



Kesir dereceli PI denetleyici ile kesir dereceli kararsız zaman gecikmeli sistemler için kararlılık bölgelerinin elde edilmesi

Erdal ÇÖKMEZ*

Dicle Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır
erdal.cokmez@dicle.edu.tr ORCID: 0000-0001-7297-7441, Tel: (412) 241 10 00 (3638)

İbrahim KAYA

Dicle Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır
ikaya@dicle.edu.tr ORCID: 0000-0002-8393-1358, Tel: (412) 241 10 00 (3507)

Geliş: 13.04.2018, Kabul Tarihi: 12.06.2018

Öz

Kesir dereceli türev ve integral, tam dereceli türev ve integralin genelleştirilmiş hali olarak kabul edilmektedir. Kesir dereceli matematiğin kontrol alanındaki uygulamaları kesirli türev derecesi (μ) ve kesirli integral derecesinin (λ) sağladığı avantajlar nedeniyle son yıllarda hatırı sayılır derecede artmıştır. Bu uygulamalarının artmasıyla beraber, sistem ihtiyaçlarını en uygun şekilde karşılayacak kesir dereceli denetleyici tasarlamanın önemi de giderek artmıştır. Ancak, zaman çalışma bölgesinde kesir dereceli denetleyici tasarımı hala çeşitli zorluklar barındırdığından, kesir dereceli denetleyici tasarımı genellikle frekans çalışma bölgesinde yapılmaktadır. Frekans çalışma bölgesinde tasarım yapılırken en çok kullanılan parametreler kazanç payı, faz payı, kazanç geçiş frekansı ve faz geçiş frekansı gibi sistemin frekans cevabı parametreleridir. Bu çalışmada, kesir dereceli PI denetleyici ile kontrol edilen kesir dereceli kararsız kapalı çevrim bir sistemi kararlı duruma getiren kararlılık bölgeleri, tasarımcı tarafından istenilen faz ve kazanç paylarını sağlayacak şekilde, elde edilmiştir. Ayrıca, bu bölgelerin elde edilmesinin yanı sıra, kesirli integral derecesi, faz payı, kazanç payı, sistemin kesir derecesi, süreç transfer fonksiyonu kazancı gibi parametrelerin kararlılık bölgeleri üzerindeki etkilerinin gösterilmesi amaçlanmıştır. Elde edilen kararlılık bölgelerinin ağırlık merkezine yakın noktalarından seçilen kesir dereceli PI denetleyici parametreleri kullanılarak kesir dereceli kararsız ve zaman gecikmeli sistemin kapalı çevrim birim basamak cevapları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesir dereceli PI denetleyiciler, kesir dereceli sistemler, kararsız sistemler, kararlılık bölgesi, faz payı, kazanç payı

* Yazışmaların yapılacağı yazar:

DOI:

Giriş

Kesir dereceli matematiğin tarihi 1695 yılında Leibniz'den L'Hospital'e gönderilen bir mektuptaki soru ile başlamış ve Leibniz, diferansiyel katsayıların genelleştirilmesinin önünü açmıştır. Daha sonra bilim insanları Laplace dönüşümünü kullanarak kesir dereceli transfer fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Devamında, kesir dereceli matematiğin gelişimi devam etmiş ve kesir dereceli integral ve türev için farklı tanımlar yapılmıştır. Bu tanımlardan en önemlileri Caputo, Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov tarafından yapılan tanımlamalardır (Samko, Kilbas ve Marichev, 1993). Daha sonra, gerçek sistemlerin tanımında daha başarılı olduğu için, kesir dereceli matematiğin uygulamaları hızlı bir şekilde artmaya başlamıştır. Genellikle gerçek sistemlerin karakteristikleri ve davranışları kesir dereceli olarak tanımlanır. Yarı-sonsuz kayıplı bir iletim hattındaki gerilim-akım ilişkisi, viskoelastik materyaller, elektromekanik süreçler, dielektrik polarizasyonu, renkli gürültü, ısı difüzyonu ve kaotik sistemler kesir dereceli sistemlere örnek olarak gösterilebilir (Wang, 1987; Podlubny, 1999; Chen, Petráš ve Xue, 2009).

Son zamanlarda, klasik sistemlerden farklı olarak iki ekstra parametrenin (kesirli türev derecesi (μ) ve kesirli integral derecesi (λ)) sağladığı avantajlar sonucunda, kesir dereceli sistemlere olan ilgi hem akademik camiada hem de endüstriyel camiada artmıştır (Caponetto *vd.*, 2010; Padula ve Visioli, 2015). Kesir dereceli türev ve kesir dereceli integralin eklenmesiyle beraber sistem daha karmaşık hale gelmekte ancak, eklenen bu iki parametreyle kontrol sistemlerinin daha iyi modellenmesi, kontrol sisteminin isteklere daha uygun cevaplar vermesi gibi faydalarından dolayı kesir dereceli denetleyiciler, klasik denetleyicilere göre daha esnek hale gelmektedir (Podlubny, 1999; Sabatier, Agrawal ve Machado, 2007; Monje *et al.*, 2008; Oustaloup *vd.*, 2008). Modelleme ve kontroldeki bu faydalarının sonucunda, kesir

dereceli matematiğin kontrol alanındaki uygulamaları son zamanlarda çok büyük bir gelişme göstermiştir.

Zaman çalışma bölgesi ile kesir dereceli PID denetleyici tasarımında hala zorluklar olduğundan, kesir dereceli PID denetleyiciler için yapılan denetleyici tasarım tekniklerinin büyük bir çoğunluğu frekans çalışma bölgesindedir (Luo ve Chen, 2009). Dolayısıyla kontrol sistemlerinin frekans çalışma bölgesindeki parametreleri büyük önem taşımaktadırlar. Özellikle faz payı-kazanç payı ile kararlılık arasındaki ilişkiden ötürü, frekans çalışma bölgesindeki kesir dereceli PID denetleme çalışmalarında bu parametreler sık sık kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra faz payı kontrol sisteminin aşma miktarını da etkilemektedir. Bu metotların bir kısmını da kararlılık bölgesi elde etme ve bu bölgeleri kullanarak denetleyici tasarlama çalışmaları oluşturmaktadır.

Tan, Kaya ve Atherton, (2003) yılında PI ve PID denetleyicilerin kararlılık bölgelerinin elde edilmesi amacıyla çalışma yapmışlardır. Tan, (2005) yılında ise zaman gecikmeli sistemler için PI ve PID denetleyici kararlılık bölgelerinin elde edilmesi amacıyla çalışma yapmıştır. (Tan ve ark., (2006) yılındaki bir diğer çalışmalarında kararlılık bölgelerinden faydalanarak PI ve PID denetleyicileri kararlı yapan parametreleri hesaplamışlardır. Ayrıca, Cheng ve Hwang (2006) birinci derece kararsız ve zaman gecikmeli sistemler için kesir dereceli PD denetleyici tasarımı üzerine çalışma yapmıştır. Bu çalışmadan sonra Hamamci (2007) faz payı ve kazanç payı kullanarak kesir dereceli denetleyici tasarlanmasına yönelik yeni bir metot önermiştir. Ruzewski (2008) ise Hamamci tarafından önerilen bu metodu kullanarak kesir dereceli, kararlı ve zaman gecikmeli sistemler için kesir dereceli PI denetleyici tasarımı yapmıştır. Hamamci ve Koksall (2010) integrator içeren sistemlerin kesir dereceli PD denetleyiciler ile kontrolüne yönelik otomatik ayarlı bir tasarım metodu

önermişlerdir. Sonrasında ise, Bhisrkar, Vyawahare ve Tare, (2014) lineer kararsız sistemler için sistemin Bode Diyagramı ve Nyquist eğrisinden faydalanarak kesir dereceli PD denetleyici tasarımı yapmışlardır. Bhisrkar, Vyawahare ve Joshi (2015) sistemin Nyquist eğrisinden faydalanarak lineer kararsız sistemler için kesir dereceli PI denetleyici tasarımı önermişlerdir. Son olarak, Sondhi ve Hote (2015) ortalama yüzeysel kan basıncı üzerine yaptıkları çalışmada belirli kazanç ve faz paylarına bağlı olarak kesir dereceli PI denetleyici tasarlamışlardır.

Bu çalışmada amaç, kesir dereceli kararsız ve zaman gecikmeli bir sistem için belirli faz ve kazanç paylarına bağlı olarak sistemin kararlılık bölgelerini elde etmek ve diğer sistem parametrelerinin kararlılık üzerindeki etkisini belirlemektir. Kararlılık bölgelerindeki değişim faz payı, kazanç payı, kesirli integral derecesi (λ), transfer fonksiyonu kesir derecesi ve transfer fonksiyonu parametrelerine bağlı olarak elde edilmiştir.

Çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde devam edecektir: 2. bölümde kesir dereceli matematik ve kesir dereceli PI\PID denetleyiciler üzerine temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra 3. bölümde, kesir dereceli kararsız ve zaman gecikmeli bir sistem için kararlılık bölgelerinin elde edilmesi verilmiştir. 4. bölümde sonuçlar verilmiş olup son olarak 5. bölümde öneriler kısmı yer alacaktır.

Kesir Dereceli Kontrol Sistemleri ve Kesir Dereceli PID Denetleyiciler

Kesir dereceli matematiğin 1695 yılında doğumundan bugüne kadar, kesir dereceli diferansiyeller için çeşitli çalışmalar ve tanımlamalar yapılmıştır. Kesir dereceli diferansiyeller üzerine yapılan bu tanımlamalar içerisinde üç tanesi kayda değer derecede dikkat toplamıştır. Bunlar; Grünwald-Letnikov, Caputo ve Riemann-Liouville kesir dereceli tanımlamalarıdır. Bu yüzden, bu üç tanımlama

kesir dereceli matematik tarihinde çok önemli bir yere sahiptir ve bu çalışmalar ışığında çok sayıda çalışma yapılmıştır (Monje *vd.*, 2010).

Riemann-Liouville'nin kesir dereceli türev için yaptığı tanım $n-1 < \alpha < n$ olmak üzere şu şekildedir (Chen, Petráš ve Xue, 2009; Monje *vd.*, 2010):

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (1)$$

Riemann-Liouville'nin kesir dereceli türev tanımında yer alan $\Gamma(x)$ fonksiyonu Gama fonksiyonu olarak adlandırılır ve faktöriyel fonksiyonlarının genelleştirilmiş şeklidir. Burada x , kesirli bir sayı ya da karmaşık bir sayı olabilmektedir. Bunun yanı sıra Riemann-Liouville'nin kesir dereceli integral tanımı ise $0 < \alpha < 1$ ve $t < 0$ olmak üzere aşağıdaki gibidir (Chen, Petráš ve Xue, 2009; Monje *vd.*, 2010):

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2)$$

Kesir dereceli türev üzerine yapılmış bir diğer tanım ise Grünwald-Letnikov tarafından yapılan kesir dereceli türev tanımıdır. Bu tanımlama ise aşağıdaki gibidir (Chen, Petráš ve Xue, 2009; Monje *vd.*, 2010):

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (3)$$

Son olarak kesir dereceli türev için önerilen üçüncü önemli tanımlama ise Caputo tarafından yapılmıştır (Chen, Petráš ve Xue, 2009; Monje *vd.*, 2010):

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (4)$$

Kesir dereceli PID denetleyiciler ($PI^\lambda D^\mu$), klasik PID denetleyicilerin genelleştirilmiş şekli olarak kabul edilmektedir. Podlubny (1999), klasik PID denetleyicilerin yapısının içerisinde ekstradan kesirli integral derecesi (λ) ve kesirli

türev derecesini (μ) kullanmış ve böylece kesir dereceli PID denetleyicilerin tarihi de başlamıştır. Podlubny'nin bu çalışmasından sonra kesir dereceli denetleyiciler kullanılarak çok sayıda çalışma yapılmış ve bu çalışmalar neticesinde λ ve μ gibi iki ekstra kesir dereceli parametrenin de sağladığı faydalar sonucu kesir dereceli denetleyiciler ile daha iyi kapalı döngü cevapların elde edilebileceği görülmüştür. Kesir dereceli integral ve türevin bir diğer faydası da sistemdeki değişimlere karşı kesir dereceli PID denetleyicilerin daha az hassas olmasını sağlamalarıdır (Monje *vd.*, 2010).

Frekans zaman bölgesi daha önce de belirtilen sebeplerden ötürü, kesir dereceli PID denetleyicilerin tasarımında zaman çalışma bölgesinden daha fazla kullanılmaktadır. Frekans çalışma bölgesi kullanılırken açık çevrim sistemin faz payı, kazanç payı, faz geçiş frekansı ve kazanç geçiş frekansı gibi özelliklerinden faydalanılır (De Keyser, Muresan ve Ionescu, 2015). Nyquist Kriteri, Bode Diyagramı gibi iyi bilinen frekans çalışma bölgesi analiz yöntemleri kullanılarak sistemin faz payı, kazanç payı, faz geçiş frekansı ve kazanç geçiş frekansı gibi parametreleri bulunabilir.

Kararlılık Bölgelerinin Elde Edilmesi

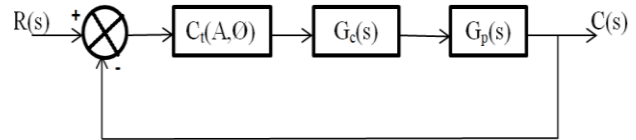
Bu bölümde kesir dereceli kararsız ve zaman gecikmeli bir sistemin kesir dereceli PI denetleyici ile kontrol edilmesi sırasında belirli faz ve kazanç payları için kararlılık bölgelerinin elde edilişi anlatılmıştır. Söz konusu sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi kabul edilmiştir.

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{Ts^\alpha - 1} \quad (5)$$

Kesir dereceli PI denetleyicinin transfer fonksiyonunun ise şu şekilde olduğu kabul edilmiştir:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} = \frac{K_p s^\lambda + K_i}{s^\lambda} \quad (6)$$

Kesir dereceli sistemi belirli faz ve kazanç payları değerleri için kararlı hale getirecek bölgelerin saptanabilmesi için, denetleyicinin önüne kazanç-faz payı test edicisi (Gain-Phase Margin Tester-GPMT) yerleştirilir. Söz konusu sistemin yapısı Şekil 1'de verilmiştir. Şekilde, $C_t(A, \phi)$ kazanç-faz payı test edicinin transfer fonksiyonunu ifade etmektedir.



Şekil 1. Kazanç-Faz payı test edicisi ve kontrol sistemi

$C_t(A, \phi)$, sistemin sabit faz ve kazanç payları hakkında bilgi edinmeyi sağlayan sanal kompanzator olarak adlandırılır. Kazanç-faz payı test edicinin transfer fonksiyonu şu şekildedir:

$$C_t(A, \phi) = Ae^{-j\phi} \quad (7)$$

Şekil 1'de gösterilen kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C_t(A, \phi)G_c(s)G_p(s)}{1 + C_t(A, \phi)G_c(s)G_p(s)} \quad (8)$$

Dolayısıyla, kapalı çevrim sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P(s; K_p, K_i, \lambda) = 1 + C_t(A, \phi)G_c(s)G_p(s) = 0 \quad (9)$$

(5), (6) ve (7). nolu denklemler (9). nolu denklemde yerine yazıldığında karakteristik denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(s; K_p, K_i, \lambda) = 1 + Ae^{-j\phi} \frac{K_p s^\lambda + K_i}{s^\lambda} \frac{Ke^{-\theta s}}{Ts^\alpha - 1} = 0 \quad (10)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$P(s; K_p, K_i, \lambda) = AK e^{-j(\omega\theta + \phi)} (K_p s^\lambda + K_i) + \dots + Ts^{\lambda + \alpha} - s^\lambda = 0 \quad (11)$$

olur. Kapalı çevrim bir sistemin kararlı olabilmesi için kontrol sisteminin sağ düzlemde kutuplarının olmaması gerekir. Aksi takdirde sistem kararsız hale gelir. Kararlılık bölgesi, K_p , K_i ve λ bu bölgenin elemanları olmak üzere, bu elemanların aldığı değerler ile bölgenin sağ tarafta köklerinin olmadığı bölge olarak adlandırılır. Kesir dereceli PI denetleyici ile kontrol edilen sistemin kararlılık bölgesi Real Root Boundary (RRB) ve Complex Root Boundary (CRB) eşitlikleri ile bulunur (Hamamci, 2007). Bu bölgelerin nasıl elde edildiği ise aşağıda verilmiştir:

$$RRB: P(0; K_p, K_i, \lambda) = 0, \omega \in (0, \infty),$$

$$CRB: P(j\omega; K_p, K_i, \lambda) = 0, \omega \in (0, \infty),$$

RRB değerini hesaplayabilmek için Eşitlik (11)'de $s=0$ olarak kabul edilir. Gerekli işlemler yapıldığında RRB için $K_i=0$ olarak bulunur.

CRB değerini bulmak için eşitlik (11)'de $s=j\omega$ yerleştirmesi yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$P(j\omega; K_p, K_i, \lambda) = AK e^{-j(\omega\theta+\phi)} (K_p (j\omega)^\lambda + K_i) + T (j\omega)^{\lambda+\alpha} - (j\omega)^\lambda = 0 \quad (12)$$

Bu denklemi çözebilmek için aşağıda verilen iki farklı eşitliğin kullanılması gerekmektedir:

$$j^\lambda = \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \quad (13)$$

$$e^{j\delta} = \cos(\delta) + j \sin(\delta) \quad (14)$$

(13) ve (14) nolu denklemler, denklem (12)'de yerine yazılırsa aşağıdaki reel ve sanal kısımlardan oluşan yeni bir denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & T \omega^{\lambda+\alpha} \left[\cos\left((\lambda+\alpha)\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left((\lambda+\alpha)\frac{\pi}{2}\right) \right] - \\ & \omega^\lambda \left[\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \right] + \\ & AK \left[\cos(\omega\theta + \phi) - j \sin(\omega\theta + \phi) \right] \left[K_p \omega^\lambda \left(\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + j K_p \omega^\lambda \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \right) + K_i \right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Sonrasında, denklemin çözümünü bulmak için, reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı olarak sıfıra eşitlenirse aşağıda verilen denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} & T \omega^{\lambda+\alpha} \cos\left((\lambda+\alpha)\frac{\pi}{2}\right) - \omega^\lambda \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + AK K_p \omega^\lambda \\ & \cos(\omega\theta + \phi) \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + AK K_p \omega^\lambda \sin(\omega\theta + \phi) \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \\ & + AK K_i \cos(\omega\theta + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & T \omega^{\lambda+\alpha} \sin\left((\lambda+\alpha)\frac{\pi}{2}\right) - \omega^\lambda \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + AK K_p \omega^\lambda \\ & \cos(\omega\theta + \phi) \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) - AK K_p \omega^\lambda \sin(\omega\theta + \phi) \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \\ & - AK K_i \sin(\omega\theta + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Denklem (16) ve (17) K_p ve K_i için çözüldüğünde, aşağıda verilen denklemlere ulaşılabilir:

$$\begin{aligned} K_p = & \frac{T \omega^{\lambda+\alpha} \cos\left((\lambda+\alpha)\frac{\pi}{2}\right) - \omega^\lambda \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}{-AK \omega^\lambda \cos(\omega\theta + \phi - \frac{\lambda\pi}{2})} \dots \\ & \dots + \frac{AK K_i \cos(\omega\theta + \phi)}{-AK \omega^\lambda \cos(\omega\theta + \phi - \frac{\lambda\pi}{2})} \end{aligned} \quad (18)$$

$$K_i = \frac{T \omega^{\lambda+\alpha} \sin(\omega\theta + \phi + \frac{\alpha\pi}{2}) - \omega^\lambda \sin(\omega\theta + \phi)}{AK \sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)} \quad (19)$$

Denetleyici parametrelerini veren (18) ve (19) nolu denklemler kullanılarak belirli faz payı, kazanç payı, kesirli integral derecesi veya kararsız sistemin parametrelerine bağlı olarak $K_p - K_i$ düzleminde kararlılık bölgeleri çizilebilir. Kararlılık bölgelerinin çiziminden önce aşağıdaki hususları bilmekte fayda vardır:

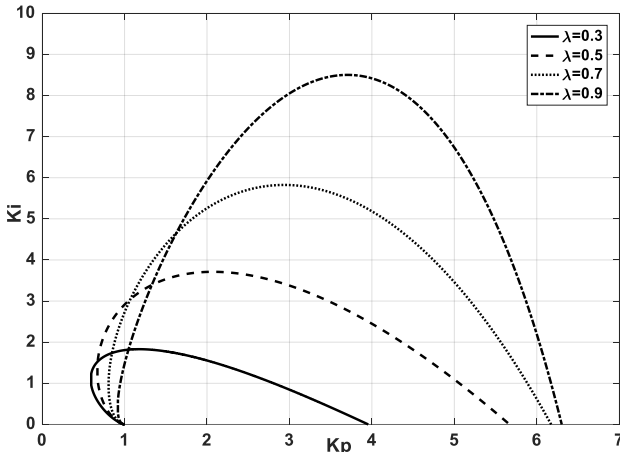
- Belirlenmiş bir λ değeri için genel kararlılık bölgesini bulmak için $A=1$ ve $\phi=0$ alınır.
- Kazanç payı X dB olan bir sistemin kararlılık bölgesini bulmak için $A=X$ ve $\phi=0$ olarak ayarlanmalıdır.
- Faz payı X^0 derece olan bir sistemin kararlılık bölgesini bulmak için $A=1$ ve $\phi=X$ olarak ayarlanmalıdır.

Kararlılık bölgesinin bulunabilmesi için aşağıdaki adımlar izlenmelidir:

- Denklem (11) kullanılarak RRB değeri bulunur.
- K_p ve K_i değerlerini λ ve ω 'ya bağlı olarak elde etmek için Eşitlik (16) ve (17) kullanılır.
- Belirlenen λ değerleri için RRB ve CRB çizimleri aynı $K_p - K_i$ düzleminde yapılır.
- Test noktalarından denemeler yapılarak kararlılık bölgesi bulunur.
- Kararlılık bölgeleri çizilir.

Sonuçlar

Bu bölümde, kesir dereceli kararsız ve zaman gecikmeli bir sistem, kesir dereceli PI denetleyici ile kontrol edilirken elde edilen kararlılık bölgeleri gösterilecektir. Bunun yanı sıra, kesirli integral derecesi (λ), zaman gecikmesi (θ), faz payı (ϕ), süreç transfer fonksiyonu kazancı (K) ve kesirli sistem derecesinin (α) kararlılık bölgesi üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Kararlılık bölgeleri, RRB ve CRB kullanılarak $K_p - K_i$ düzleminde çizilmiştir.

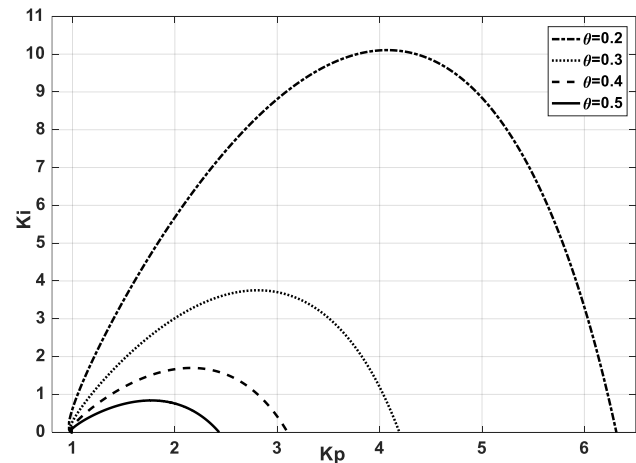


Şekil 2. Farklı kesirli integral dereceleri için kararlılık bölgeleri

Şekil 2'de kesir dereceli, kararsız ve zaman gecikmeli bir sistemin değişen kesirli integral derecelerine göre kararlılık bölgeleri gösterilmiştir. Bu bölgeler elde edilirken kesirli sistem derecesi $\alpha = 0,9$, kazanç payı $A = 1$, faz

payı $\phi = 0$, zaman gecikmesi $\theta = 0,2$, $T = 1$ ve süreç transfer fonksiyonu kazancı $K = 1$ olarak kabul edilmiş ve kesirli integral derecesi λ , 0 ile 0,9 arasında değiştirilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere, integral derecesinde meydana gelen artış sistemin kararlılık bölgesinde de artışa neden olmaktadır. Verilen değerler arasında en büyük kararlılık bölgesi kesirli integral derecesi 0,9'a eşit olduğunda elde edilmiştir. En küçük kararlılık bölgesi ise kesirli integral derecesi 0,3 olarak kabul edildiğinde elde edilmiştir. İntegralin derecesinin 1'den büyük olduğu durumlar için kararlılık bölgeleri elde edilememiştir. Bu yüzden λ 'nın, 0 ile 0,9 arasındaki değerleri göz önüne alınmıştır.

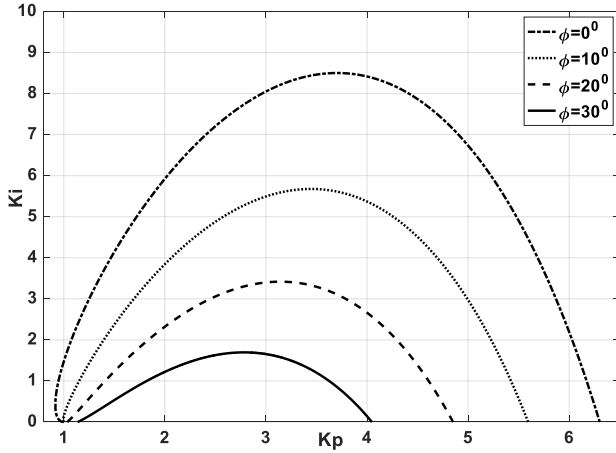
Şekil 3'te ise zaman gecikmesinin kararlılık bölgesi üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Zaman gecikmesinin sistemin kararlılık bölgeleri üzerindeki etkisini göstermek için diğer sistem parametreleri; kesirli sistem derecesi $\alpha = 0,9$, kazanç payı $A = 1$, faz payı $\phi = 0$, zaman sabiti $T = 1$, süreç transfer fonksiyonu kazancı $K = 1$ ve kesirli integral derecesi $\lambda = 0,9$ olarak kabul edilmiş ve farklı zaman gecikmesi değerleri için kararlılık bölgeleri elde edilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı üzere zaman gecikmesindeki artış kararlılık bölgesinde küçülmeye neden olmaktadır. Bu, zaman gecikmesi ile kararlılık arasındaki ters orantının bir neticesidir.



Şekil 3. Farklı zaman gecikmesi değerleri için kararlılık bölgeleri

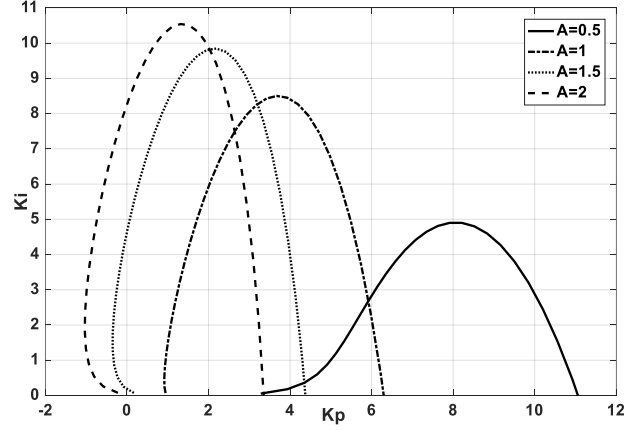
Kararlılık bölgeleri üzerine etkili olan bir diğer sistem parametresi ise faz payıdır. Şekil 4'te

sistemin değişen faz payı değerlerine karşılık kararlılık bölgelerinin değişimi gösterilmiştir. Kontrol sisteminin diğer parametrelerinden kesirli sistem derecesi $\alpha=0.9$, kazanç payı $A=1$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$, süreç transfer fonksiyonu kazancı $K=1$ ve kesirli integral derecesi $\lambda=0.9$ olarak kabul edilmiş ve faz payı 0 ile 30 derece arasında değiştirilerek kararlılık bölgelerinin değişimi incelenmiştir. Şekil 4'ten de anlaşılacağı üzere daha yüksek faz payı değeri sistem için daha küçük kararlılık bölgelerine neden olmaktadır. En büyük kararlılık bölgesi faz payı 0° iken elde edilirken, faz payı büyüdükçe kararlılık bölgesi küçülmüştür.



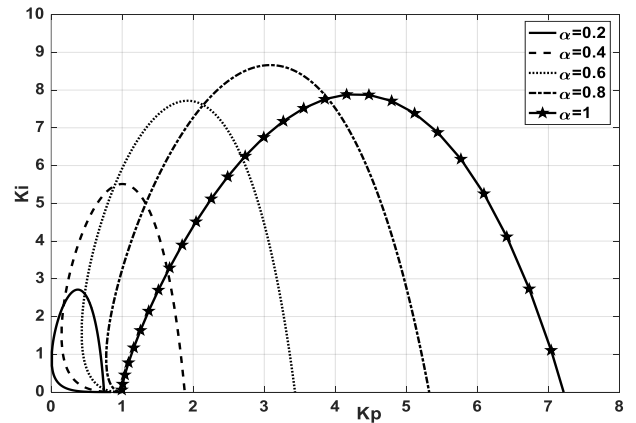
Şekil 4. Faz payının kararlılık bölgesi üzerine etkisi

Şekil 5'te kazanç payının kararlılık üzerine etkisi gösterilmiştir. Kontrol sisteminin diğer parametrelerinden kesirli sistem derecesi $\alpha=0.9$, faz payı $\phi=0.9$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$, süreç transfer fonksiyonu $K=1$ ve kesirli integral derecesi $\lambda=0.9$ olarak kabul edilmiş ve farklı kazanç payı değerleri için kararlılık bölgeleri elde edilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere kazanç payının artması sistemin kararlılık bölgesini de arttırmıştır. Ayrıca kazanç payı arttıkça kararlılık bölgesi $K_p - K_i$ düzleminde orijin noktasına doğru kaymıştır. En büyük kararlılık bölgesi kazanç payı değeri 2 alındığında elde edilmiş ve en küçük kararlılık bölgesi de kazanç payı değeri 0,5 alındığında elde edilmiştir.

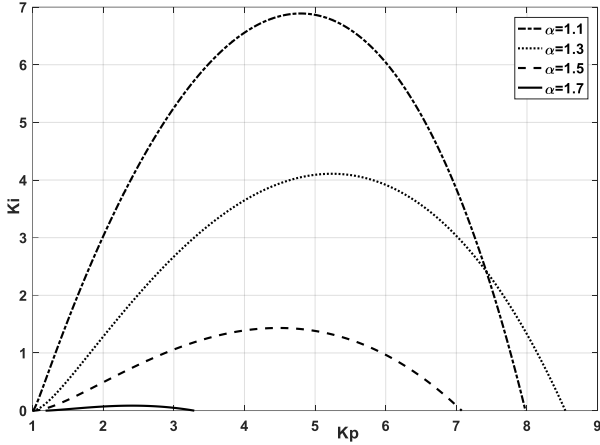


Şekil 5. Kazanç payının kararlılık bölgesi üzerine etkisi

Bu çalışmada kesir dereceli kararsız bir sistemin kontrol edilmesi ve kararlılık bölgelerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Dolayısıyla sistemin kesirli derecesinin de kararlılık bölgeleri üzerindeki etkisi incelenmiş olup, bu etki Şekil 6 ve Şekil 7'de gösterilmiştir. Kararlılık bölgeleri elde edilirken sistemin diğer parametreleri; kazanç payı $A=1$, faz payı $\phi=0$ zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$, süreç transfer fonksiyonu kazancı $K=1$ ve kesirli integral derecesi $\lambda=0.9$ olarak kabul edilmiştir. Şekil 6'dan görüldüğü üzere, $\alpha \leq 1$ için, kesirli sistem derecesi küçüldükçe kararlılık bölgelerinin belirgin bir şekilde küçüldüğü görülmektedir. Şekil 7'den, $\alpha > 1$ için, kesirli sistem derecesi büyüdükçe kararlılık bölgelerinin küçüldüğü gözlemlenmektedir. $\alpha > 1.7$ değerleri için kararlılık bölgeleri elde edilememiştir. Dolayısıyla α değerleri 0.2-1.7 arasında değiştirilmiştir.

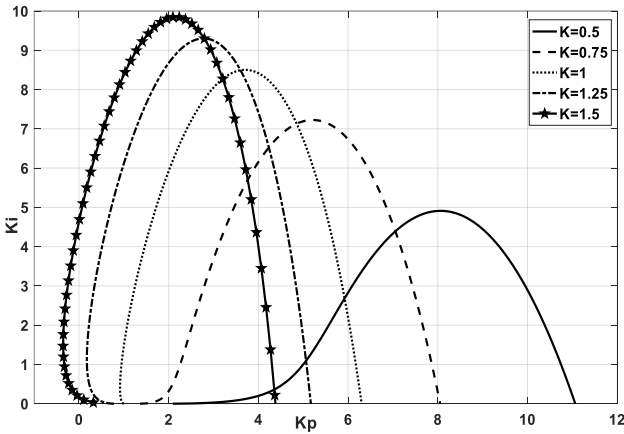


Şekil 6. Kesirli sistem derecesinin kararlılık bölgeleri üzerine etkisi



Şekil 7. Kesirli sistem derecesinin kararlılık bölgeleri üzerine etkisi

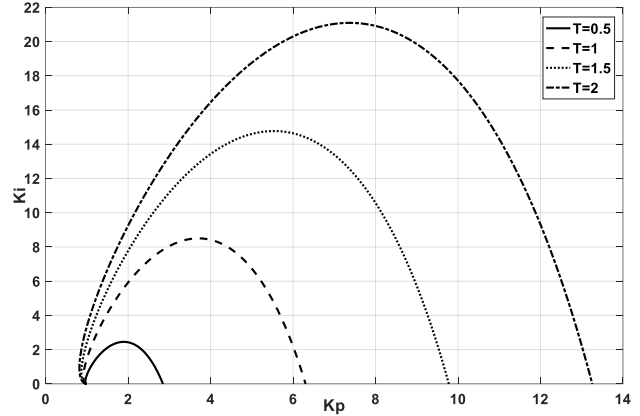
Şekil 8’de süreç transfer fonksiyonu kazancının kararlılık bölgesi üzerine etkisi gösterilmiştir. Şekilde kararlılık bölgeleri elde edilirken kontrol sisteminin diğer parametrelerinden kesirli sistem derecesi $\alpha=0.9$, kazanç payı $A=1$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$, faz payı $\phi=0$ ve kesirli integral derecesi $\lambda=0.9$ olarak kabul edilmiş ve süreç transfer fonksiyonu kazancı (K) 0.5 ile 1.5 arasında değiştirilerek kararlılık bölgelerinin değişimi incelenmiştir. Şekil 8’den görüldüğü üzere K değerinin artmasıyla beraber kararlılık bölgeleri de büyümektedir.



Şekil 8. Süreç transfer fonksiyonu katsayısının kararlılık bölgeleri üzerine etkisi

Şekil 9’da süreç transfer fonksiyonu zaman sabitinin kontrol sisteminin kararlılık bölgesi üzerine etkisi görülmektedir. Şekilde kararlılık bölgeleri elde edilirken kontrol sisteminin diğer parametrelerinden kesirli sistem derecesi $\alpha=0.9$, kazanç payı $A=1$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$, faz payı $\phi=0$ ve kesirli integral derecesi $\lambda=0.9$ olarak kabul edilmiş ve süreç transfer fonksiyonu zaman sabiti T 0.5 ile 2 arasında değiştirilerek kararlılık bölgelerinin değişimi gözlemlenmiştir. Şekilden görüldüğü üzere zaman sabitinin artışı kararlılık bölgesinin de büyümesini sağlamaktadır.

$\alpha=0.9$, kazanç payı $A=1$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, faz payı $\phi=0$, süreç transfer fonksiyonu kazancı $K=1$ ve kesirli integral derecesi $\lambda=0.9$ olarak kabul edilmiş ve süreç transfer fonksiyonu zaman sabiti T 0.5 ile 2 arasında değiştirilerek kararlılık bölgelerinin değişimi gözlemlenmiştir. Şekilden görüldüğü üzere zaman sabitinin artışı kararlılık bölgesinin de büyümesini sağlamaktadır.



Şekil 9. Zaman sabitinin kararlılık bölgeleri üzerine etkisi

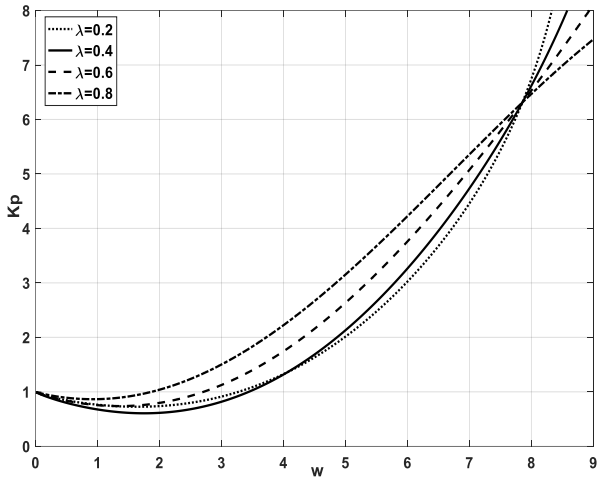
Kararlılık bölgelerinin $K_p - K_i$ düzleminde çizilmesi için bilinmesinde fayda olan bir nokta da kritik ω değerinin belirlenmesidir. Şekil 10’da ω değerinin artışına karşılık K_p değerlerinde meydana gelen değişim gösterilmektedir. Sıfırdan başlayan K_p değerlerinin bulunduğu ω değeri, kritik ω değerinin olduğu nokta olarak kabul edilir. Şekil 10 çizdirilirken diğer sistem parametreleri kesirli sistem derecesi $\alpha=0.9$, kazanç payı $A=1$, faz payı $\phi=0$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$ ve süreç transfer fonksiyonu kazancı $K=1$ olarak kabul edilmiştir. Şekil incelendiğinde kararlılık eğrilerinin kararlılık bölgesinin tamamladıkları kritik ω değeri, $\omega_{cr} \cong 7.86 \text{ rad/sn}$ olarak bulunur.

Birim Basamak Cevapları

Bu bölümde, kesirli dereceli PI denetleyici ve kesirli dereceli kararsız ve zaman gecikmeli bir sistem beraber kullanıldığında elde edilen

kararlılık bölgelerinden faydalanılarak birim basamak cevaplarının incelenmesine yer verilmiştir. Birim basamak cevaplarının çizilmesi için elde edilen kararlılık eğrilerinin ağırlık merkezine yakın noktalarından $K_p - K_i$ değerleri alınmıştır. Tablo 1’de farklı kazanç payı ve faz payı değerleri için kararlılık bölgelerinin ağırlık merkezlerine yakın noktalarından alınmış $K_p - K_i$ değerleri gösterilmiştir.

Kesir dereceli süreç transfer fonksiyonu ve kesir dereceli PI denetleyiciden oluşan kontrol sisteminin birim basamak cevaplarının elde edilebilmesi için Oustaloup (Oustaloup vd., 2000) yaklaşımı kullanılmıştır.



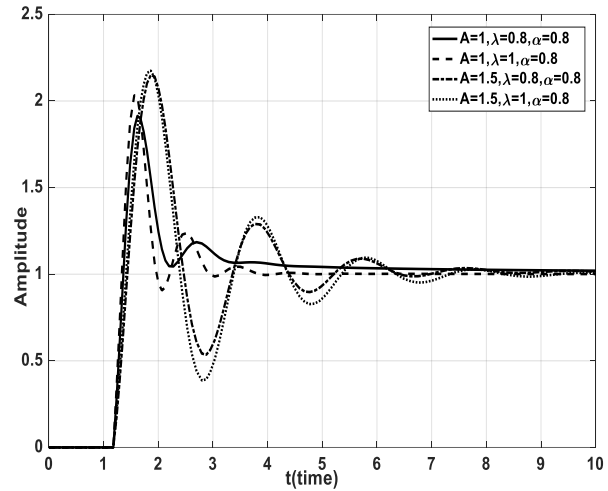
Şekil 10. K_p değerlerinin ω değerlerine göre değişimi

Tablo 1. Kararlılık eğrilerinin ağırlık merkezlerine yakın noktalarından alınan sistem değerleri

	$\lambda=0.8$ & $\alpha=0.8$		$\lambda=1$ & $\alpha=0.8$	
	K_p	K_i	K_p	K_i
$A=1$	2.75	3	3.5	4
$A=1,5$	1.5	4	2	5
$\phi = 15^\circ$	2.5	1.5	3	2.5
$\phi = 30^\circ$	2.4	0.75	2.6	1

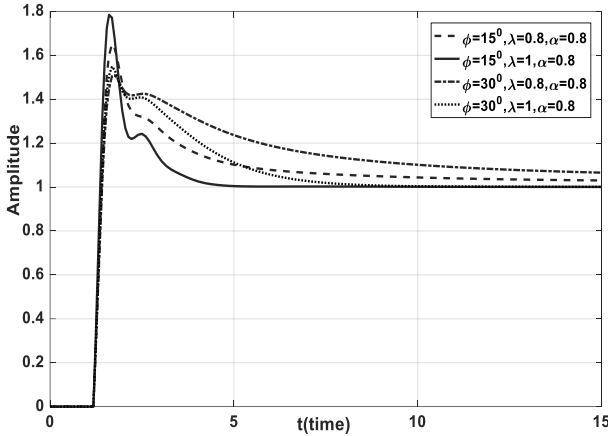
Şekil 11’de ise farklı kazanç payları, kesirli integral dereceleri ve sistemin derecelerine göre elde edilen birim basamak cevapları

gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere kazanç payındaki artış sistemin maksimum aşma miktarında belirgin bir artışa neden olmuş ve sistemin oturma zamanını uzatmıştır. Kazanç payının ve kesirli integral derecesinin düşük olduğu durumlarda aşma miktarının en az olduğu cevap elde edilmiştir. Kazanç payının 1,5 ve kesirli integral derecesinin ise tam sayı kabul edildiği durumda ($A = 1.5, \lambda = 1$) en fazla aşma elde edilmiş ve sistemin oturma zamanı da maksimumdur. Birim basamak cevapları çizdirilirken diğer sistem parametreleri, faz payı $\phi = 0$, zaman gecikmesi $\theta = 0.2$, zaman sabiti $T = 1$ ve süreç transfer fonksiyonu $K = 1$ olarak kabul edilmiştir.



Şekil 11. Farklı kazanç payı değerleri için birim basamak cevapları

Şekil 12’de farklı faz payı ve integral derecelerine bağlı olarak birim basamak cevapları verilmiştir. Kontrol sisteminin diğer parametreleri ise kazanç payı $A=1$, zaman gecikmesi $\theta=0.2$, zaman sabiti $T=1$ ve süreç transfer fonksiyonu kazancı $K=1$ olarak varsayılmıştır. Sistemin birim basamak cevaplarından da anlaşıldığı üzere faz payındaki artış sistemin aşma miktarının azalmasını sağlamıştır. Ancak faz payının artışı sistemin oturma zamanını arttırmıştır. Ayrıca kesirli integral derecesindeki artış da sistemin aşma miktarının artmasına neden olmuştur.



Şekil 12. Farklı faz payı değerleri için birim basamak cevapları

Sonuçlar

Bu çalışmada kesir dereceli kararsız ve zaman gecikmeli bir sistemin kesir dereceli PI denetleyici ile kontrol edilmesinde değişen kesir integral derecesi (λ), faz payı (ϕ), kazanç payı (A), zaman gecikmesi (θ) ve sistemin kesir derecesine (α) bağlı olarak kararlılık bölgeleri elde edilmiştir. Daha büyük kesirli integral dereceleri için daha büyük kararlılık bölgelerinin oluştuğu gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra sistemin faz payındaki ve zaman gecikmesindeki artışın sistemin kararlılık bölgesinin daralmasına neden olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca belirlenmiş faz ve kazanç payı değerlerinde kararlılık bölgeleri sistemin derecesi sıfıra yaklaştığında veya 1'den büyük değerler aldıkça küçülmektedir.

Kaynaklar

Bhisikar, K. K., Vyawahare, V. A. and Joshi, M. M. (2015) 'Design of fractional-order PD Controller for Unstable and Integrating Systems', in *Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, pp. 4698–4703. doi: 10.1109/WCICA.2014.7053507.

Bhisikar, K. K., Vyawahare, V. A. and Tare, A. V. (2014) 'Design of fractional-order PI controller for linear unstable systems', in *2014 IEEE Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science, SCEECS 2014*. doi: 10.1109/SCEECS.2014.6804523.

Caponetto, R. et al. (2010) *Fractional Order*

Systems: Modeling and Control Applications.

Chen, Y. Q., Petráš, I. and Xue, D. (2009) 'Fractional order control - A tutorial', *Proceedings of the American Control Conference*, (May 2014), pp. 1397–1411. doi: 10.1109/ACC.2009.5160719.

Cheng, Y. C. and Hwang, C. (2006) 'Stabilization of unstable first-order time-delay systems using fractional-order PD controllers', *Journal of the Chinese Institute of Engineers, Transactions of the Chinese Institute of Engineers, Series A/Chung-kuo Kung Ch'eng Hsueh K'an*, 29(2), pp. 241–249. doi: 10.1080/02533839.2006.9671121.

Hamamci, S. E. (2007) 'An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10), pp. 1964–1969. doi: 10.1109/TAC.2007.906243.

Hamamci, S. E. (2008) 'Stabilization using fractional-order PI and PID controllers', *Nonlinear Dynamics*, 51(1–2), pp. 329–343. doi: 10.1007/s11071-007-9214-5.

Hamamci, S. E. and Koksall, M. (2010) 'Calculation of all stabilizing fractional-order PD controllers for integrating time delay systems', *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier Ltd, 59(5), pp. 1621–1629. doi: 10.1016/j.camwa.2009.08.049.

De Keyser, R., Muresan, C. I. and Ionescu, C. M. (2015) 'A novel auto-tuning method for fractional order PI/PD controllers', *ISA Transactions*. Elsevier, 62, pp. 268–275. doi: 10.1016/j.isatra.2016.01.021.

Luo, Y. and Chen, Y. Q. (2009) 'Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems', *Automatica*. Elsevier Ltd, 45(10), pp. 2446–2450. doi: 10.1016/j.automatica.2009.06.022.

Monje, C. A. et al. (2008) 'Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications', *Control Engineering Practice*, 16(7), pp. 798–812. doi: 10.1016/j.conengprac.2007.08.006.

Monje, C. A. et al. (2010) *Fractional-Order Systems And Control Fundamentals And Applications*. London: Springer.

- Oustaloup, A. *et al.* (2000) 'Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis', *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1), pp. 25–39. doi: 10.1109/81.817385.
- Oustaloup, A. *et al.* (2008) *An overview of the CRONE approach in system analysis, modeling and identification, observation and C*, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. IFAC. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.3668.
- Padula, F. and Visioli, A. (2015) *Advances in robust fractional control*, *Advances in Robust Fractional Control*. doi: 10.1007/978-3-319-10930-5.
- Podlubny, I. (1999) 'Feactional Differential Equations', *Mathematics in Science And Engineering*, 198.
- Ruszewski, A. (2008) 'Stability regions of closed loop system with time delay inertial plant of fractional order and fractional order PI controller', *Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences*, 56(4), pp. 329–332.
- Sabatier, J., Agrawal, O. P. and Machado, J. (2007) *Advances in fractional calculus: Theoretical developments and applications in physics and engineering*. doi: 10.1007/978-1-4020-6042-7.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1993) *Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon.
- Sondhi, S. and Hote, Y. V. (2015) 'Fractional-order PI controller with specific gain-phase margin for MABP control', *IETE Journal of Research*. Taylor & Francis, 61(2), pp. 142–153. doi: 10.1080/03772063.2015.1009395.
- Tan, N. (2005) 'Computation of stabilizing PI and PID controllers for processes with time delay', *ISA Transactions*, 44(2), pp. 213–223. doi: 10.1016/S0019-0578(07)90000-2.
- Tan, N. *et al.* (2006) 'Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus', *Energy Conversion and Management*, 47(18–19), pp. 3045–3058. doi: 10.1016/j.enconman.2006.03.022.
- Tan, N., Kaya, I. and Atherton, D. P. (2003) 'Computation of stabilizing PI and PID controllers', in *2003 Ieee International Conference on Control Applications*. Istanbul, pp. 543–554. doi: 10.1080/00207720600783785.
- Wang, J. C. (1987) 'Realizations of generalized warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines', *Electrochemical Society*, 134, pp. 1915–1920.

Stability boundary locus for fractional unstable processes with fractional-order PI controllers

Extended abstract

Fractional derivative and fractional integral are defined as general form of classical integer-order derivative and integral. From its birth to now, the attention for fractional calculus has been increased and different studies have been done. Nowadays, the application of fractional calculus have recently found a wide area in control theory as a result of advantages fractional derivative order (μ) and fractional integrator order (λ) provide. As a result of that increase in fractional calculus applications, it has been very important to design a satisfying fractional controller for the systems. However, it still has difficulties to design a fractional-order controller in the time domain. So, it has generally been preferred to design fractional-order controller in the frequency domain. In the process of designing a controller in the frequency domain, gain margin, phase margin, gain crossover frequency and phase crossover frequency are the most used frequency domain specifications. On the other hand, designing a fractional-order controller in the frequency domain also have some disadvantages. For instance, all the controller design methods used in the time domain cannot be applied in the frequency domain to design fractional-order controller. So, it is needed to find new methods. This study aims to find a solution to stabilize a fractional-order unstable system with time delay under the control of fractional-order PI controller. Also, it is aimed to show the effects of phase margin, gain margin, time delay, fractional integral order, and the fractional order of the system on the stability regions.

To see the effects of the fractional integral order on stability region, the fractional integral order (λ) has been varied in a range of [0.3-0.9]. It has been observed that, higher fractional integral order results in a wider stability region in this range. The biggest stability region is obtained when fractional integral order equals to 0,9 and the smallest one for fractional integral order equals to 0,3.

For the effect of the time delay on stability region, the value of the time delay has been varied between 0.2 and 0.5. It has been obtained that, there is an inverse proportion between the time delay and the stability area. The smaller time delay ends up with a wider stability region. On the other hand, higher time delay value causes a smaller stability region.

As for time delay, higher phase margin also has a negative effect on stability region. In a range of [0-30] for phase margin, the biggest stability region has been obtained when it is equal to 0, but the smallest stability region has been obtained when phase margin equals to 30.

It has been observed that, the time constant and the gain of the process also have direct proportion with the stability regions of the control system. The higher time constants or process gains provide larger stability regions.

However, for the gain margin, a positive effect on stability regions has been seen. An increase in the phase margin provides a wider stability region. But it is also seen that, with higher gain margin, the range of the K_i values in the stability region has been increased but, the range of K_p values in the stability region has been decreased.

The paper also aims to show the effect of the fractional process order (α) on the stability region. For α values smaller than 1, it has been observed that higher α values provide bigger stability regions, but otherwise, smaller α values causes a smaller stability region. On the other hand, it has been observed that, for α values bigger than 1, an increase on the fractional process order has a negative effect on the stability region.

The results showed that, for the fractional-order unstable system with time delay under the control of the fractional-order PI controller, an increase in the phase margin, time delay, and α values bigger than 1 causes constriction in the stability regions. On the other hand, an increase in the gain margin, α values smaller than 1, time constant, process gain and the fractional integral order provides larger stability regions.

Keywords: Fractional-order PI controllers, fractional-order systems, unstable systems, stability regions, gain margin, phase margin