayılara sembollere göre daha çok güvenmiş ve bu denemesinin ardından ispata geçmiştir.

Tüm öğrenciler dikkate alındığında öğrencilerin %50'sinin önermeyi örnek vererek doğrulama eğiliminde olduğu gözlenmiştir. İspat becerisini geliştirmeye yönelik 13 haftalık uygulamanın ardından, öğrencilerin ispata yönelik becerilerinde bir gelişim gözlenmiş olsa da, öğrencilerin halen örnek sayılar deneyerek önermeyi sınav eğiliminde oldukları tespit edilmiştir. Gerçekleştirilen görüşmelerde öğrencilerin bu eğilimleri sorgulanmıştır. Örnek vererek doğrulama eğilimindeki öğrencilerle yapılan görüşmelerde bu öğrencilerin önemli bir kısmının sembolik gösterimleri anlama ve uygulamada sorun yaşadıkları fark edilmiştir. Öğrencilerle tercihleri üzerine de konuşulmuş, gerçekleştirdikleri doğrulamanın genellenebilir bir yargı sunup sunmadığı sorgulanmıştır. 16 öğrenci ile İspat Testinde yapamadıkları ispatlar üzerinden bu yönde bir tartışma yürütülmüş ve sadece 2 öğrenci örnekle doğrulamanın genellenebilir bir yargı sunduğu ve ispat olduğu düşüncesinde ısrarcı olmuştur.

İspat Testi 1. Grup'ta yer alan önermelere öğrencilerin geliştirdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin önemli bir bölümünün örnek vererek doğrulama eğiliminde olduğu gözlenmektedir. Bu öğrenciler sembolik dili anlama ve uygulamada sorun yaşamaktadırlar. Bu eğilime karşın, öğrencilerin %23'ü verilen önermeleri eksiksiz olarak ispatlayabilmektedir. Bu

oran çeşitli hatalar nedeniyle ispatı tamamlayamayan ama ispata yönelik fikri olan öğrencileri de hesaba kattığımızda %29,5'i bulmaktadır. Gerçekleştirilen görüşmelerde ise sınav esnasında ispatı yapamayan öğrencilerin bazen kolaylıkla, bazen de araştırmacının yönlendirmeleri ile ispatı tamamlayabildiği gözlenmiştir.

Öğrencilerin Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

İspat Testi, 2. Grup'ta yer alan önermeler:

1. Tüm n tamsayıları için, $n^3 \geq n^2$ dir.
2. Ardışık iki sayının toplamı 4'e bölündüğünde her zaman 3 kalanını verir.

Öğrencilerden bu önermelerden birisini seçerek, karşı örnek vererek ispat yöntemi ile ispatlamaları istenmiştir. Karşı örnek vererek ispat yöntemine ilişkin soruların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfadenin doğru olduğu düşünülerek çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: Karşı örnek vererek ispat yapılmış.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin %58,3'ünün Kod 3 türü cevap verdiği görülmektedir. Bu yüzdeyi %25 ile Kod 1 ve %16,7 ile Kod 2 takip etmektedir. A ve B şubesinde Kod 3 türü cevap oranları sırası ile %66,6 ve %47,6 olarak gözlemlenmiş olup, karşı örnek verilerek yapılan ispatlarda öğrencilerin doğrudan ispat yapmaya nazaran daha başarılı oldukları bulunmuştur. Bu tür ispat için verilen cevapların kodlara ve şubelere göre dağılımı Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. Karşı Örnek Vererek İspat Yöntemini İçeren Soruya İlişkin Bulgular

	İspat Testi, 2. Grup					
	A Şubesi (n = 27)		B Şubesi (n = 21)		Toplam (n = 48)	
	f	%	f	%	f	%
Kod 1	5	18,5	7	33,3	12	25
Kod 2	4	14,8	4	19	8	16,7
Kod 3	18	66,6	10	47,6	28	58,3

Karşı örnek vererek yapılan ispatlarda bazı öğrencilerin seçtikleri önermeyi önce sembolik olarak ifade ettikleri, önermede yer alan ifadeyi bu şekilde gösterdikten sonra örnek vererek önermeyi çürüttükleri de gözlenmiştir.

Soruda önermeyi karşı örnek vererek ispatlamaları istendiği halde, oranları düşük de olsa (%16,7) bazı öğrenciler, denedikleri örnek üzerinden önermenin doğruluğunu savunmuşlardır. Örneğin B şubesinden Tuna seçtiği 1. önermenin ispatında denediği tek bir örneğin genellenebilir bir yargı sunduğunu düşünerek soruyu Şekil 4'teki gibi yanıtlamıştır.

b. İspatı yaparken karşı örnek vererek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

$$n^3 \geq n^2 \text{ başıntı doğrudur.}$$

$$n=3 \text{ için}$$

$$n^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$n^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$27 \geq 9$$

Şekil 4. B Şubesinden Tuna, Kod2

Sınavda tek bir örnek deneyerek önermeyi doğrulayan Tuna, görüşme sırasında, ilk önce verdiği yanıtın doğru olduğunu savunduğu için, başka bir örnek denemesi doğrultusunda yönlendirilmiştir. Bu yönlendirme ile soruda ifade edilen ispat yöntemi kendisine aşağıdaki şekilde sorgulatılmıştır:

Araştırmacı: Şimdi başka bir sayı daha denesen, mesela -1. -1'in üçüncü kuvvetini alsan, nasıl yaparsın?

Tuna: Üç tane -1 çarparım. -1 olur.

Araştırmacı: -1'in ikinci kuvvetini alsan bir de, ne olur?

Tuna: 1 olur.

Araştırmacı: Peki, bu yaptığına göre ifade doğru mu?

Tuna: Yok, yanlış.

Araştırmacı: Sen sınavda 3'ü denemişsin ifade doğru çıkmış, şimdi -1'i denedin yanlış çıktı. Bu durumda ifade doğru mu yanlış mı sence?

Tuna: Yanlış, bu son örnek her zaman doğru olmadığını gösterdi.

Genel olarak sınav esnasında soruda verilen ispat yöntemlerine yönelik bir farkındalık ortaya koyamayan Tuna, görüşme sırasında daha başarılı bir performans ortaya koymuş, küçük yönlendirmelerle doğru sonuca ulaşabilmiştir.

Karşı örnek vererek ispat yönteminin kullanıldığı soruda hazır bulunuşluk sınavına benzer bir şekilde, öğrencilerin ispatı yapma oranları yüksektir. Buna karşın, bazı öğrenciler soruda kullanılacak ispat yönteminin verilmesine rağmen, karşı örnek vermek yerine denedikleri bir örneğin ifadeyi doğrulaması ile önermenin doğru olduğunu savunmuşlardır. Bu öğrencilerin hala ispat kavramını tam olarak anlamadıkları, tek bir örnek denemek ile ispat arasındaki farkı kavrayamadıkları söylenebilir.

Öğrencilerin Tüketerek İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

İspat Testi, 3. Grup'ta yer alan önermeler:

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $A = \{1,2,3,4,5\}$ ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman asal sayıdır. 2. Bir sayının karesinin birler basamağındaki rakam, her zaman $\{0,1,4,5,6,9\}$ kümesinin bir elemanıdır. |
|--|

Öğrencilerden bu önermelerden birisini seçerek, tüketerek ispat yöntemi ile ispatlamaları istenmiştir. Tüketerek ispat yöntemine ilişkin soruların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: Sadece birkaç sayı denenmiş, kümedeki tüm elemanlar denenip tüketilmemiş, örnekle doğrulama yapılmış.

Kod 3: Tüketerek ispat yöntemi uygulanmış ama önermenin hatalı geçirilmesi veya işlem hatası gibi nedenlerle yanlış sonuca ulaşılmış.

Kod 4: Tüketerek ispat yapılmış.

Bu soruda tüm öğrencilerin ancak %20,8'i ispatı eksiksiz olarak (Kod 4) tamamlarken öğrencilerin önemli bir bölümü (%41,7'si) Kod 2'de yer almışlardır. Kod 1 türü cevap verenler %29,2 iken, tüketerek ispat yöntemini doğru uygulamaya yakın olan (Kod 3) öğrencilerin oranı ise %8,3'dür. Kod 3 ve üzeri cevaplar verdiği için tüketerek ispat yöntemini anladığını düşündüğümüz öğrenciler %29,1 oranındadır. Bu tür ispat için verilen cevapların kodlara ve şubelere göre dağılımı Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Tüketererek İspat Yöntemini İçeren Soruya İlişkin Bulgular

	İspat Testi, 3. Grup					
	A Şubesi (n = 27)		B Şubesi (n = 21)		Toplam (n = 48)	
	f	%	f	%	f	%
Kod 1	4	13,8	10	47,5	14	29,2
Kod 2	13	48,1	7	33,3	20	41,7
Kod 3	4	14,8	-	-	4	8,3
Kod 4	6	22,2	4	19	10	20,8

A şubesinden Berk, 2. önermeyi seçerek ispatlayan tek öğrenci olmuştur. Görüşme sırasında gerçekleştirdiği ispatı anlatması istenmiş, bu anlatım sırasında her hangi bir sayının karesinin birler basamağını, o sayının birler basamağının karesinin belirleyeceğini belirtmiştir. Berk'in birler basamağını oluşturan rakamların karelerini tek tek inceleyerek gerçekleştirdiği tüketerek ispat Şekil 5'de verilmiştir.

a. Seçtiğiniz ifadeyi **tüketererek ispat yöntemini** kullanarak ispatlayınız.

b. İspatı yaparken tüketerek ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız,

Şekil 5. A Şubesinden Berk, Kod 4

Öğrencilerin önemli bir bölümü (%41,7'si) önermeyi küme içerisinde 1 ya da 2 örnek deneyerek (Kod 2) doğrulama eğilimi göstermişlerdir. Görüşmede bu öğrencilerle verdikleri yanıt üzerine konuşulmuş, yönteme yönelik bir farkındalık görüşme sırasında geliştirilmeye çalışılmıştır. Kod 2'de yer alan bazı öğrenciler kolaylıkla yönteme ilişkin doğru yanıtlar üretebilmiş ve ispatı tamamlayabilmişlerdir. Testte niçin bu performansı göstermedikleri sorgulandığında sınav anında çok ayrıntılı düşünmedikleri gerekçesini sunmuşlardır.

Öğrencilerin Durum Yolu ile İspat Yöntemine İlişkin Beceri ve Performansları

İspat Testi, 4. Grup'ta yer alan önermeler:

1. Tüm n tamsayıları için, $6n+2$ sayısının 4'e bölümünden kalan her zaman ya 0'dır ya da 2'dir.
2. a ve b tam sayı olsun. Bu durumda $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$ dir.

Öğrencilerden bu önermelerden birisini seçerek, durum yolu ile ispat yöntemini kullanarak ispat yapmaları istenmiştir. Durum yolu ile ispat yöntemine ilişkin soruların analizinde aşağıdaki kod sistemi kullanılmıştır:

Kod 1: Soru boş bırakılmış, gerekçe sunulmamış veya soru ile alakasız işlemler yapılmış.

Kod 2: İfade'nin yanlış olduğu çeşitli şekillerde savunulmuş.

Kod 3: İfade örnek vererek doğrulanmış.

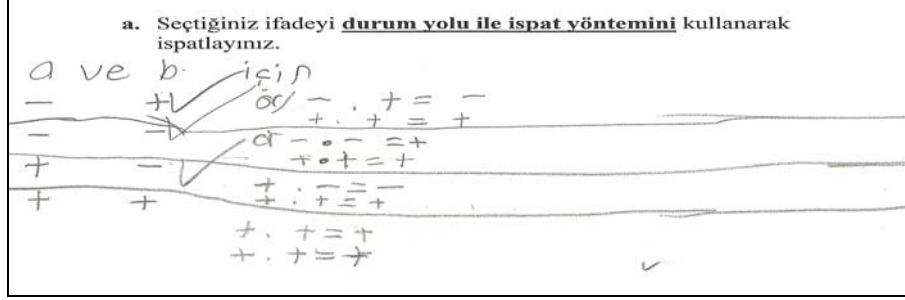
Kod 4: Durum yolu ile ispat yapılmış.

Durum yolu ile ispat yönteminde, öğrencilerin %50'sinin cevabı Kod 1 olarak kategorize edilmiştir. Öğrencilerin cevaplarının %14,6'sı Kod 2'de yer almış, bu öğrenciler önerme doğru olduğu halde çeşitli hatalar nedeniyle (bölüm ve kalan kavramlarını karıştırmaları gibi) önermenin yanlış olduğunu savunmuşlardır. Sadece tek bir öğrencinin cevabı Kod 4'te yer alırken, öğrencilerin %33,3'ü önermeyi örnek deneyerek doğrulamaya çalışmış ve cevapları Kod 3'te yer almıştır. Durum yolu ile ispat yöntemi için verilen cevapların kodlara ve şubelere göre dağılımı Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. Durum Yolu ile İspat Yöntemini İçeren Soruya İlişkin Bulgular

		İspat Testi, 4. Grup					
		A Şubesi (n = 27)		B Şubesi (n = 21)		Toplam (n=48)	
		f	%	f	%	f	%
Kod 1		13	48,1	11	52,3	24	50
Kod 2		3	11,1	4	19	7	14,6
Kod3	Tek örnek	2	7,4	3	14,3	5	10,4
	Çok örnek	8	29,6	3	14,3	11	22,9
Kod 4		1	3,7	--	--	1	2,1

Her iki şubeden sadece bir öğrenci, A şubesinden Berk, matematiksel dil kullanımında eksiklikler olsa da durum yolu ile ispat yöntemini kullanarak seçtiği önermeyi (2. önerme) ispatlamıştır. İspatı Şekil 6'da yer almaktadır.



Şekil 6. A Şubesinden Berk, Kod 4

Berk gerçekleştirdiği ispatı şu şekilde anlatmıştır:

Berk: Burada a ve b tam sayı olsun demiş. Tam sayı olduğu için eksi de artı da olabilirler. Bu durumda eksi ile artıyı çarptığımızda sıfırdan küçük veya eşitliğine bakıcaz. Ya işte zaten kafadan düşündüğümüz zaman mutlak değerde iki artı işaretinin çarpımı olacak, burada ise [eşitsizliğin ilk kısmını kastetmekte] ya eksi eksi ya da artı artı olduğunda eşit olabilir. Diğer durumlarda küçük olacağı kesin. Ben de burada bunu gösterdim, eksi artı verdim tüm durumları yazdım.

Test esnasında sadece bir öğrenci ispatı yapabilmiş olsa da görüşme sırasında 9 öğrenci, araştırmacının çeşitli yönlendirmeleriyle bu grupta yer alan önermeleri ispatlayabilmişlerdir. Öğrencilerin bu yöntemi kullanırken zorlandıkları nokta önermeyi hangi durumlarda inceleyeceklerini bulamamak olmuştur.

Örneğin 1. önermeyi seçerek, bu önermeyi 2, 3, 20 ve 33 sayılarını deneyerek doğrulayan, bu nedenle de yanıtı Kod 3'de yer alan Beyza ile denediği örnekler üzerine konuşulmuştur. Bu esnada kendisine durum yolu ile ispat mantığı kazandırılmaya çalışılmıştır. Aşağıda gerçekleşen diyalogun ardından Beyza ispatı tamamlayabilmiştir.

Araştırmacı: Örnek vermişsin, örneklerine baktığımda 2, 3, 20 ve 33. Niye bu sayıları denedin?

Beyza: Bir bakabilir miyim? [yaptıklarına bakar ve bir miktar düşünür] Sanırım öylesine aklıma gelmiş.

Araştırmacı: Benim dikkatimi ise şu çekti, iki tek iki tane de çift sayı denemişsin.

Beyza: Ya aslında, tüm n tamsayılarında demiş ya, ben de büyüklü küçüklü tek ve çift sayıları deneyeyim demiştim.

Araştırmacı: Bu dört örneğe bakıp genelleme yapabilir miyiz?

Beyza: Yok yapamayız.

Araştırmacı: Peki, bu sayıları denediğinde, tekleri denediğinde ve çiftleri denediğinde ne çıkmış kalan olarak? Bir yorum yapıyor musun?

[Beyza kağıdını incelemekte]

Beyza: Şey galiba, tekleri bölünce kalansız çıkmış, çiftleri bölünce kalanlı çıkmış.

Araştırmacı: Kalansız çıkmak ne demek?

Beyza: Kalan 0 yani, teklerde kalan 0 çıkmış.

Araştırmacı: Çiftlerde kalan kaç?

Beyza: 2 bulmuşum. Teklerde 0, çiftlerde 2 gibi.

Araştırmacı: Acaba durum dediğimiz şeyler bunlar olabilir mi sence? Sayının durumları, çift olma durumu ve tek olma durumu...

Beyza: Haa... Evet, olabilir aslında.

Buna ek olarak öğrencilerin bir kısmı örnek vererek doğrulama yolunu kullanırken yaptıkları işlem hataları veya A şubesinden Mehmet'te görüldüğü üzere, kalan ve bölüm kavramlarını karıştırmaları nedeni ile önermenin yanlış olduğunu savunmuşlardır. Seçtiği 1. önermenin ispatı için Mehmet'in verdiği yanıt Şekil 7'de yer almaktadır.

b. İspatı yaparken durum yolu ile ispat yöntemini kullanmakta zorlanıyorsanız, seçtiğiniz ifadeyi kendinizce nasıl ispatlarsınız?

İlk önce Tamsayıları için $(6n+2)$ vermiş ve 4 bölümünden sonra 0 veya da 2 dir.

Çözüm: $(6n+2)$

8	4	
-8	2	
0		

Burada 4'de bölündüğünde cevap 2 çıktı.

Şekil 7. A Şubesinden Mehmet, Kod 2

Öğrencilerin en başarısız olduğu yöntem durum yolu ile ispat yöntemi olmuştur. İspatı gerçekleştirirken önermeyi hangi durumlarda inceleyeceklerini belirlemede zorlanan bu öğrenciler yöntemin gerektirdiği

analizi yapmakta da zorlanmışlardır. Öğrenciler ispat yaparken yoğunluklu olarak örnekle doğrulama eğiliminde olmuşlardır. Bu öğrenciler için önermenin yanlışlığını örnek vererek ortaya koymak zor olmamıştır. Belki de bu nedenle öğrencilerin en başarılı olduğu yöntem karşı örnek vererek ispat yöntemi olmuştur. Tüketerек ispat yöntemi ile ilişkin elde edilen bulgular ise şaşırtıcı bir sonuç ortaya koymuştur. Kendilerine verilen sonlu kümedeki elemanları tek tek deneyerek ispatı kolaylıkla yapabilecekleri düşünülen öğrenciler, bu yöntemle ilgili soruda doğrudan ispat yöntemi ile ilgili soruya paralel bir sonuç ortaya koymuşlardır. Her iki yöntemde de öğrencilerin ispat yöntemlerini uygulama düzeyleri (Kod 3 + Kod 4) %29 civarında olmuştur. A ve B şubelerindeki öğrenciler doğrudan ispat ile tüketerek ispat yöntemi ile ilgili soruları birbirlerine yakın bir düzeyde ispatlamışlardır. Buna karşın A şubesindeki öğrenciler, karşı örnek vererek ispat yönteminde B şubesindeki öğrencilere göre daha başarılı olmuşlardır. Ayrıca tüm sorularda B şubesindeki öğrencilerin A şubesindeki öğrencilere göre daha yoğun olarak Kod 1'de yer aldığı gözlenmiştir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

İspat öğretimine yönelik gerçekleştirilen uygulamanın öncesinde öğrencilerin ispat performanslarına bakıldığında, doğru bir önermenin ispatı sorulduğunda öğrenciler soruyu ya boş bırakmış, ya da önermeyi örnek vererek doğruladıklarını düşünmüşlerdir. Bu sonuç literatürde yer alan pek çok çalışma (Cooper vd., 2011; Çalışkan, 2012; Healy & Hoyles, 2000; Knuth vd., 2012) ile uyumludur. İspat becerisini geliştirmek amacıyla düzenlenen öğretim sürecinin ardından öğrencilerin doğru bir önermenin ispatında örnek vererek doğrulama eğilimleri azalmış ama yine de devam etmiştir. Bu öğrencilerin cebiri anlama ve uygulamada sorun yaşadığı gözlenmiştir. Sembolik dil kullanımı dışında başka tümdengelimsel muhakeme içeren temsilleri de geliştirememişlerdir.

Araştırmada elde edilen tüm bulgular öğrencilerin sembolik dil kullanımında sorun yaşadığını ortaya koymaktadır ve bu ispata yönelik performanslarını olumsuz etkileyen faktörlerden birisidir. Arslan (2007) 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir kullanarak genellemeye ulaşma eğiliminin düşük olduğunu ortaya koyarken, Zaimoğlu (2012) da 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel ispatı tercih etmediğini belirtmiştir. Tüm bu çalışmalar cebir öğrenme alanına yeni giriş yapan bu yaş öğrencilerin cebirsel ispat ile ilgili yaşadıkları sorunu ortaya koymaktadır. Bu araştırmada da öğrenciler henüz sembolik gösterimi sindirmemiş oldukları ve hala sayıları cebirsel gösterimlere tercih ettikleri için sembolik dil kullanımından kaçınmışlardır. 7. sınıf öğrencileri somut düşünceden soyut düşünceye geçiş

aşamasındadırlar. Sembolik gösterimleri 6. sınıf öğrencilerine göre daha yoğun kullanmalarına rağmen, öğrencilerin önemli bir kısmının cebirsel ifadeleri kullanma ve anlamada zorlandıkları görülmüştür. Cebir alanına yönelik yaşadıkları bu zorluk onların ispat becerilerinin gelişimini de etkilemiştir.

Öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerde onların örnek vererek doğrulamayı ispat olarak kabul etme eğilimleri de sorgulanmıştır. Onlarla ispatın ne olduğu, kullanılan örnekler ile genellemeye ulaşıp ulaşılmayacağına yönelik tartışmalar da yürütülmüştür. Gerçekleştirilen bu tartışmalarda öğrenciler gerektiğinde yönlendirilerek doğru bir ispata ulaştırılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin önemli bir bölümünün araştırmacının yönlendirmesi ile ispatı tamamlayabildiği görülmüştür. Vygotsky (1978), bireyin kendi başına problem çözmesiyle belirlenen gerçek gelişim düzeyi ile yetişkin veya kendisinden daha başarılı olan bir akranının desteğiyle problem çözdüğünde belirlenen gelişim düzeyi arasında fark olduğunu vurgulamıştır. Çocuğun mevcut düzeyinin hemen üstündeki bu gelişim düzeyini yakınsal gelişim düzeyi (ZPD - Zone of Proximal Development) olarak adlandırmıştır. Tudge (1990) burada yetişkin desteğini, bilgisi ve rehberliği sayesinde çocuğun öğrenme potansiyelini artıran bir bileşen olarak tanımlamıştır. Gerçekleştirilen görüşmelerde araştırmacının rolü bu işlevi görmüş, öğrencilerin ders uygulaması ve sınavlar sonrasında ulaştıkları gelişim düzeyini daha da ileri götürmüştür. Bu durum, öğrencilerin ispata yönelik algı ve performanslarının, sınıfta gerçekleştirilen uygulama sonrası ulaştıkları düzey ile sınırlı olmadığını, daha da geliştirilebileceğini ortaya koymaktadır.

Bu araştırmada öğrencilerle formal ispat uygulamaları yapılmış ve gerçekleştirilen tüm uygulamaların ardından öğrencilerin ispatı algılayıp uygulayabilecekleri gözlenmiştir. Ele alınan ispat yöntemlerinden durum yolu ile ispat yönteminde diğer yöntemlere göre daha çok zorlanmış olsalar da, öğrenciler doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemlerini yapabilmişlerdir.

Bu araştırmada cebir ve ispat ilişkisine odaklanılmamakla birlikte, araştırmada elde edilen bulgular öğrencilerin cebir alanındaki yetersizliklerinin ispat becerilerinin gelişimini de etkilediğini ortaya koymuştur. Bu bağlamda, bu ilişki daha derinlemesine araştırılabilir, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir konu alanına ilişkin yeterlikleri ile ispat becerileri arasındaki ilişkinin karşılaştırılması yeni araştırmaların konusu olabilir.

Ayrıca 7. sınıf öğrencilerinde ispat yapmaları istendiğinde örnekle doğrulama eğiliminin baskın olduğu gözlenmiştir. Mevcut öğretim programında öğrencilerin örnekler üzerinden yaptıkları gözlemler sonucu

genel bir yargı geliştirmeleri istenmektedir. Bu tür yaklaşımlar öğrenciyi konuya ısındırırken, öğrencide ispat kavramının gelişimini olumsuz etkileyebilmektedir. Öğrencilerden istenen genellemelerin onların ispat becerisini geliştirmek üzerinden kurgulanması önemlidir. Ders kitaplarının ve programın bu bağlamda yeniden değerlendirilmesi önerilir.

KAYNAKLAR

- Aktaş, Y. (2002). *Okul Öncesi Dönemde Matematik Eğitimi*. Adana: Nobel Tıp Kitap Evi.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, *Ege Eğitim Dergisi*, 6 (1), 25-37.
- Arslan, Ç. (2007). “İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi”, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof, In Ed. Tatsien, L. I., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 907-920), Vol. III, Beijing : Higher Education Press.
- Calhoun, E. F. (2002). Action Research for School Improvement, *Educational Leadership*, 59 (6), 18-24.
- Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B. & Knuth, E. J. (2011). Adolescent Reasoning in Mathematics: Exploring Middle School Students’ Strategic Approaches in Empirical Justifications, *In Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA.
- Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, University of Rzeszów, Poland.
- Çalışkan, Ç. (2012). “8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarılarıyla İspat Yapabilme Seviyelerinin İlişkilendirilmesi”, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Elliot, J. (1991). *Action Research for Educational Change*. Buckingham : Open University Press.
- Fawcett, H. P. (1995). The Nature of Proof. *Thirteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving In Ed. A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study Of Proof Conceptions İn Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 396-428.
- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press.
- Knuth, E. J., Chopin, J. M. & Bieda, K. N. (2012). Middle School Students’ Production of Mathematical Justification, In Ed. Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Knuth, E. J., *Teaching and Learning Proof Across the Grades A K-16 Perspective*. London - New York: Routledge.

- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education*, 16.
- M.E.B. (2013). Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.
- NCTM (2000). Principles And Standards For School Mathematics, www.nctm.org.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning And Teaching Problem Solving*. New York: Wiley.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 289-321.
- Tall, D. & Mejia-Ramos, J. P. (2006). The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof, In Ed. Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H., *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives*. New York: Springer.
- Tudge, J. (1990). Vygotsky, The zone of proximal development, and peer collaboration: Implications for classroom practice. In Ed. Moll, L.C., *Vygotsky and education: Instructional implications and applications of sociohistorical psychology* (155-174). Cambridge: Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. S. (1978). Educational implications. In Ed. Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. & Souberman E., *Mind in society: The development of higher psychological processes* (79-153). Cambridge: Harvard University Press.
- Zaimoğlu, Ş. (2012). “8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreci Ve Eğilimleri”, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.