Teknik Bilimleri Dergisi
Cilt 8, Sayı 2, 46-54, 2018

Journal of Technical Sciences
Volume 8, Issue 2, 46-54, 2018

Bir Eğrinin Asli Normaller Göstergesinin Doğrultu Eğrileri

Burak ŞAHİNER[*1]

[1]Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa

(Alınış / Received: 22.03.2018, Kabul / Accepted: 30.04.2018)

Anahtar Kelimeler
Doğrultu eğrileri,
Helis,
Küresel Helis
Küresel slant helis,
Slant helis

Özet: Helisler ve slant helisler, doğada ve bilimde sıklıkla karşılaştığımız, bilgisayar destekli geometrik tasarımdan fraktal geometriye, kinematikten DNA çiftlerine, geniş bir kullanım alanına sahip olan eğrilerdir. Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normaller göstergesinin doğrultu eğrileri tanımlanmış ve bu eğrilerin Frenet vektörleri ve eğrilikleri arasındaki ilişkiler bulunmuştur. Bu doğrultu eğrileri kullanılarak, küresel eğrilerden helis ve slant helisler oluşturmak için kullanışlı yöntemler elde edilmiştir. Son olarak, konu ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Direction Curves of Principal Normal Indicatrix of a Curve

Keywords
Direction curves,
Helix,
Spherical helix,
Spherical slant helix,
Slant helix

Abstract: Helices and slant helices are curves which are often encountered in nature and science and have a wide range of uses including computer aided geometric design, fractal geometry, kinematics, and DNA double. In this paper, direction curves of principal normal indicatrix of a curve in Euclidean 3-space are defined and some relationships between Frenet vectors and curvatures of these curves are found. By using these direction curves, some useful methods to construct helices and slant helices from spherical curves are obtained. Finally, a related example is given.

1. Giriş

Aralarında matematiksel bir ilişki bulunan iki ya da daha fazla eğriye bağlantılı eğriler denir. Birçok araştırmacı tarafından uzun yıllardır çalışılan bağlantılı eğriler, halen eğriler teorisindeki en ilgi çekici konulardan biri olmaya devam etmektedir. Bağlantılı olduğu eğri sayesinde, verilen bir eğri karakterize edilebilir, Frenet vektörleri ve eğrilikleri gibi bazı diferansiyel geometrik özellikleri bulunabilir ve eğrinin davranışı hakkında bilgi sahibi olunabilir. Involüt-evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri ve Mannheim eğri çiftleri sıklıkla çalışılan bağlantılı eğri örnekleridir.

Choi ve Kim (2012) bilinen bağlantılı eğrilere bir yenisini eklediler. Doğrultu eğrileri denilen bu yeni bağlantılı eğrileri, bir eğrinin Frenet vektörlerinin lineer bileşimi olan bir vektör alanının integral eğrisi olarak tanımladılar. Bu eğrilerin eğrilikleri arasında önemli bağıntılar elde ettiler. Bu çalışmanın en önemli yanı ise, geometri, biyoloji, bilgisayar grafikleri gibi birçok alanda karşılaştığımız helis ve slant helislerin oluşturulması için bazı yöntemler ortaya koymasıydı. Bu çalışmadan sonra birçok araştırmacı doğrultu eğrileri konusunu ele almış ve önemli çalışmalar ortaya koymuşlardır. Choi vd. (2012), E_1^3 Minkowski uzayında null olmayan doğrultu eğrilerini incelerken, Qian ve Kim (2015), null doğrultu eğrileri ele aldılar. Körpınar vd. (2013) çalışmalarında Frenet çatısı yerine Bishop çatıyı kullanarak doğrultu eğrilerini incelediler. Macit ve Düldül (2014), verilen bir eğrinin birim Darboux vektör alanını kullanarak W -doğrultu eğrileri ve yüzey üzerindeki bir eğrinin Darboux çatısını kullanarak V -doğrultu eğrileri tanımladılar. Ayrıca dört boyutlu Öklid uzaydaki bir eğrinin doğrultu eğrilerini incelediler. Kızıltuğ ve Önder (2015) ise üç boyutlu kompakt Lie grupta genel doğrultu eğrileri tanımını verdiler.

Bu çalışmada, öncelikle verilen bir eğrinin asli normaller göstergesinin Frenet vektörlerinin lineer bileşimi olan bir X vektör alanının integral eğrisi olarak X -doğrultu eğrileri tanımlanmıştır. Bu tanım kullanılarak, verilen bir eğrinin asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu eğrileri, Bertrand-doğrultu eğrileri ve Mannheim-doğrultu eğrileri tanıtılmıştır. Verilen eğri ve o eğrinin doğrultu eğrilerinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Tanımlanan doğrultu eğrileri kullanılarak, küresel eğrilerden helis ve slant helisler üretmek için kullanışlı yöntemler ortaya koyulmuştur. Son olarak, bu bağlantılı eğriler için bir örnek verilmiştir.

2. Ön Bilgiler

$\alpha : I \subset IR \to IR^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. α boyunca $\{T, N, B\}$ Frenet çatısını oluşturan vektörler aşağıdaki biçimde tanımlanabilir

$$T = \frac{d\alpha}{ds},\ N = (1/\kappa)T',\ B = T \times N.$$

Burada T birim teğet vektör alanı, N asli normal vektör alanı, B binormal vektör alanı, κ eğrilik ve s, eğrinin yay uzunluğudur. Frenet türev formülleri ise aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Burada τ, eğrinin burulmasıdır [4, 10].

Bir α eğrisinin $T(s)$ birim teğet vektörleri sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa, bu eğriye helis denir. α eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart

$$f(s) = \frac{\tau}{\kappa}(s) \tag{2.1}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [12].

Benzer şekilde, bir α eğrisinin $N(s)$ birim asli normal vektörleri sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa, bu eğriye slant helis denir. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s) \tag{2.2}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [6].

$\alpha : I \subset IR \to IR^3$ ve $\beta : I \subset IR \to IR^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında sırasıyla $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ Frenet çatılarına sahip iki eğri olsun. $N_\beta = T_\alpha$ (sırasıyla, $N_\beta = N_\alpha$, $N_\beta = B_\alpha$) ise β eğrisine α eğrisinin evolütü (sırasıyla, Bertrand çifti, Mannheim çifti) denir [5, 13].

$\alpha : I \subset IR \to IR^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca, tüm asli normal vektörler birim küre üzerinde bir $\alpha_N = N$ eğrisi oluştururlar. Bu α_N eğrisine α eğrisinin asli normaller göstergesi denir. $\{T_N, N_N, B_N, \kappa_N, \tau_N\}$, α_N eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere, α_N eğrisinin Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\frac{d}{ds_N}\begin{bmatrix} T_N \\ N_N \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_N & 0 \\ -\kappa_N & 0 & \tau_N \\ 0 & -\tau_N & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_N \\ N_N \\ B_N \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Burada

$$T_N = \frac{-T + fB}{\sqrt{1+f^2}},\ N_N = \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}\left[\frac{fT + B}{\sqrt{1+f^2}} - \frac{N}{\sigma}\right],$$

$$B_N = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\left[\frac{fT + B}{\sqrt{1+f^2}} + \sigma N\right]$$

ve

$$\Gamma = \frac{\sigma'}{\kappa\sqrt{1+f^2}\left(1+\sigma^2\right)^{3/2}} \tag{2.4}$$

olmak üzere

$$s_N = \int \kappa(s)\sqrt{1+f^2(s)}\, ds,$$

$$\kappa_N = \sqrt{1+\sigma^2},\quad \tau_N = \Gamma\sqrt{1+\sigma^2} \tag{2.5}$$

dir. Burada s_N, α_N eğrisinin yay uzunluğu, f ve σ ise sırasıyla (2.1) ve (2.2) denklemleri ile verilen fonksiyonlardır [1].

3. Asli normaller göstergesinin doğrultu eğrileri

$\alpha : I \subset IR \to IR^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olan bir eğri ve α_N, Frenet elemanları $\{T_N, N_N, B_N, \kappa_N, \tau_N\}$ olan, α eğrisinin asli normaller göstergesi olsun.

$$X(s_N) = x(s_N)T_N(s_N) + y(s_N)N_N(s_N) + z(s_N)B_N(s_N) \tag{3.1}$$

biçiminde ifade edilen X vektör alanını göz önüne alalım. Burada x, y ve z, s_N parametresine bağlı fonksiyonlardır. X vektör alanının birim olduğu kabul edilirse,

$$x^2(s_N)+y^2(s_N)+z^2(s_N)=1 \tag{3.2}$$

yazılabilir. (3.2) denkleminin türevi alınarak

$$x(s_T)x'(s_T)+y(s_T)y'(s_T)+z(s_T)z'(s_T)=0 \tag{3.3}$$

elde edilir.

3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normaller göstergesinin X -doğrultu eğrisi tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.1. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve X, (3.1) ve (3.2) denklemlerini sağlayan bir birim vektör alanı olsun. X in $\beta: I\subset IR\to IR^3$ integral eğrisine α_N asli normaller göstergesinin X -doğrultu eğrisi denir.

β, α eğrisinin α_N asli normaller göstergesinin X -doğrultu eğrisi, $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ ve $\{\kappa_\beta,\tau_\beta\}$ sırasıyla bu eğrinin Frenet çatısı ve eğrilikleri olsun. X vektör alanı birim kabul edildiğinden $\dfrac{d\beta}{ds_\beta}=T_\beta=X$ olur. Burada s_β, β eğrisinin yay uzunluğudur ve c bir sabit olmak üzere s_N+c ye eşittir. Genelliği kaybetmeden $s_\beta=s_N$ kabul edilebilir. (3.1) denkleminin türevi alınarak ve (2.3) deki Frenet formülleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\kappa_\beta N_\beta &= (x'-y\kappa_N)T_N+(y'+x\kappa_N-z\tau_N)N_N\\ &\quad +(z'+y\tau_N)B_N\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) denklemi kullanılarak α_N asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu, Bertrand-doğrultu ve Mannheim-doğrultu eğrilerinin tanımları verilebilir ve bu eğrileri bazı özellikleri incelenebilir.

4. Asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu eğrileri

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu eğrileri tanımlanmış ve bu eğriler ile ilgili bazı önemli bağıntılar elde edilmiştir.

Tanım 4.1. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin X -doğrultu eğrisi olsun. β eğrisi α_N eğrisinin evolütü ise β eğrisine α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi denir.

Önerme 4.2. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri ve α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi olsun. β eğrisinin α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi olması için gerek ve yeter şart (3.1) denklemindeki fonksiyonların

$$x(s_N)=0,\qquad y(s_N)=\sin\left(\int\tau_N(s_N)ds_N\right),$$
$$z(s_N)=\cos\left(\int\tau_N(s_N)ds_N\right)$$

olmasıdır.

İspat. Evolüt eğri tanımından $N_\beta=T_N$ olduğu bilinmektedir. (3.4) denklemi kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} x'-y\kappa_N &= \kappa_\beta\\ y'+x\kappa_N-z\tau_N &= 0\\ z'+y\tau_N &= 0\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.1) deki birinci, ikinci ve üçüncü denklem sırasıyla x, y ve z ile çarpılıp, elde edilen sonuçlar toplanırsa, (3.3) denkleminden $x=0$ elde edilir. $x=0$ değeri (4.1) sisteminde yerine yazılır ve (3.2) göz önünde bulundurulursa aşağıdaki çözüm bulunur:

$$x(s_N)=0,\ y(s_N)=\sin\left(\int\tau_N(s_N)ds_N\right),$$
$$z(s_N)=\cos\left(\int\tau_N(s_N)ds_N\right). \square$$

Asli normaller göstergesi α_N ile onun evolüt-doğrultu eğrisi β nın eğrilikleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.3. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi olsun. α_N ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur

$$\kappa_\beta = -\kappa_T \sin\left(\int \tau_T(s_T)ds_T\right),$$
$$\tau_\beta = \kappa_T \cos\left(\int \tau_T(s_T)ds_T\right)$$

ve

$$\kappa_T = \sqrt{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2}, \quad \tau_T = \frac{\kappa_\beta^2}{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'.$$

İspat. (4.1) sisteminin birinci eşitliğinden, $\kappa_\beta = -\kappa_N \sin\left(\int \tau_N(s_N)ds_N\right)$ olduğu görülür. Önerme (4.2) den,

$$X = T_\beta = \sin\left(\int \tau_N(s_N)ds_N\right)N_N + \cos\left(\int \tau_N(s_N)ds_N\right)B_N$$

bulunur, Ayrıca evolüt eğri tanımından $N_\beta = T_N$ olduğu bilinmektedir. β eğrisinin birim binormal vektörü

$$B_\beta = T_\beta \times N_\beta = \cos\left(\int \tau_N(s_N)ds_N\right)N_N - \sin\left(\int \tau_N(s_N)ds_N\right)B_N$$

olarak bulunur. B_β vektörünün türevi alınarak ve (2.3) Frenet formülleri kullanılarak $\tau_\beta = \kappa_N \cos\left(\int \tau_N(s_N)ds_N\right)$ elde edilir.

Diğer taraftan, $N_\beta = T_N$ eşitliğinin türevi alınarak ve (2.3) denklemleri kullanılarak $\kappa_N = \sqrt{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2}$ olduğu görülür. β eğrisinin eğrilikleri oranı

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = -\cot\left(\int \tau_N ds_N\right)$$

olduğundan

$$\int \tau_N ds_N = -\operatorname{arc}\cot\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin türevi alınarak $\tau_N = \dfrac{\kappa_\beta^2}{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2}\left(\dfrac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'$ bulunur. □

Teorem 4.3'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.4. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi olsun. α_N ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur

$$\cot\left(\int \tau_N ds_N\right) = f_\beta \quad \text{ve} \quad f_N = \sigma_\beta.$$

Burada f ve σ, sırasıyla (2.1) ve (2.2) deki fonksiyonlardır.

Sonuç 4.4 kullanılarak, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi olsun.

i) β eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart α_N eğrisinin birim küre üzerinde bir çember ya da bir çember parçası olmasıdır.

ii) β eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart α_N eğrisinin küresel bir helis olmasıdır.

Teorem 4.5, birim küre üzerinde bir çember ya da bir çember parçasından bir helis ve bir küresel helisten de bir slant helis üretmek için kullanışlı bir yöntem vermektedir. Ayrıca elde edilen helis ve slant helis eğrilerinin birim hızlı eğriler olması yöntemin kullanışlılığını arttırmaktadır.

Asli normaller göstergesi α_N ve α eğrisinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler kullanılarak α eğrisi ve β evolüt-doğrultu eğrisinin eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 4.6. α, 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa \neq 0$ olan bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi olsun. α ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$f_\beta = \cot\left(\int \kappa\,\Gamma\sqrt{1+\sigma^2}\sqrt{1+f^2}ds\right).$$

İspat. Sonuç 4.4 ve (2.5) eşitliklerinden açıktır.

Önerme 4.6'dan, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.7. α, 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa \neq 0$ olan bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi olsun. β eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin slant helis olmasıdır.

İspat. (2.1-2.5) denklemleri ve Önerme 4.6'dan açıktır.

5. Asli normaller göstergesinin Bertrand-doğrultu eğrileri

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normaller göstergesinin Bertrand-doğrultu eğrileri tanımlanmış ve bu eğriler ile ilgili bazı önemli bağıntılar elde edilmiştir.

Tanım 5.1. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin X -doğrultu eğrisi olsun. β eğrisi α_N eğrisinin Bertrand eğrisi ise β eğrisine α_N eğrisinin Bertrand-doğrultu eğrisi denir.

Önerme 5.2. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri ve α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi olsun. β eğrisinin α_N eğrisinin Bertrand-doğrultu eğrisi olması için gerek ve yeter şart (3.1) denklemindeki fonksiyonların

$x(s_N)=\cos\theta$, $y(s_N)=0$, $z(s_N)=\sin\theta$,

olmasıdır. Burada θ, α_N ve β eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki sabit açıdır.

İspat. Bertrand eğrilerin tanımından, $N_\beta = N_N$ olduğu bilinmektedir. (3.4) denklemi kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} x' - y\kappa_N &= 0 \\ y' + x\kappa_N - z\tau_N &= \kappa_\beta \\ z' + y\tau_N &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (5.1) deki birinci, ikinci ve üçüncü denklem sırasıyla x, y ve z ile çarpılıp, elde edilen sonuçlar toplanırsa, (3.3) denkleminden $y=0$ elde edilir. $y=0$ değeri (5.1) sisteminde yerine yazıldığında, c_1 ve c_2 sabit reel sayılar olmak üzere $x=c_1$ ve $z=c_2$ elde edilir. X birim kabul edildiğinden, (5.1) sisteminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur

$\{x(s_N)=\cos\theta,\ y(s_N)=0,\ z(s_N)=\sin\theta\}$. □

Asli normaller göstergesi α_N ile onun Bertrand-doğrultu eğrisi β nın eğrilikleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 5.3. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Bertrand-doğrultu eğrisi olsun. α_N ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur

$$\kappa_\beta = \kappa_N\cos\theta - \tau_N\sin\theta, \quad \tau_\beta = \kappa_N\sin\theta + \tau_N\cos\theta$$

ve

$$\kappa_N = \kappa_\beta\cos\theta + \tau_\beta\sin\theta, \quad \tau_N = -\kappa_\beta\sin\theta + \tau_\beta\cos\theta.$$

İspat. (5.1) sisteminin ikinci eşitliğinden $\kappa_\beta = \kappa_N\cos\theta - \tau_N\sin\theta$ olduğu görülür. Önerme (5.2) den, $X = T_\beta = \cos\theta\, T_N + \sin\theta\, B_N$ bulunur, ayrıca Bertrand eğrilerin tanımından $N_\beta = N_N$ olduğu bilinmektedir. β eğrisinin birim binormal vektörü

$$B_\beta = T_\beta \times N_\beta = -\sin\theta\, T_N + \cos\theta\, B_N$$

olarak bulunur. Binormal vektörün türevi alınarak ve (2.3) Frenet formülleri kullanılarak $\tau_\beta = \kappa_N\sin\theta + \tau_N\cos\theta$ elde edilir.

Diğer taraftan, β eğrisinin eğrilikleri kullanılarak α_N asli normaller göstergesinin eğrilikleri kolayca bulunabilir. □

Teorem 5.3'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.4. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Bertrand-doğrultu eğrisi olsun. α_N ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur

i) $f_N = \dfrac{-\sin\theta + f_\beta\cos\theta}{\cos\theta + f_\beta\sin\theta}$,

ii) $\sigma_N = \sigma_\beta$.

Burada f ve σ, sırasıyla (2.1) ve (2.2) deki fonksiyonlardır.

Sonuç 5.4 kullanılarak, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.5. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Bertrand-doğrultu eğrisi olsun.

i) β eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart α_N eğrisinin bir küresel helis olmasıdır.

ii) β eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart α_N eğrisinin bir küresel slant helis olmasıdır.

Teorem 5.5, bir küresel helisten bir helis ve bir küresel slant helisten de bir slant helis üretmek için kullanışlı bir yöntem vermektedir. Ayrıca elde edilen helis ve slant helis eğrilerinin birim hızlı eğriler olması yöntemin kullanışlılığını arttırmaktadır.

6. Asli normaller göstergesinin Mannheim-doğrultu eğrileri

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin asli normaller göstergesinin Mannheim-doğrultu eğrileri tanımlanmış ve bu eğriler ile ilgili bazı önemli bağıntılar elde edilmiştir.

Tanım 6.1. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin X -doğrultu eğrisi olsun. β eğrisi α_N eğrisinin Mannheim eğrisi ise β eğrisine α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi denir.

Önerme 6.2. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri ve α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi olsun. β eğrisinin α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi olması için gerek ve yeter şart (3.1) denklemindeki fonksiyonların

$$x(s_N)=\sin\left(\int \kappa_N ds_N\right),\quad y(s_N)=\cos\left(\int \kappa_N ds_N\right),$$

$$z(s_N)=0$$

olmasıdır.

İspat. Mannheim eğrilerin tanımından $N_\beta = B_N$ olduğu bilinmektedir. (3.4) denklemi kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} x' - y\kappa_N &= 0 \\ y' + x\kappa_N - z\tau_N &= 0 \\ z' + y\tau_N &= \kappa_\beta \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (6.1) deki birinci, ikinci ve üçüncü denklem sırasıyla x, y ve z ile çarpılıp, elde edilen sonuçlar toplanırsa, (3.3) denklemi yardımıyla $z=0$ elde edilir. $z=0$ değeri (6.1) sisteminde yerine yazılıp (3.2) eşitliği göz önünde bulundurulursa, (6.1) sisteminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$x(s_N)=\sin\left(\int \kappa_N ds_N\right),$$

$$y(s_N)=\cos\left(\int \kappa_N ds_N\right),\ z(s_N)=0. \quad \square$$

Asli normaller göstergesi α_N ile onun Mannheim-doğrultu eğrisi β nın eğrilikleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 6.3. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi olsun. α_N ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur

$$\kappa_\beta = \tau_N \cos\left(\int \kappa_N ds_N\right),\quad \tau_\beta = \tau_N \sin\left(\int \kappa_N ds_N\right)$$

ve

$$\kappa_N = \frac{\kappa_\beta^{\,2}}{\kappa_\beta^{\,2}+\tau_\beta^{\,2}}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)',\quad \tau_N = \sqrt{\kappa_\beta^{\,2}+\tau_\beta^{\,2}}.$$

İspat. (6.1) sisteminin üçüncü eşitliğinden $\kappa_\beta = \tau_N \cos\left(\int \kappa_N ds_N\right)$ olduğu görülür. Önerme (6.2) den,

$$X = T_\beta = \sin\left(\int \kappa_N ds_N\right)T_N + \cos\left(\int \kappa_N ds_N\right)N_N$$

bulunur, ayrıca Mannheim eğrilerin tanımından $N_\beta = B_N$ olduğu bilinmektedir. Böylece β eğrisinin birim binormal vektörü

$$B_\beta = T_\beta \times N_\beta = \cos\left(\int \kappa_N ds_N\right)T_N - \sin\left(\int \kappa_N ds_N\right)N_N$$

olarak bulunur. Binormal vektörün türevi alınarak ve (2.3) Frenet formülleri kullanılarak $\tau_\beta = \tau_N \sin\left(\int \kappa_N ds_N\right)$ elde edilir.

Diğer taraftan, β eğrisinin eğrilikleri kullanılarak α_N eğrisinin burulması $\tau_N = \sqrt{\kappa_\beta^{\,2}+\tau_\beta^{\,2}}$ olarak bulunur. β eğrisinin eğrilikleri oranı

$$\tan\left(\int \kappa_N ds_N\right) = \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}$$

olduğundan

$$\int \kappa_N ds_N = \arctan\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)$$

bulunur. Son eşitliğin

türevi alınarak $\kappa_N = \dfrac{\kappa_\beta^{\;2}}{\kappa_\beta^{\;2}+\tau_\beta^{\;2}}\left(\dfrac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'$ elde edilir. □

Teorem 6.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6.4. α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi olsun. α_N ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur

$$f_N = \mp\frac{1}{\sigma_\beta}.$$

Burada f ve σ, sırasıyla (2.1) ve (2.2) deki fonksiyonlardır.

Teorem 6.3 ve Sonuç 6.4 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.5 α, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi olsun.

i) β eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart α_N eğrisinin bir küresel helis olmasıdır.

ii) β eğrisinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart α_N eğrisinin birim küre üzerinde bir çember ya da bir çember parçası olmasıdır.

Teorem 6.5, küresel bir helisten slant helis üretmek için kullanışlı bir yöntem vermektedir. Ayrıca elde edilen slant helisin birim hızlı olması yöntemin kullanışlılığını arttırmaktadır.

Asli normaller göstergesi α_N ve α eğrisinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler kullanılarak α eğrisi ve β Mannheim-doğrultu eğrisinin eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 6.6. α, 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa \neq 0$ olan bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi olsun. α ve β eğrilerinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur

$$\tau_\beta = \Gamma\sqrt{1+\sigma^2}\,\sin\left(\int \kappa\sqrt{1+f^2}\,\sqrt{1+\sigma^2}\,ds\right).$$

İspat. Teorem 6.3 ve (2.5) eşitliklerinden açıktır.

Önerme 6.6'dan, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.7. α, 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa \neq 0$ olan bir eğri, α_N, α eğrisinin asli normaller göstergesi ve β, α_N eğrisinin Mannheim-doğrultu eğrisi olsun. β eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin slant helis olmasıdır.

İspat. (2.2), (2.4) denklemleri ve Önerme 6.6'dan açıktır.

7. Örnek

3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri

$$\alpha(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu eğrinin asli normaller göstergesi

$$\alpha_N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

olarak bulunur. Burada s hem α eğrisinin hem de α_N eğrisinin yay uzunluğu parametresidir. α_N asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu eğrisi, Bertrand-doğrultu eğrisi ve Mannheim-doğrultu eğrisi sırasıyla

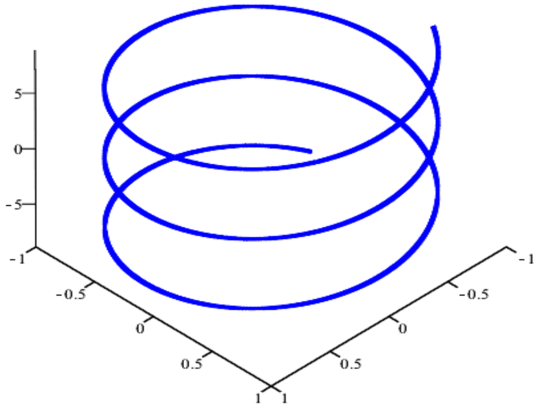
$$\beta_E(s) = \left(\sqrt{2}\sin c_1 \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + c_2,\right.$$
$$\left. -\sqrt{2}\sin c_1 \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + c_3, s\cos c_1 + c_4\right),$$

$$\beta_B(s) = \left(-\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + c_5,\right.$$
$$\left. -\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + c_6, s\sin\theta + c_7\right),$$

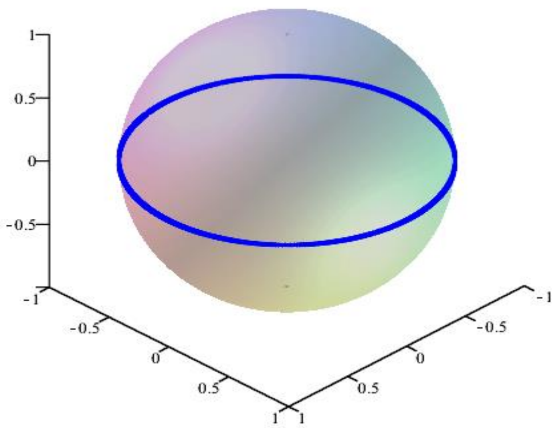
$$\beta_M(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}-2}\sin\left(s - \frac{s}{\sqrt{2}} + c_8\right) + c_9,\right.$$
$$\left. -\frac{2}{\sqrt{2}-2}\cos\left(s - \frac{s}{\sqrt{2}} + c_8\right) + c_{10},\ c_{11}\right)$$

olarak bulunur. Burada $c_i, (i = 1,\ldots,11)$ ler integrasyon sabitleri ve θ sabit bir açıdır. Maple 18 programı kullanılarak, $c_1 = \pi/4$, $c_i = 0, (i = 2,\ldots,11)$ ve $\theta = \pi/4$ alınarak, verilen

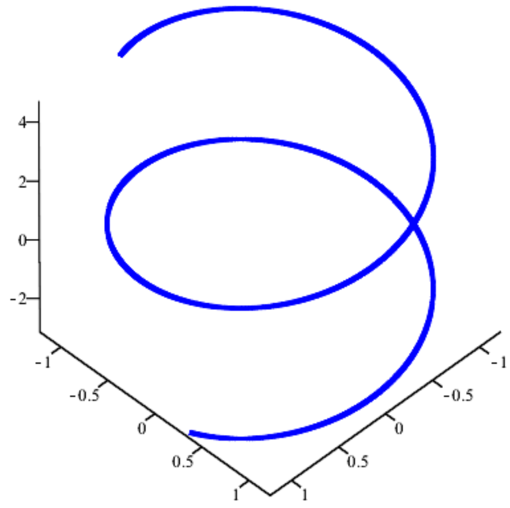
α eğrisi, α eğrisinin asli normaller göstergesi α_N, α_N eğrisinin evolüt-doğrultu eğrisi, Bertrand-doğrultu eğrisi ve Mannheim-doğrultu eğrisi sırasıyla aşağıdaki gibi çizdirilmiştir (Şekil 1-5).



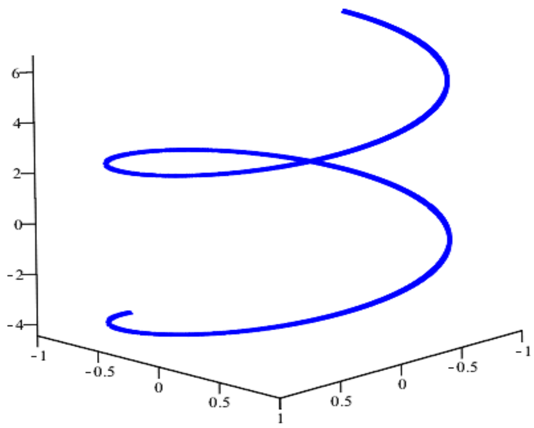
Şekil 1. α eğrisi



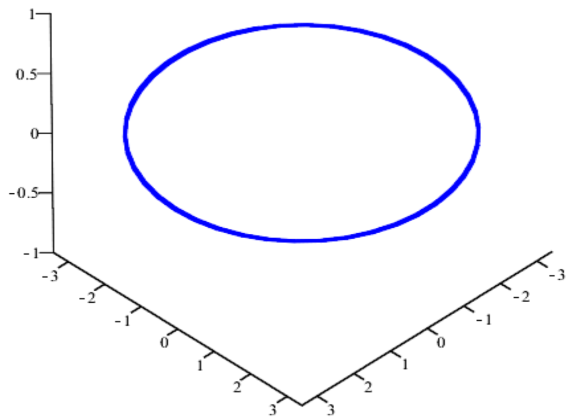
Şekil 2. α eğrisinin asli normaller göstergesi α_N



Şekil 3. α_N asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu eğrisi



Şekil 4. α_N asli normaller göstergesinin Bertrand-doğrultu eğrisi



Şekil 5. α_N asli normaller göstergesinin Mannheim-doğrultu eğrisi

7. Sonuçlar

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin asli normaller göstergesinin evolüt-doğrultu eğrisi, Bertrand-doğrultu eğrisi ve Mannheim doğrultu eğrisi tanımlanmıştır. Tanımlanan bu eğrilerin her biri, asli normaller göstergesi ile birer bağlantılı eğri çifti oluşturmaktadır. Böylece, eğrilerden birinin özellikleri kullanılarak, diğer eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri gibi diferansiyel geometride öneme sahip özellikleri bulunabilir, ayrıca eğrinin düzlemsel eğri, helis eğrisi ya da slant helis eğrisi olup olmadığı gibi bazı karakterizasyonlar elde edilebilir. Tanımlanan bu yeni bağlantılı eğrilerin en önemli özelliği ise bilim ve doğada sıklıkla karşılaştığımız, bilgisayar grafikleri, bilgisayar destekli tasarım, makine mühendisliği, dişli çarklar gibi birçok kullanım alanına sahip helis ve slant helislerin üretilmesi için kullanışlı yöntemler ortaya koymasıdır. Bu makalede ortaya koyulan incelemelere benzer şekilde, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğetler ve binormaller göstergelerinin doğrultu eğrileri, devam eden çalışmalardır.

Kaynakça

[1] Ali, A.T. 2012. New special curves and their spherical indicatrix. Glob. J Adv. Res. Class. Mod. Geom. 1(2), 28–38.

[2] Choi, J.H., Kim, Y.H. 2012. Associated curves of a Frenet curve and their applications. Applied Mathematics and Computation, 218, 9116-9124.

[3] Choi, J.H., Kim, Y.H., Ali, A.T. 2012. Some associated curves of Frenet non-lightlike curves in E_1^3 . Journal of Mathematical Analysis and Applications, 394, 712-723.

[4] Do Carmo, M.P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[5] Eisenhart, L.P. 1940. Introduction to Differential Geometry. Princeton University Press, Princeton.

[6] Izumiya, S., Takeuchi, N. 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. Journal of Geometry, 74, 97-109.

[7] Kızıltuğ, S., Önder, M. 2015. Associated curves of Frenet curves in three dimensional compact Lie group. Miskolc Mathematical Notes, 16(2), 953-964.

[8] Körpınar, T., Sarıaydın, M.T., Turhan, E. 2013. Associated curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. Advanced Modeling and Optimization, 15(3), 713-717.

[9] Macit, N., Düldül, M. 2014. Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4. Turkish Journal of Mathematics, 38, 1023-1037.

[10] O'Neill, B. 2006. Elementary Differential Geometry. Revised second ed., Academic Press.

[11] Qian, J., Kim, Y.H. 2015. Directional associated curves of a null curve in Minkowski 3-space. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 52(1), 183-200.

[12] Struik, D.J. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover, New-York, 1988.

[13] Wang, F., Liu, H. 2007. Mannheim partner curves in 3-Euclidean space. Mathematics in Practice and Theory, 37(1), 141-143.