Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
Vol:47 No:2 Sayfa: 623-666
http://dergipark.gov.tr/cuefd

Prospective Mathematics Teachers' Strategies for Evaluating the Accuracy of Proofs in the Field of Analysis[¥]

Muhammet DORUK[a*], Abdullah KAPLAN[b]

[a]Hakkari Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Hakkâri/Türkiye
[b]Atatürk Üniversitesi KKEF, Erzurum/Türkiye

Article Info

DOI: 10.14812/cuefd.358017

Article history:
Received 27.11.2017
Revised 16.06.2018
Accepted 26.06.2018

Keywords:
Mathematical proof,
Proof evaluation strategies,
Prospective mathematics teachers,
Analysis.

Abstract

The purpose of this study is to reveal how prospective mathematics teachers evaluate proofs that are proved by others in the field of analysis. In this regard, skills of prospective teachers to evaluate the accuracy of arguments were presented in various ways, and strategies they use during the evaluation process were examined. This study adopted as a qualitative approach is a case study. The sample consisted of eight prospective teachers studying primary school mathematics teaching in their third year at a state university in Turkey. The data were collected with the help of task-based interviews on subjects of functions, sequences, limit and derivatives. In the study, it was found that prospective teachers were successful at choosing valid proofs, whereas they had difficulties in identifying invalid proofs. It was determined that especially some prospective teachers were not able to distinguish proving methods, they were not aware of the power of counterexample, and they considered inductive arguments and, even if they were not correct, they accepted deductive arguments as valid proofs. It was found that prospective teachers used three strategies while evaluating proofs. These were structural examination, argument examination and authoritarian examination.

Matematik Öğretmeni Adaylarının Analiz Alanındaki İspatların Doğruluğunu Değerlendirme Stratejileri

Makale Bilgisi

DOI: 10.14812/cuefd.358017

Makale Geçmişi:
Geliş 27.11.2017
Düzeltme 16.06.2018
Kabul 26.06.2018

Anahtar Kelimeler:
Matematiksel ispat,
İspat değerlendirme stratejileri,
Matematik öğretmeni adayı,
Analiz.

Öz

Çalışmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında başkası tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini ortaya çıkarmaktır. Bu amaçla öğretmen adaylarının, kendilerine çeşitli tiplerde sunulan argümanların doğruluklarını değerlendirme sürecinde kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Nitel araştırma yaklaşımın benimsendiği çalışma bir durum çalışmasıdır. Araştırma grubunu Türkiye'de bulunan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfında öğrenim gören sekiz öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmanın verileri fonksiyonlar, diziler, limit ve türev konularında hazırlanan etkinlik temelli görüşmeler yardımıyla toplanmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının geçerli ispatları seçmede başarılı iken geçersiz ispatları belirlemede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Özellikle bazı öğretmen adaylarının ispatlama yöntemlerini ayırt edemedikleri, ters örneklerin gücünün farkında olmadıkları, tümevarımsal argümanları ve yanlış da olsa dedüktif argümanları geçerli ispat olarak gördükleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken genel olarak üç strateji kullandıkları belirlenmiştir. Bunlar; yapısal inceleme, argüman incelemesi ve otoriter incelemedir.

[¥] This study was generated from the doctoral dissertation of the first author.

[*]**Author:** mdoruk20@gmail.com

Introduction

The subject matter of mathematics is abstract phenomena such as numbers, figures, sets, functions and spaces, and operations among these. Mathematicians examine the structures of these entities and uncover generalizations related to these (Altun, 2013). The procedures followed to make generalizations are specific to mathematics and they are called proving. A mathematician attempts to prove an idea concerning the general and this idea is valid for all samples (Altun, 2014). Proof is an effort to put across the accuracy (or inaccuracy) of a rule, statement or conclusion by showing adequate evidence (Yıldırım, 2014). Proofs obtain whether a mathematical process is true or false (İskenderoğlu, Baki and Palancı, 2011). Mathematical proof is a mathematical activity in which it is asked from the person demonstrating the proof to present previous information such as hypotheses, axioms, definitions, apply theorems until reaching the desired result, and apply deduction rules like recalling previously obtained facts (Weber, 2005). Mathematical proof is utilized to validate a result, communicate to and convince others of the accuracy of this result, discover a result and place these results in a deductive system (Almeida, 2003). Stylianou, Chea and Blanton (2006) stated that proof, which is a logical argument enabling someone to validate a claim and convince himself and others of its accuracy, is considered to have a prominent role in mathematics. Similarly, Mejia-Ramos and Inglis (2009) stated that proof is a special argumentation activity. The so-called term of argument is defined as reason or reasons to support or object to a proposal or idea, or the process of explaining these reasons (Cambridge University, 2013). Argumentation as a phenomenon is a set of logical arguments to support a theory, act, idea (Oxford University, 2010), as well as a process originated from the logical combination of one or more arguments (Douek, 1998). The concept of argument is also used as a structured recording of the argumentation process (Rumsey, 2012). The first person to discuss argument as a phenomenon was Stephen Toulmin, who is among the founders of informal logic. The six-component pattern defined by Toulmin for the structure of an argument has been known as the Toulmin model over time. The Toulmin model is a productive tool for identifying, analyzing and comparing structures of arguments and proofs for students (Boero et al., 2010; Pedemonte, 2007, 2008; Rumsey, 2012). According to Toulmin (2003), there are three major parts as data, claim and warrant related to each other in every well-built logical argument. Three auxiliary components as qualifier, backing and rebuttal can be added to arguments.

Ko (2010) indicated that the primary purpose of proofs and counterexamples is to demonstrate the accuracy or inaccuracy of a theorem. For Ko and Knuth (2009), proving and refuting are important skills in advanced mathematics since they help show whether theorems are valid or not, as well as the reason behind the result. As it can be understood from this point, both proving and refuting a theorem is an important activity in mathematics and they have an important role in development of mathematics (Lakatos, 1976). Refutation of mathematical theorems is generally achieved with the help of a counterexample (Altun, 2014; Lampert, 1990-; Yasuhiro, 1991). As opposed to other fields of science, counterexamples have a definition and status in mathematics (Whiteley, 2009). Refutation via counterexample is shown among proving methods in most sources (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel and Sabuncuoğlu, 1998; Altun, 2014; Irmak, 2008). A mathematical proof demonstrates the accuracy of a theorem for all conditions (Stylianides and Stylianides, 2009), whereas a counterexample indicates that the existing theorem is not accurate (Akkaş et al., 1998; Irmak, 2008). Similarly, Zaslavsky and Ron (1998) stated that counterexamples have a much more powerful position than other examples and underlined that even one counterexample is enough for ruining the overall results, whereas several examples that are presented as supportive and corroborative are not adequate. It is not enough to provide only one example to demonstrate the accuracy of a theorem while proving substantive theorems. This is because even though a theorem is validated for one example, it may not be validated for other examples (Akkaş et al., 1998).

Even though the importance of proof for mathematics and mathematics education is emphasized by researchers, it is found that university students and mathematics teachers fail to construct proofs (Cusi and Malara, 2007; Doruk and Kaplan, 2015; Ko and Knuth, 2009; Weber, 2001), produce counterexamples (Riley, 2003; Zaslavsky and Peled, 1996) and evaluate the accuracy of proofs constructed by others (Alcock and Weber, 2005; Doruk and Kaplan, 2013; Güler and Ekmekçi, 2016; Knuth, 2002; Martin and Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Selden and Selden, 2003; Uygan, Tanışlı and Köse, 2014). Researchers, who determined failure of students, focused on the proving process. They attempted to identify factors affecting the proving process of students. In this regard, Weber (2001) underlined that it is necessary to examine the proving process of students in order to understand mistakes they make while constructing a proof.

One of the reasons behind undergraduate students having difficulties in proving and counterexamples is their incorrect perception and lack of complete knowledge about proving and counterexamples. According to Weber (2001), one of the difficulties students have in proofs for subjects in advanced mathematics is not having an accurate idea about the components of mathematical proofs and their characteristics. It was ascertained that students acknowledge the proof of a general theorem when it is validated with one or several examples (Barkai, Tsamir, Tirosh and Dreyfus, 2002; Knuth, 2002; Martin and Harel, 1989; Morris, 2002; Weber, 2001), and when it is in a traditional and ritualistic format (Harel and Sowder, 1998). It was also found that some students have difficulties even in identifying whether a statement is accurate or not (Gibson, 1998; Goetting, 1995; Ko and Knuth, 2009; Riley, 2003). It was determined that some of the students consider a valid counterexample produced for a statement as an exception of this statement and still think that the statement is accurate (Williams, 1979). Additionally, research that was conducted for process of students' proof evaluation came through interesting results. Several students in these researches evaluated both inductive and deductive arguments produced for a statement as valid proofs (Martin and Harel, 1989). Moreover, some undergraduate students stated that both the true counterexample and inaccurate proof produced for a statement were valid (Goetting, 1995). Most students acknowledge that inaccurate proofs produced in a deductive way were valid (Segal, 2000). It was found that while evaluating the proofs constructed by others, undergraduate students make a superficial examination, focus on unnecessary details instead of overall logical gaps, and have a result-oriented approach (Doruk and Kaplan, 2013; Selden and Selden, 2003).

When studies examining process of undergraduate students' proof evaluation are reviewed, it is seen that they have preferred mostly algebra (Güler and Ekmekçi, 2016; Knuth, 2002; Morris, 2002; Selden and Selden, 2003; Weber, 2008) in these studies. It was observed that research about the field of analysis is in limited numbers. Additionally, it was seen that the conducted research was rather in the subject of limit (Alcock and Weber, 2005; Doruk and Kaplan, 2013). It was established that the number of studies about what students pay attention to and which strategies they pursue in the process of students' proof evaluation, is very small. In the research conducted by Ko (2010), which is among these studies, it was found that the strategies used by students to evaluate proofs and counterexamples are paying attention to proof/counterexample methods, line-by-line examination, and example-based line-by-line examination.

Producing valid arguments or proofs and criticizing arguments are an integral part of mathematics. If reasoning skills are not provided to students, mathematics becomes a process that consists merely of following a sequence of operations and imitation of examples without considering their meanings (Ross, 1998). In this regard, prospective mathematics teachers, who will be responsible for mathematics teaching in the future, should have knowledge about how to evaluate the accuracy of arguments presented to themselves. In order for prospective teachers to acquire this skill, firstly, it is important to reveal what kind of strategies they use during the process of argument evaluation. Research may be conducted with the help of such studies in order to develop appropriate strategies for students. In this study, it is aimed to reveal what kind of strategies prospective mathematics teachers use by examining the process of how they evaluate proofs in the field of analysis.

Method

This is a case study where a qualitative research approach was adopted. The case study involves the study of an issue explored through one or more cases within a bounden system (i.e., setting, a context) (Creswell, 2007). In other words, it is an in-depth description and analysis of a limited system (Merriam, 2013). In this study, it is aimed to reveal the process of evaluating proofs in the field of analysis carried out by prospective teachers.

Participants

The participants of this study consisted of a total of eight prospective mathematics teachers (five of them are female, the remaining are male) who were studying in their third year of primary school mathematics teaching at a state university located in the Eastern Anatolia Region of Turkey in the spring semester of the academic year of 2013-2014. Additionally, the pilot study was conducted with a total of 10 prospective teachers who were studying in their last year of primary school mathematics teaching at the same university in the fall semester of the academic year of 2013-2014.

In the pilot study, draft data collection tools were used. The interviews with the prospective teachers were made in the conditions that were planned in the actual study. Through the pilot study, information on the functionality of the data collection tools, the validity of the method of the study, the possible difficulties encountered in the study, and possible outcomes were obtained. At the end of the pilot study, the data collecting from pilot study were discussed with six expert academicians. Experts indicated that the data collection tool and method were appropriate. Experts stated that the number of participants was high and that the number of participants should be reduced in order to achieve the depth in this qualitative research. As a result of the pilot application, an evaluation of the data collection tool and method was carried out and the number of participants were reduced.

While selecting the participants, the purposive sampling method of criterion sampling was used. A basic explanation of the criterion sampling method is studying situations that meet a set of predetermined criteria. The criterion or criteria referred to here may be established by the researcher or a previously prepared criteria list may be used (Yıldırım and Şimşek, 2011). The logic of criterion sampling is to study and observe all situations that meet some predefined significance criteria (Patton, 2014). In this study, it was aimed to investigate the types of strategies used and points considered by prospective teachers while proofs are evaluated in the field of analysis. In this regard, while selecting the sample, the prospective teachers were considered to have knowledge about what mathematical proof is, how it is applied, how an argument should be defended or the existence and use of counterexamples for refuting in mathematics. They were also required to have taken Abstract Mathematics, General Mathematics, Analysis-I, Analysis-II and Analysis-III courses in which analysis topics are taught and passed these courses successfully. The concepts of functions, sequences, limit, continuity and derivative were taken into account as the basic concepts of analysis. In order to obtain more detailed information on selection of the sample, the students' success levels in the courses that activities are related to (Analysis-I, Analysis-III, Abstract Mathematics) and cumulative grade point average (CGPA) were examined. The reason for not selecting the prospective teachers who were studying in the fourth grade as a research group is that the possibility of external factors (future anxiety, KPSS etc) originating from prospective teachers is more likely to affect negatively the research process than the third class prospective teachers. This was clearly seen in the pilot study with fourth grade prospective teachers. Prospective teacher had difficulty in having time to pilot study because of their university courses, KPSS courses and test exams. For this reason, it was observed that fourth grade prospective teachers had difficulty in focusing on the work. So, third grade prospective teachers were chosen for this study between third grade and fourth grade prospective teacher who were matching the criteria of the study.

As a result of the evaluations, the students were divided into two groups based on success in related courses and CGPAs. The first group consisted of students with medium success levels. Four easily accessible students were selected on a voluntary basis among the students with medium success levels. The CGPAs of these students range from 2.5 to 3.0 out of 4. Some students with medium success levels had passed the courses (Abstract Mathematics, Analysis-I, Analysis-III) that the research activities are related to first time and some took these courses again and passed with medium success. The other group consisted of students with high levels of success. The CGPAs of the students in this group range from 3.0 to 4.0 out of 4 and they passed the related courses with high success the first time. Four easily accessible students were also included in the group on a voluntary basis. The students in this group were the most successful students in the branch they studied. For example, the group included students who passed all courses with the highest letter grade (AA) and successfully completed the four-year branch in three years.

The prospective teachers participating in the study used nicknames instead of real names. The nicknames of the prospective teachers with medium levels of academic success constituting the first group were Barış, Belma, Bilge and Buse based on the order of success. The nicknames of the prospective teachers with high levels of academic success were Adem, Ahu, Aysun and Aziz based on the order of success.

The reason for studying two groups with different levels of success in the study was to ensure that different views are obtained. In this regard, it was thought that various and in-depth information on the subject could be obtained from the prospective teachers. The logic in using purposive sampling is to select rich situations in scope of information in order to make the study go deeper. Rich situations in scope of information are situations in which the researcher can obtain as much information as possible from the point of view of the purpose of the research. Studying rich situations in scope of information provides an in-depth understanding rather than empirical generalizations (Patton, 2014). Furthermore, selecting participants with the purposive sampling method significantly increases the transferability of qualitative studies (external validity) with detailed description (Yıldırım and Şimşek, 2011). Studying groups of students with different levels of success based on certain criteria is a common practice in the relevant literature (Sarı et al., 2007; Weber, 2001, 2008, 2009). One of the reasons for not including students with low levels of success was that such students tended to use uncomfortable expressions to analyze in pilot practice.

Instrument

Four task-based interviews were used to identify proof evaluation skills in the analysis of the prospective teachers. The interviews were carried out four times with prospective teachers individually. The interview is a communication process that is conducted orally between at least two people and provides in-depth information about the question or topic being searched for in the survey (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz and Demirel, 2012). Task-based interview which is one of the kind of interviews have importance both as research instruments and as potential research-based tools for assessment and evaluation. They offer the possibility of obtaining information from students that bears directly on classroom goals and can help answer research questions central to the educational reform process (Goldin, 1997). A clinical task-based interview also used in this study can be seen as a situation where the interviewer interviewee interaction on a task is regulated by a system of explicit and implicit norms, values, and rules (Koichu and Harel, 2007). Interviews were carried out in order to elucidate the processes of evaluation about functions, sequences, limits and derivatives. The study included a total of seven proof evaluation activities including an invalid proof made by the direct proof method, inductive argument, and deductive argument for a false statement in addition to the valid proofs made by direct, contrapositive, contradiction, and counterexample methods. As the prospective teachers had studied the relevant courses in advance, they were familiar with the statements used in the study. In these activities, it was aimed to find out how the prospective teachers evaluated the correctness or wrongness of proofs made by someone else who is an important part of the proof process. The reason for not including proofs made by the inductive proof method was that the inductive proof method is easy to notice because of its inherent steps. Therefore, it is more likely that the method of proof used is determined by only looking at the image of the proof without conducting a detailed review. After the evaluation of the proofs, the prospective teachers were asked to indicate arguments with one of the options "true", "partly true" and "false" and write down the reasons for their decisions. The option of “partly true” was used in the study to get information about all preferences of prospective teachers. That is why we did not present only two options like “true or false” to them

Within the scope of validity studies in development of data collection tools, six expert academicians were consulted, and the pilot scheme was prepared. These academicians serve as associate professor and assistant professor in the field of primary math and secondary science and mathematics education at a state university. In line with the opinions received from the experts, the typographical errors and mathematical mistakes in the form were corrected. Table 1 provides information about the arguments for statements used in the study.

Table 1.
The Properties of the Arguments to Show Accuracy or Inaccuracy of the Statements Used in the Study.

Subjects of the interviews	Statements	Properties of the arguments used for the statements
Functions	*Let $f: A \to B$ and $g: B \to C$ be a function. If f and g are injective functions, then gof is also an injective function.*	The argument constructed to show the accuracy of the statement by direct proof method is a valid proof.
	Let $f: A \to B$ be a function and $D \subset A$. Then, there is $f^{-1}(f(D)) \subset D$.	The argument constructed to show the accuracy of the false statement is an invalid deductive argument.
Sequences	*If a sequence has limit, the limit is unique.*	The argument constructed by contradiction method is a valid proof.
	Let (s_n) be a reel number sequence. If (s_n) has any accumulation point, it is convergent.	The argument constructed to show inaccuracy of the statements is a valid counterexample.
Limit	*Suppose that $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for all x in some open interval containing a except possibly at a itself. If $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, then L $\lim_{x \to a} f(x) = L$.*	Valid proof of this theorem is transformed to invalid argument by changing most important key idea in its valid proof.
Derivative	Let $A \subset R$, $a \in A$ and $f: A \to R$. *If f function is not continuous at the point a, it is also not differentiable.*	The argument constructed to show the accuracy of the statement by contraposition method is a valid proof.
	The derivative of every odd function is an even; and derivative of every even function is an odd function.	The argument constructed to show accuracy of the statement with only one pair of examples is an inductive and mathematically invalid argument.

Data Collection Procedure

Data from the study were collected in four weeks with the help of task-based interviews. Before starting the interviews with the prospective teachers, they were informed about the study. It was stated that the study would be carried out on a voluntary basis. Furthermore, it was stated that the names of the prospective teachers would be kept secret and nicknames would be used. The study was planned to be recorded on video, but based on the information obtained from the pilot study, the study was recorded on audio because the prospective teachers might have been uneasy about this situation and might not be able to pay attention to the study.

The interviews took place in an environment where the researchers and prospective teachers were believed to be not affected by external factors. The prospective teachers were asked to think aloud during the interviews. The prospective teachers often expressed their thoughts aloud. During the interviews, the researcher tried to avoid guiding the prospective teachers. Questions were asked frequently in order to understand the thoughts of prospective teachers. Before the interviews began, it was stated that the questions asked by the researcher were to understand what they thought, and these were not strictly guiding. The prospective teachers were also asked not to wait for confirmation from the researcher or ask questions about it.

Analysis of the Data

The prospective teachers were asked to evaluate the proofs made by someone else. They were asked to think aloud while making an assessment. The researcher tried to reveal their thoughts by asking questions to the prospective teachers when necessary. After the evaluation of the proofs, the prospective teachers were asked to indicate their arguments with one of the options "true", "partly true" and "false" and write down the reasons for their decisions. The study evaluated the thoughts of the prospective teachers when evaluating the proofs and the answers to the questions of the researcher and their reasons together. The analysis of the data obtained from the prospective teachers was conducted by use of content analysis. The focus was on the strategies that the prospective teachers used while evaluating the proofs.

Result

In this study, It was determined that the prospective teachers often used multiple strategies while evaluating the proofs. As a result of the content analysis in the study, their strategies were generally grouped into three categories: argumentation, structural examination and authoritarian examination. Additionally, many sub-categories were identified under these categories. Table 2 shows the strategies used by the prospective teachers to evaluate proofs that were made by others in the field of analysis.

Table 2.
The Strategies Used by Prospective Teachers to Evaluate Proofs That Are Proved by Others in the Field of Analysis

Strategies	*f*	*Indicators*
Argumentation examination	*47*	*Prospective teachers check proofs with line by line. They focus on local arguments in proofs. They elaborate whether there are computational mistakes in the lines of proofs and control the correctness of the warrants between lines. They consider key expressions which play important role in proofs and which carry the data obtained from hypothesis of theorem to next stage in the proof. By means of key expressions, the information obtained from the hypothesis of the theorem is made ready to be used in reaching the theorem's conclusion by incorporating into the conceptual understandings.*
Structural examination	*74*	*Prospective teachers evaluate proofs without looking content of the proofs. They do not question the truth or relationship between lines of the proofs. They judge the validity of the proofs from the outside by looking their structural characteristics. Structural examination strategies consist of superficial and proof method strategies. Prospective teachers using superficial strategies take into account whether formal definitions and theorems are used in proofs. They also focus on how proofs begin and whether conclusion of theorem is reached with result oriented approach. Some prospective teachers consider proofs method or structure of arguments when they evaluate proofs. To illustrate, while some prospective teachers accept inductive arguments as a valid proof, some of them do not accept proofs constructed by different proof method that they learnt.*
Authoritarian examination	*9*	*Prospective teachers don't try to question arguments in proofs or don't use structural examination. If evaluated proofs were memorized previously or they are familiar with them, they try to remember. They recall symbols or expressions which are similar with proofs they learnt before. Some prospective teachers also try to use different proofs that they know in evaluating proofs. Decisions given by prospective teachers are closely related to level of remembering proofs constructed by their lecturers or memorized by prospective teachers.*

When strategies used by prospective teachers to evaluate proofs were examined, it was found that there were 15 different approaches under three categories in order to evaluate the accuracy of the proofs. Throughout the study, 130 strategies of evaluating proof done by prospective teachers were identified. While evaluating the proofs, prospective teachers generally followed argument examination, structural examination and authoritative examination strategies. Structural examination strategy is divided into two in itself as superficial examination and method of proof. It was found that 74 of the 130 approaches by prospective teachers in overall research was structural. One of the mostly preferred strategy in this research by the prospective teachers was the examination of local arguments. They used this strategy 47 times. Nine of the proof evaluation strategies used by prospective teachers were related to authoritative information. These strategies were presented in the following sections.

The Proof Evaluation Strategies Used in Functions

The prospective teachers were first presented with the valid proof of the theorem "*Let $f: A \to B$ and $g: B \to C$ be a function. If f and g are injective functions, then gof is also an injective function.*", which was constructed with the method of direct proving. It was observed that the strategies used by the prospective teachers were clustered under three categories and six subcategories. The strategies that were used by prospective teachers to evaluate the proof, and decisions they made about the accuracy of the argument are presented in Table 3.

Table 3.
The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluating the Proof

Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Operational mistakes	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Structural examination	Formal definition of injective function	✓					✓	✓	✓
	Using hypothesis and finding conclusion of the theorem				✓	✓		✓	
	Beginning of the proof		✓				✓		
	Using hypothesis of the theorem		✓						✓
Authoritarian examination	Accordance with the proof learnt								✓
Decisions		True	True	True	True	True	True	True	True

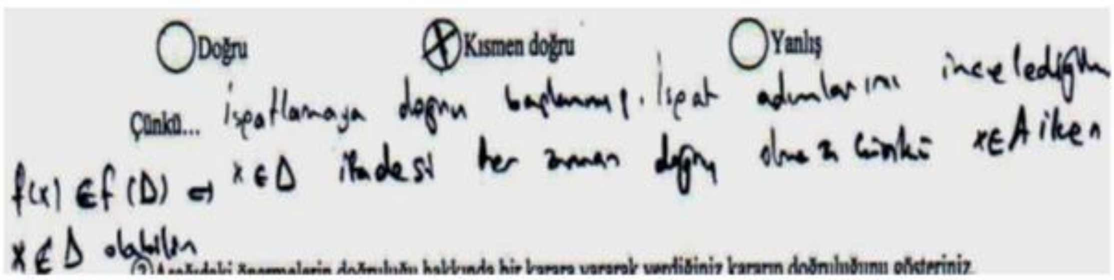
All prospective teachers stated that the theorem was proved accurately. It was found that most prospective teachers (except Belma) questioned whether there was an operational mistake in the content of the proof. These prospective teachers paid attention to the reasons for transition between the steps of the proof, as well as not having any operational mistakes in these steps. Half of the prospective teachers (Ahu, Bilge, Buse, Belma) analyzed whether the definition of injective function was used in the proof. Three of the prospective teachers (Aysun, Barış, Buse) took into consideration that conclusion was reached by using the hypothesis of the theorem in its proof. Two prospective teachers (Adem, Belma) specifically paid attention to the use of hypothesis of the theorem in the proof. Two prospective teachers (Adem, Bilge) also focused on how the proving process started. While evaluating the proof, Belma considered whether this proof was in accordance with the proofs she had previously learnt.

The prospective teachers were presented with a deductive argument from a false statement about functions. They were asked to examine the arguments and make a decision about its accuracy. The prospective teachers validated the false statement "Let $f: A \to B$ be a function and $D \subset A$. Then, there is $f^{-1}(f(D)) \subset D$.". The argument "$f(x) \in f(D) \Longrightarrow x \in D$" in this argumentation is an argument which is not accurate for every condition. The strategies that were used by the prospective teachers were analyzed. It was observed that these strategies were clustered under three categories and six subcategories. The strategies that were used by the prospective teachers to evaluate the presented argumentation are given in Table 4.

Table 4.
The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluation of the Deductive Argument Constructed for False Statement

Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Warrant control	✓	✓	✓	✓	✓			
Structural examination	To reach the conclusion from the hypothesis	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	Using formal definitions	✓	✓			✓			✓
Decisions		True	Partially true	True	Partially true	True	True	True	True

When Table 4 is examined, it is found that Aysun and Adem picked out that the argument was not accurate. They indicated that the argument was partly accurate. Other prospective teachers stated that the argument in question was accurate and convincing. When the strategies used to evaluate the argument were examined, it was determined that the beginning and the end of the argument were effective on the decisions of most prospective teachers. They were predominantly interested in where proving started, from which set the elements were chosen and what the ending was. It was observed that half of the prospective teachers paid attention to whether the operations were in accordance with the definitions of the subset and inverse function. Most prospective teachers also checked for the accuracy of the arguments in the argumentation. They attempted to find how they reached the conclusion from the data in the arguments, in other words, they tried to find the reasons for the arguments. These prospective teachers especially attempted to understand the reason for the inaccurate statement of "$f(x) \in f(D) \Longrightarrow x \in D$". Among these prospective teachers, Adem stated that the argument was an accurate proof. He also stated that the argument presented to him was partly accurate. Adem underlined that there was an accuracy side of the argument because he thought the method was a valid one. Adem's reasoning is provided as an example below.



Partially true. It was started the proof correctly. When we examine step of the proof, expression of "$f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in D$" is not always true since it can be $x \in D$ while $x \notin D$.

Figure 1. Adem's warrant

The Proof Evaluation Strategies Used in Sequences

The second set of interviews examined how the prospective teachers evaluated proofs about the sequences constructed to them with the method of proof by contradiction and counterexamples. The prospective teachers were first presented with the proof of the theorem "*If a sequence has limit, the limit is unique*". Strategies and decisions are presented in Table 5.

Table 5.

The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluating of the Proof and Their Decisions.

Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Line control and operational mistake	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
	Choosing n_0		✓	✓					
Structural examination	Proof method	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Convergent sequence definition	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Authoritarian examination	Accordance with proof learnt					✓	✓		✓
Decisions		True	True	True	True	True	True	True	True

According to Table 5, it is observed that prospective teachers were able to identify that the proof presented to them was an accurate proof. According to this, it may be stated that the ability of the prospective teachers to choose accurate proofs was high. When the things the prospective teachers paid attention to while evaluating the proof were examined, it was found that all of them first paid attention to the method of proving and use of the definition of convergent sequences. More than half of the prospective teachers (Ahu, Adem, Aziz, Barış and Bilge) focused on the transition between the steps of the proof, as well as not having any operational mistakes in these steps. While evaluating the proof, three prospective teachers (Barış, Bilge and Belma), with an authoritative approach, paid attention to have it in accordance with the previous proof they learnt. Two prospective teachers (Adem and Aziz) took into account how the term n_0 in the proof was choosen.

How prospective teachers evaluated the method of proof had an important place in decisions they made. The prospective teachers had difficulties in accurately identifying the method of proof. While Ahu, Adem and Aysun were able to explain the proof by identifying the method of proof by contradiction, others stated that the proof was constructed by the method of proof by contrapositive. When these prospective teachers were asked why they thought that the proof was constructed with the method of proof by contrapositive, they were not able to provide an appropriate explanation. When the reason for this was analyzed, it was found that the prospective teachers were not able to differentiate between the method of proof by contradiction and the method of proof by contrapositive. Below is the conversation between Ahu, who was among the prospective teachers that successfully identified the method of proof, and the researcher.

Ahu: *My lecturer, it was accepted that the inverse of the statement is true. Then, he showed that the two limits we have taken were actually one. In other words, he showed it is not like that by accepting the inverse of the statement.*

Researcher: *Which method of proof was used?*

Ahu: *The method of proof by contrapositive was $q' \Rightarrow p'$. Here it is, q'. Is it proof by contrapositive or is it proof by contradiction? It seems like proof by contradiction.*

Researcher: *Why proof by contradiction?*

Ahu: *We are starting by assuming (accept as true) the inverse (inverse of the statement).*

Researcher: *What is the difference between proof by contrapositive and proof by contradiction?*

Ahu: *We were assuming the inverse of the statement for proof by contradiciton, then we are demonstrating that it is not true. For proof by contrapositive, you take the inverse of the statement and again find the inverse of it. Symbolically, for theorem of $p \Rightarrow q$, there is $q' \Rightarrow p'$.*

The prospective teachers, except for Ahu, Adem and Aysun stated that the proof was constructed by the method of proof by contrapositive. Below is the reasoning of Barış, who was among these prospective teachers, and the conversation between him and the researcher.

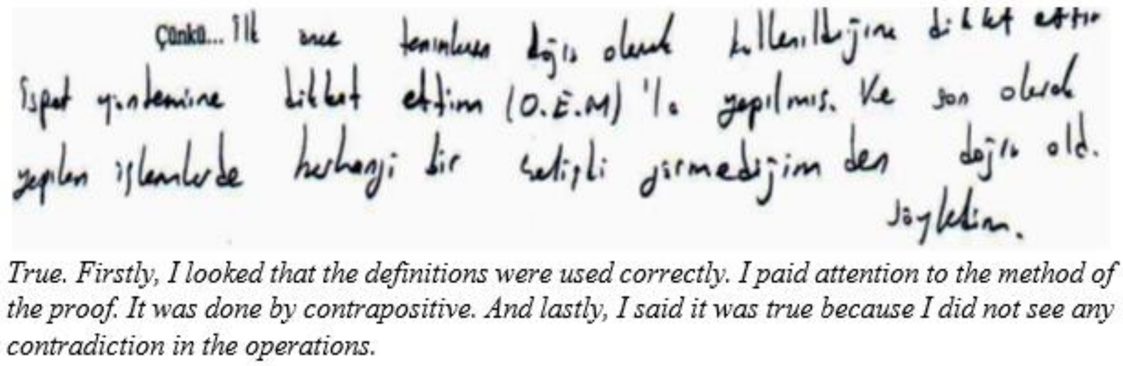


Figure 2. Barış's warrant

Researcher: *Why proof by contrapositive?*

Barış: *For such things, we use it. Let's say there are two different routes from point A to point B. When you try to prove this, it says one route should be used to go from point A to point B. It approves this. We call such proofs as method of proof by contrapositive.*

Researcher: *Well, what is its difference from proof by contradiction?*

Barış: *It resembles proof by contradiction, but it does not yield the full measure. There is contradiction, but in proof by contrapositive there is contradiction with what it assumes. You know, it says there should be two limits, then finds that they are the same; this is a contradiction. Because, there would be one limit. In other words, it contradicts with what it assumes. This is the difference between them.*

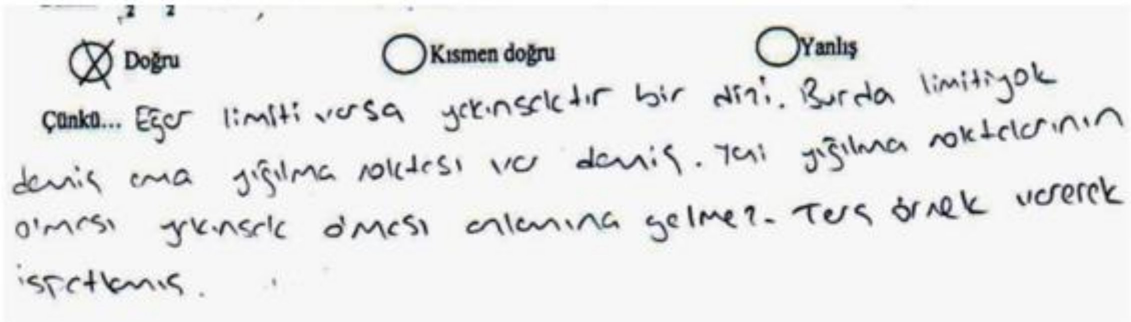
The inaccuracy of the false statement *"Let (s_n) be a reel number sequence. If (s_n) has any accumulation point, it is convergent.",* which is related to the correlation between the accumulation point and its limit, was shown to the prospective teacher with the help of a counterexample to evaluate. The prospective teachers were asked to evaluate the proof constructed by a counterexample and make a decision about the accuracy of this proof. The kind of strategies that were used by the prospective teachers to evaluate the proof constructed with counterexample were examined. The strategies used and the decisions made by the prospective teachers are presented in Table 6.

Table 6.
The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluating of the Proof Constructed with Counterexample and Their Decisions

Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Warrant control	✓	✓	✓		✓	✓		
Structural examination	Proof method	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Authoritarian examination	Past memories						✓		
	Authoritarian knowledge							✓	
Decisions		True	True	True	True	True	True	False	Partially true

When Table 6 is examined, it is found that only two prospective teachers (Buse and Belma) stated that the proof constructed with a counterexample was inaccurate. All prospective teachers took the method of proof into consideration while evaluating the proof. More than half of the prospective teachers (Ahu, Adem and Aziz) examined the reasoning used in the proof. While Bilge evaluated the proof without help of her previous information, Buse used information from an authority by claiming that the lecturer provided information in class in the way she presented.

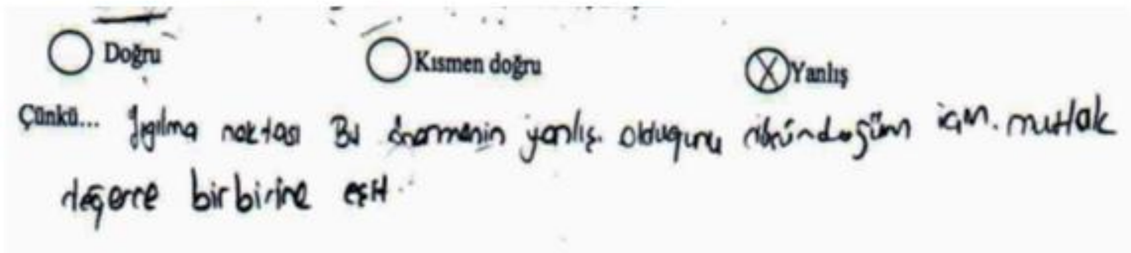
All of the prospective teachers have paid attention to the method of proof when evaluating the proof. In their decisions, how proof is made was substantially effective. Most of the prospective teachers stated that the proof made by producing the counterexample is a valid proof. They have emphasized that the aforementioned counterexample is enough to refute the statement. Below is the reasoning presented by Aysun, one of these prospective teachers.



True. If there is a limit then it is a convergence sequence. He said that there is no limit but there is an accumulation point here. It does not mean that if it has accumulation points it is convergence. He proved by giving counterexample.

Figure 3. Aysun's warrant

Buse, on the other hand, stated that the counterexample in the proof is not a proper counterexample. Buse, in her expression, stated that the accumulation points of this counterexample are equal in terms of their absolute values and this example is not appropriate. What Buse means in her statement is not fully understood. Buse has indicated the lecturer of the relevant course as the basis for this thought. She claimed that the lecturer spoke as she stated. Below is Buse's reasoning and statements on the subject.



False. Accumulation point. Since I think this statement is false. The absolute values of them are equal.

Figure 4. Buse's warrant

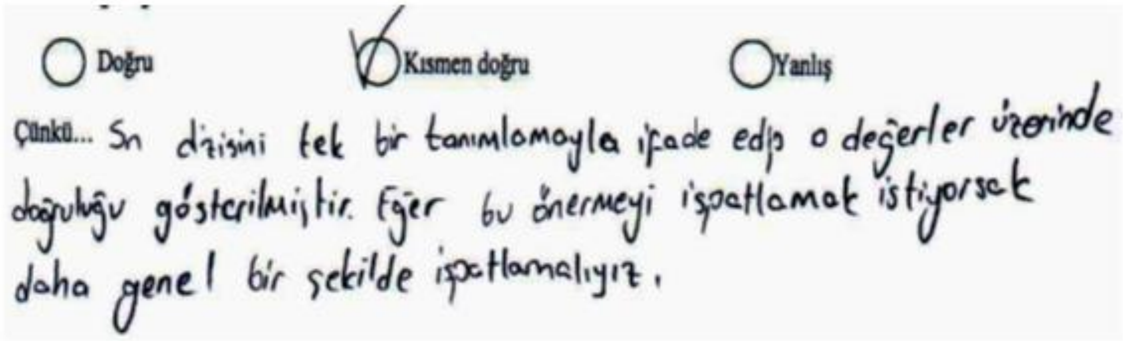
Researcher: *Why did not what is done seem convincing to you?*

Buse: *Here, even if there are two accumulation points chosen, the absolute values of -½ and ½ are equal. That's why it sounded as if it were wrong to me.*

Researcher: *Why do you take its absolute value?*

Buse: *Couldn't it be its absolute value when it was like this? That's how I remember it. I do not know, but I might have visualized what my lecturer said this way. I understood this from what the lecturer said.*

Belma has stated that counterexample is not sufficient to falsify this statement, and it should be proved in a more general way. She, therefore stated that the proof made would be partly correct. According to this, it can be said that Belma has deficiencies in her knowledge of the proofs made with counterexamples. Below is Belma's reasoning presented.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Sn dizisini tek bir tanımlamayla ifade edip o değerler üzerinde doğruluğu gösterilmiştir. Eğer bu önermeyi ispatlamak istiyorsak daha genel bir şekilde ispatlamalıyız.

s_n sequence was expressed with only one definition, its correctness was shown by these values. If we want to prove this statement then we need to prove more generally.

Figure 5. Belma's warrant

More than half of the prospective teachers have examined the reasoning for the arguments in the proof. Prospective teachers pay attention to whether or not there is a procedural mistake in these arguments or whether the results obtained are logically correct. Most of these prospective teachers correctly question the reasons of the expressions in the proof, while others present mathematically incorrect reasons. Ahu, Adem and Aziz used mathematically correct reasoning for questioning the accumulation points of the given sequence as counterexample in the proof. Aziz stated that the accumulation points came from limit of the sub- sequence. Below are the expressions of Aziz.

Researcher: *Where does ½ and -½ come from?*

Aziz: *When we look at the sequence's limit when it goes to infinity it becomes positive sometimes and negative sometimes. For evens it is positive ½, for odds it is -½.*

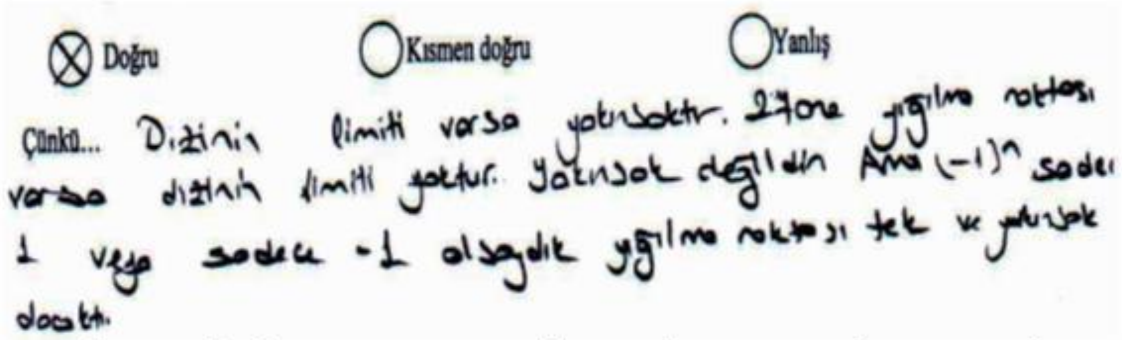
Researcher: *What is it that you named odd and even?*

Aziz: *The Odds and the evens are two sub-sequence of this sequence. Sub-sequences are divergent because their limits are different.*

Bilge from prospective teachers confused the limit concept in the sequences with the notion of limit of function at one point while expressing where ½ and -½ of the accumulation points came from. It turns out that the cause of this situation is Bilge's lack of conceptual knowledge for the definition of convergent sequence. Prior to the beginning of the activities for the concept of the sequences, he used statements about the concept of continuity while describing the definition of the convergent sequence. Here too, it has been revealed that she can not distinguish the convergent sequence concept from the concept of limit of functions at a certain point. She pointed out that the accumulation points came from the right limit and the left limit. Below are the expressions of Bilge.

Bilge: *If there were 2n instead of n in $(-1)^n$, the right limit would be 1. Then we'd say there is a limit, and it'd be a convergent one. I was convinced that it didn't have a limit because -1 is involved.*

Bilge also decided on the influence of the previous information while evaluating the proof. Bilge decided by using the knowledge that limit is divergent if there are two accumulation points. Below is the Bilge's reasoning of her decision.



True. If sequence has limit it is convergence. If sequence has two accumulation points it has not limit. It is not convergence. If we had taken only 1 or -1 instead of n in $(-1)^n$ it would have been convergence and had only one accumulation point.

Figure 6. Bilge's warrant

Barış often confused the series with real number sequences when questioning why the sequence given in the counterexample is divergent. Properties that were used to determine the convergence character of the series were used to determine the character of the sequence. Below are sections from Barış's expressions.

Barış: *If the limit of the general term is different than zero we say it is divergent ... We make alternating series, sequences from the same thing of series. That is to say, for even terms positive, for odd terms negative... OK Sir, let's give a few values. We see that it is an ascending, descending sequence. Sir, for example how do we get the ratio of a_{n+1} to a_n , subtract the former from the latter.*

The Proof Evaluation Strategies Used in Limit

The third set of interviews investigated how the prospective teachers evaluated an inaccurate proof in the subject of limit. The prospective teachers were presented with the inaccurate proof of the theorem "*Suppose that $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for all x in some open interval containing a except possibly at a itself. If $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, then $\lim_{x\to a} f(x) = L$.*". In the original version of this proof, the statement "$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$" is replaced with $\delta = \text{maks}\{\delta_1, \delta_2\}$. Such a change in the proof damages the generalizability of it and it can be refuted with a counterexample. It was observed that strategies used by the prospective teachers were clustered under three categories and seven subcategories. The strategies used and the decisions made by the prospective teachers are presented in Table 7.

Table 7.

The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluating of the Proof and Their Decisions

Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Line control and operational mistake	✓		✓	✓	✓	✓		
	Choosing δ	✓	✓	✓	✓				
Structural examination	Using the hypothesis	✓	✓						✓
	Using limit definition	✓	✓	✓	✓	✓		✓	
	To reach the conclusion					✓		✓	
Authoritarian examination	Accordance with the proof learnt						✓		✓
	Adaptation					✓			
Decisions		True	True	True	True	True	True	True	True

According to Table 7, all prospective teachers stated that this inaccurate proof was accurate. According to this, the ability of the prospective teachers to identify the inaccurate proof about the subject of limit was very low. The prospective teachers mostly paid attention to the use of definition in the proof and not having any operational and logical mistakes in proof steps. Half of the prospective teachers (Ahu, Adem, Aziz, Aysun) considered the choice of the number δ in the proof. Most prospective teachers paid attention to the structure of proof interested in the use of hypothesis of the theorem, use of limit definition in proof and reaching the conclusion. Two prospective teachers (Bilge and Belma) paid attention to have the proof in accordance with the proof they previously knew. Barış evaluated a proof in another subject by adopting it to the respective proof.

It was found that Ahu, Aziz, Adem and Aysun paid attention to the choice of the number δ in the proof while evaluating it. Even though the prospective teachers presented correct reasoning in their evaluations and arguments, they stated that the number δ was chosen correctly. These prospective teachers stated that the number δ was chosen correctly despite having adequate level of conceptual information about the definition of limit. It was thought that the reason for this was the impact of the choice of intercept point in the proof about sequences, which were in the previous interview. The best example to this was the case of Aziz.

Aziz was also asked what should be included in an accurate proof while getting his views on the proof before starting the activity-based interviews. As an answer to this, Aziz underlined that key statements in proofs are important. As an illustration of key statements, Aziz gave the example of taking δ at the minimum in proofs related to limit of functions. He indicated that the proof will be inaccurate if δ is not taken at the minimum. While evaluating this proof, Aziz paid attention to how δ was selected. Although Aziz suggested appropriate justifications for taking the δ, he insisted that the δ was taken accurately. According to this, it may be argued that even though the conceptual knowledge of Ahu, Aysun and Adem, together with Aziz, on limits of functions and sequences was adequate, they did not have sufficient knowledge on the difference between the limit of a real variable and real valued functions at a certain point and the limit of real number sequences. Below are Aziz's statements on the matter.

Aziz: *Yes, this is correct. There are no problems with the operations. Definitions are used accurately; also in order to eliminate conditions that do not verify, we take $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$. There are no calculation errors.*

Researcher: *Why was $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ taken?*

Aziz: *The former is called x that is in the neighborhood of δ_1; the latter is called x that is in the neighborhood of δ_2. Here, one of the radiuses will be smaller and the other will be larger; besides, the small one will be covered when we take maximums different from each other. Let δ_1 be larger than δ_2. When we take the maximum at this point, δ_1 already covers the radius. This is the reason.*

Researcher: *What would happen if the minimum was taken?*

Aziz: *If the minimum was taken, there might have been xs that are in the neighborhood of the radius of δ_1, but not in the neighborhood of the radius of δ_2. Hence, these will be eliminated when you take the maximum.*

Researcher: *Which of the following steps of the proof would be problematic if the minimum was taken?*

Aziz: *We would not be able to demonstrate that $|f(x) - L|$ is smaller than ε.*

Aziz indicated that the reason for taking $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ was to eliminate cases that were not verified. What Aziz referred to as cases that were not verified were x values that did not verify the disequilibrium $|f(x) - L| < \varepsilon$. Here, even though it was not openly stated by Aziz, it was understood that the x values that Aziz wanted verification for, were the values from the first definition, which mutually verified the disequilibrium $|g(x) - L| < \varepsilon$ and $|h(x) - L| < \varepsilon$. Aziz stated that when δ was taken as minimum, the disequilibrium $|f(x) - L| < \varepsilon$ could not be written since it would formed by using these two disequilibria. Although the justifications provided by Aziz were correct, his claim was not accurate. In order to be able to mutually use these two disequilibria, which are valid for elements in two different ranges, elements that verify both equilibriums should be chosen. This was only possible at the intersection of the two ranges, namely by taking common elements. Thus, Aziz's idea to choose x values that verified the disequilibrium was accurate; however, his claim that this case was only possible if there was $\delta = \mathrm{maks}\{\delta_1, \delta_2\}$, was not accurate.

The Proof Evaluation Strategies Used in Derivative

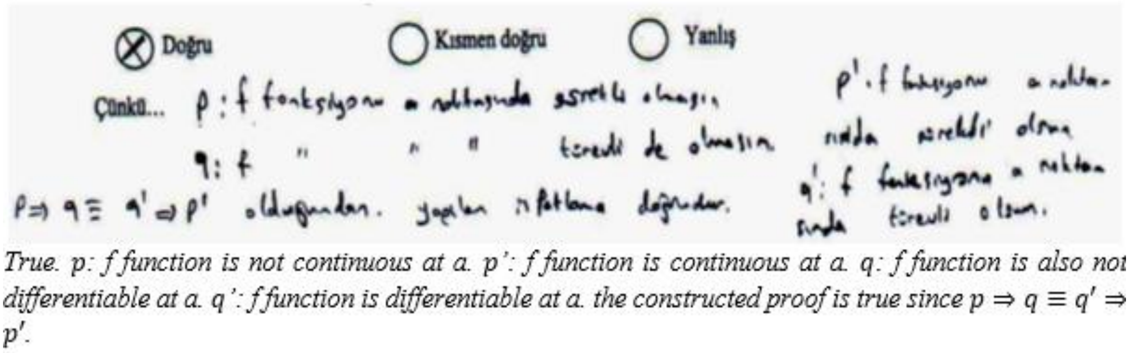
The fourth set of interviews which is the last interview of the study investigated how the prospective teachers evaluated an accurate proof that was constructed with the method of proof by contrapositive and an inductive argument in the subject of derivatives. The prospective teachers were first presented with a proof of the theorem "$There\ is\ A \subset R$, $a \in A$ *and* $f: A \to R$. *If f function is not continuous at the point a, it is also not differentiable.*". It was observed that strategies used by the prospective teachers on whether the theorem was proved accurately or not were clustered under two categories and five subcategories. The strategies used and the decisions made by the participants are presented in Table 8.

Table 8.
The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluating of the Proof and Their Decisions

Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Operational mistake	✓	✓	✓	✓	✓			
Structural examination	Proof method	✓	✓		✓	✓			✓
	Derivative definition	✓		✓		✓		✓	
	To reach the conclusion					✓	✓		
	Using hypothesis							✓	
Decisions		True	True	True	True	True	True	True	False

When Table 8 is examined, it is found that all prospective teachers except for Belma stated that the theorem was proved accurately. According to this, it may be argued that the ability of prospective teachers to evaluate an accurately constructed proof was considerably high. When strategies used by prospective teachers to evaluate the proof were examined, it was discovered that they paid attention mostly to the method of proof, and whether there was an operational error in the steps of the proof. It was determined that four prospective teachers were attentive to use of formal definition of derivatives for the proof of the theorem. It was found that while two of the prospective teachers paid attention to whether the theorem reached to its conclusion or not, one prospective teacher paid attention to whether the hypothesis of the theorem was used in the proof or not.

Ahu, Adem, Aysun, Barış and Belma paid attention to the method of proof while evaluating the accuracy of the proof. All prospective teachers except for Belma stated that the theorem was conducted by the method of contrapositive and the method of proof was applied correctly. However, Belma stated that the proof of the theorem was done by the direct proving method. When Aziz, Bilge and Buse, who were considered to be not paying attention to the method of proof, were asked which method of proof was used in the proof; Aziz stated that it was proof by contradiction, but failed to explain the method of proof by contradiction. Bilge and Buse stated that it was the method of contrapositive, yet they failed to explain it properly. According to this, it was discovered that although most of the prospective teachers were able to identify method of proof accurately, only half of them were able to explain the method of contrapositive. Below are the statements of Adem, Aziz and Belma.

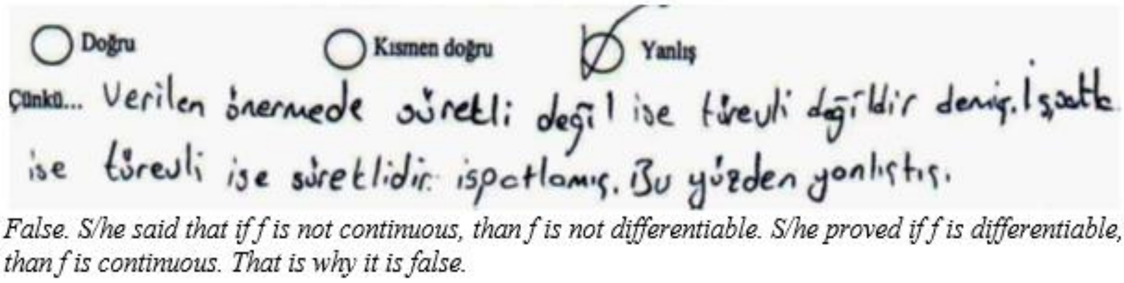

Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... p: f fonksiyonu a noktasında sürekli olmayışı, q: f " " türevli de olmasın. p ⇒ q ≡ q' ⇒ p' olduğundan, yapılan ispatlama doğrudur. p': f fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. q': f fonksiyonu a noktasında türevli olsun.

True. p: f function is not continuous at a. p': f function is continuous at a. q: f function is also not differentiable at a. q': f function is differentiable at a. the constructed proof is true since $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$.

Figure 7. Adem's warrant.

Aziz: *Is contrapositive also in the reverse order? We were directly doing… True, since this theorem is proved by the method of contrapositive it is a method of contradiction. It attempts to demonstrate* $p \Rightarrow q$ *through* $q' \Rightarrow p'$*. This is why it is proof by contradiction.*


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Verilen önermede sürekli değil ise türevli değildir demiş. İspatta ise türevli ise süreklidir ispatlamış. Bu yüzden yanlıştır.

False. S/he said that if f is not continuous, than f is not differentiable. S/he proved if f is differentiable, than f is continuous. That is why it is false.

Figure 8. Belma's warrant

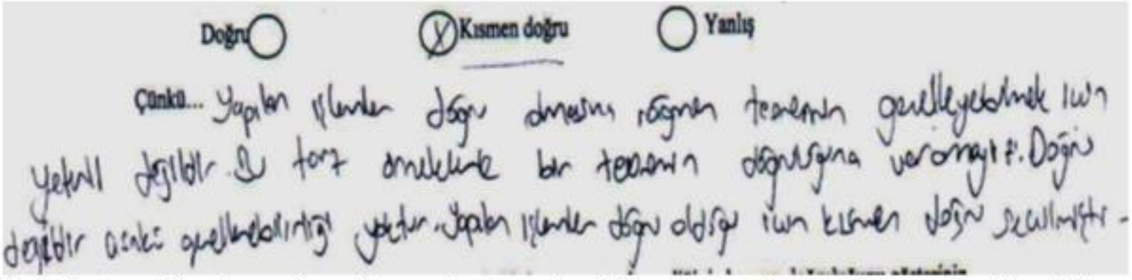
In order to examine the ability of the prospective teachers to evaluate a proof constructed by others, the theorem "*The derivative of every odd function is an even; and derivative of every even function is an odd function.",* which is valid for all real variables and real valued functions, was verified by using an inductive logic. The accuracy of this theorem is shown only via one pair of examples. Prospective teachers are asked to evaluate and make a decision on the accuracy of the arguments. Strategies that are used by prospective teachers to evaluate the proof, and decisions they made about the accuracy of the argument are presented in Table 9.

Table 9.

The Strategies Used by Prospective Teachers in Evaluating of the Inductive Argument and Their Decisions

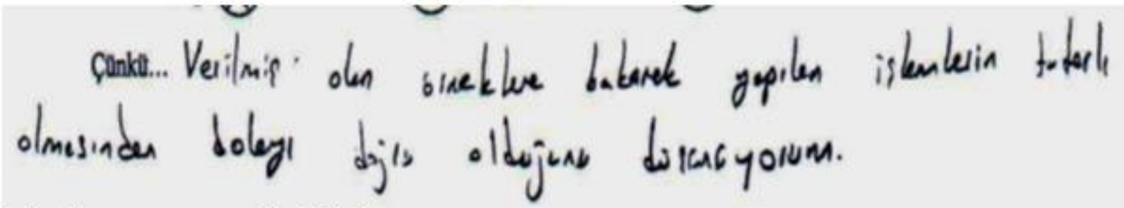
Categories	Subcategories	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argumentation examination	Operational mistake	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Structural examination	Structure of the argument	✓	✓		✓		✓		✓
Decisions		Partially true	False	True	False	True	Partially true	True	True

According to the data in Table 9, it was found that half of the prospective teachers (Aziz, Barış, Belma and Buse) considered the argument that was produced with an inductive logic as an accurate proof. Accordingly, it could be argued that half of the prospective teachers considered inductive arguments as valid proofs. The other half of the prospective teachers stated that an inductive argument cannot be a proof. They underlined that verification through only one example is not adequate enough to show that a theorem is accurate. Two of the prospective teachers (Adem and Aysun) stated that a verification demonstrated in such a method would definitely be an inaccurate verification; whereas two others (Ahu and Bilge) emphasized that it would be a partly accurate proof. The prospective teachers who considered the inductive argument as partly accurate did not refuse the argument completely since they thought the operations done for the proof were correct, even though the method of proof was incorrect. Below are the justifications by Ahu, Barış and Aysun.



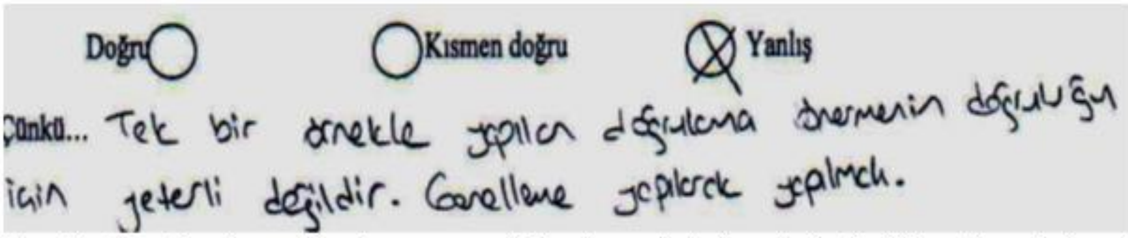
Partially true. Despite performed operations are true, it is not enough to make generalization. We can not reach the truth of the theorem with such examples. It is not true since there is no generalization. Partially true was selected as performed operations are true.

Figure 9. Ahu's warrant



By looking given examples, I think it is true as operations are consistent.

Figure 10. Barış's warrant



True. Confirmation done with only one example is not enough to show the truth of the statement. It must be done by doing generality.

Figure 11. Aysun's warrant

Discussion & Conclusion

When abilities of prospective teachers to evaluate valid and invalid proofs were investigated, it was found that they were mostly able to identify valid proofs constructed through direct proof, proof by contradiction and proof by contrapositive. According to this, it was discovered that the prospective teachers were able to identify valid proofs. It was seen that none of the prospective teachers were able to identify invalid proofs. Only two of the prospective teachers (Adem and Aysun) were able to identify that a deductive argument produced for a false statement was not an accurate proof. Accordingly, it was found that the prospective teachers were not able to identify invalid proofs and they failed. This result had similarities with studies which showed that the ability of university students to identify valid proofs was high whereas their ability to identify invalid proofs was low (Alcock and Weber, 2005; Doruk and Kaplan, 2013; Goetting, 1995; Knuth, 2002; Martin and Harel, 1989; Segal, 2000; Uygan et al., 2014).

When evaluations of prospective teachers on proofs constructed with various methods of proof were examined, it was found that some participants were not able to identify the methods of proofs that were constructed by proof by contradiction and the method of contrapositive. When the knowledge of prospective teachers regarding methods of proof was questioned, it was discovered that some were not able to explain the two specified methods of proof. The prospective teachers confused the method of contrapositive and proof by contradiction or were not be able to explain them. This result is in parallel with studies which showed that university students had difficulties in choosing the appropriate method of proof while demonstrating it (Doruk and Kaplan, 2015; Güler, 2013; Moore, 1994; Selden and Selden, 2003). Riley (2003) also found a result which supports this result. In his research, he demonstrated that 57% of the prospective teachers were able to demonstrate a valid proof which involves the direct proof method. It was found that the ratio of demonstrating proofs with indirect proof methods was only 39%. It is needed to conduct activities to eliminate these difficulties of prospective teachers about methods of proof. Methods of proof should specifically be underlined in the Abstract Mathematics class, in which proof and methods of proof are introduced in the curriculum of the primary school mathematics teaching department.

In order to identify how prospective teachers approached invalid proofs, they were presented with an invalid proof whose key statement was changed. The relevant statement formed a basis for operations to reach the end result of the theorem by organizing the obtained data from the hypothesis of the theorem. Being aware of the function of this statement requires the ability to evaluate and use the conceptual information regarding the definitions that the proof is related to. Most prospective teachers did not pay attention to this statement. They generally evaluated the proof in a result-oriented manner. Alcock and Weber (2005) conducted a study, where students were presented with an invalid proof in which the final line was correct but the other lines were not accurate. It was discovered that most of the students were not able to identify that the proof was not valid. While students were evaluating the proofs, they stated that it was necessary to check the relation of the previous line to the following line apart from controlling whether each line was correct or not. Hence, they advised that justification for arguments verifying the relation between lines of the proof is questioned. Doruk and Kaplan (2013) found that primary school mathematics teaching students failed to evaluate proofs. They noted that the reasons for them to fail evaluating the proofs was that they did not pay attention to the ideas in the proofs and just memorized all proofs instead of having a thinking process to learn the proofs. Raman (2003) stated that there are key ideas in proofs, while mathematicians cared about these key ideas in their own work, they do not put necessary emphasis on these key ideas during teaching and not use them in evaluation either. This study also found that prospective teachers did not pay attention to key ideas in proofs. It was suggested for the instructors, who are responsible for teaching proof-weighted classes, to underline the key ideas in proofs.

While examining the evaluations of the prospective teachers regarding proofs constructed with a counterexample, it was understood that most of the prospective teachers considered proof by counterexample as a valid proof. Two stated that this proof was not a valid method of proof. These prospective teachers noted that the counterexample in the proof was not enough to disprove the relevant theorem or it was necessary to provide more examples to show that this theorem was not accurate. This result agrees with studies where some students considered the accurate counterexample produced for a theorem as the exception of the theorem and still thought that the theorem was accurate (Williams, 1979). Similarly, Galbraith (1981) stated that students did not know that having only one example was enough to disprove an inaccurate theorem. It is needed to conduct activities to make prospective teachers have sufficient information about the position and importance of counterexamples. This is because counterexamples enable reorganization of assumptions and help improve the reasoning (Whiteley, 2009). While a mathematical proof shows the validity of the theorem for all conditions (Stylianides and Stylianides, 2009), a counterexample demonstrates that the proof in hand is invalid (Akkaş et al., 1998; Irmak, 2008). Zaslavsky and Ron (1998) stated that counterexamples have a stronger position than other examples and underlined that while having one counterexample is enough to ruin the overall results, examples that are presented as supportive and affirmative are not sufficient enough. Half of the prospective teachers stated that the inductive arguments presented for a theorem constituted a valid proof. According to this, half of the prospective teachers perceived a proof to be accurate when it was presented with justification of a special example. This result supports the results of studies that showed that prospective teachers considered inductive arguments as accurate proof (Gholamazad, Liljedahl and Zazkis, 2004; Goetting, 1995; Knuth, 2002).

Most prospective teachers stated that deductive arguments produced for a false statement constituted an accurate method of proof. Only two prospective teachers were able to notice that the argument produced for the theorem was inaccurate. It was thought that the prospective teachers prioritized the deductive structure of the argument while making these decisions. It was found that most of the prospective teachers had a tendency to be convinced by proofs demonstrated by using definitions, theorems and axioms. These results coincide with the results of a study which claims that students tend to be convinced by deductive arguments even though they are not valid (Martin and Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Uygan, Tanışlı and Köse, 2014). Segal (2000) most students stated that a proof is valid even though the deductive argument is inaccurate. It was underlined that students have a tendency to admit deductive arguments as valid regardless of their accuracy. Martin and Harel (1989) denoted that 38% and 52% of prospective teachers admitted deductive arguments, which were produced for familiar and unfamiliar theorems in order, as mathematically accurate. Uygan et al. (2014) also emphasized that most prospective primary school mathematics teachers considered an inaccurate deductive argument as proof. Moreover, it was found that all prospective teachers, who considered inductive arguments as accurate proofs, considered proofs with deductive arguments as equally convincing. This case was in accordance with the results of the study by Morris (2002) who claimed that some prospective teachers found both deductive and inductive arguments convincing.

When strategies used by prospective teachers to evaluate proofs were examined, it was found that there were 15 different approaches under three categories in order to evaluate the accuracy of the proofs. Throughout the study, 130 strategies of evaluating proof done by prospective teachers were identified. While evaluating the proofs, prospective teachers generally followed argument examination, structural examination and authoritative examination strategies. Structural examination strategy is divided into two in itself as superficial examination and method of proof. It was found that 74 of the 130 approaches by prospective teachers in overall research was structural. When structural examination was investigated in two groups as superficial examination and method of proof, it was found that superficial examination was preferred 48 times and method of proof was 26 times. In superficial examination, the prospective teachers paid attention to what was used in the proof without examining the content of the proof. These prospective teachers paid attention to the use of definitions, hypothesis of the theorem and reaching the result of the theorem in proof. These results were in line with the results of studies where most of the university students mad a superficial examination while evaluating the proofs (Alcock and Weber, 2005; Doruk and Kaplan, 2013; Morris, 2002; Selden and Selden, 2003). Selden and Selden (2003) stated that while evaluating the proofs, students focus on superficial mistakes such as algebraic statements and symbolic manipulations instead of general mistakes like proving the opposite of the theorem and fundamental mathematical gaps in the proof. Doruk and Kaplan (2013) found that most students have a result oriented approach while evaluating the proofs. It was found that 26 of the strategies used by prospective teachers were related to the method of proof. These prospective teachers paid attention to the method of proof used to demonstrate the proof and the structure of arguments. This strategy of the prospective teachers about the method of proof is a strategy identified in previous studies (Knuth, 2002; Ko, 2010).

One of the mostly preferred strategy in this research by the prospective teachers was the examination of local arguments. They used this strategy 47 times. The prospective teachers who made argument examination tried to understand the justification for transition between the steps of the proof or paid attention to whether there was an operational mistake in the steps of the proof or not. It was found that the prospective teachers rarely focused on key statements in proofs, which provide logical relations in the proof. As in this study, in the study by Alcock and Weber (2005), it was stated that students failed to control the justifications for arguments in the proof. It was found that students thought it was important to control the relation between the previous and following lines along with checking the accuracy of each line.

Nine of the proof evaluation strategies used by prospective teachers were related to authoritative information. The prospective teachers who used this strategy tried to remember whether this proof was constructed before or not or used another proof that was similar to the relevant proof to evaluate it. In some studies, it was found that prospective teachers paid attention to the structure of the proof or tried to remember their previous knowledge (Ko, 2010; Selden and Selden, 2003). Additionally, it was found that the prospective teachers made line by line examination while evaluating the results. This result is in accordance with the study by Ko (2010). On the other hand, this made us think that the prospective teachers did not have a sufficient understanding as they had 15 different approaches to evaluate the proofs. This result is in accordance with the results of the study which stated that university students did not have the understanding required to evaluate proofs (Ko, 2010; Selden and Selden, 2003).

As a result of this study, it was found that some prospective teachers were not able to evaluate proofs that were not accurate and they did not have sufficient knowledge on methods of proof and counterexamples. It was thought that the prospective teachers faced such activities for the first time. The prospective teachers who participated in this study also gave same feedback. Accordingly, it is necessary to conduct such activities in proof-weighted courses, emphasize the differences between accurate and inaccurate proofs. Additionally, information about the characteristics of proofs should be provided. By presenting an inaccurate proof in class, activities may be conducted to show what kind of mistakes are done in proofs. Such activities are important to improve the knowledge of students on proofs and eliminating existing biases. In this study, proof evaluation strategies in the analysis area of prospective teachers were examined. This study can be repeated with different research approaches, different research groups. The ability to evaluate proofs for areas such as abstract mathematics and geometry can be searched. It can also be revealed in depth the understanding of the methods of proof of the students.

Türkçe Sürümü

Giriş

Matematiğin konusu; sayılar, şekiller, kümeler, fonksiyonlar ve uzaylar gibi soyut kavramlar ve bunların arasındaki işlemlerdir. Matematikçi bu varlıkların yapılarını inceler ve bunlarla ilgili genellemeleri ortaya çıkarır (Altun, 2013). Genellemelerin üretilmesinde izlenen yol matematiğe hastır ve ispatlama olarak adlandırılır. Bir matematikçi geneli ilgilendiren düşünceyi kanıtlamaya çalışır ve bu düşünce tüm örnekler için geçerli olur (Altun, 2014). İspat, bir yargı sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2014). Kanıtlar, matematikte her durumun doğruluğunu veya yanlışlığını sağlamaktadır (İskenderoğlu, Baki ve Palancı, 2011). Matematiksel ispat, ispatı yapan kişinin varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önceki bilgiler ile sunduğu ve arzu edilen sonuca ulaşılıncaya kadar teoemlerin uygulanması ve önceki elde edilen gerçeklerin hatırlanması gibi çıkarım kurallarının uygulanmasının istendiği matematiksel bir aktivitedir (Weber, 2005). Matematiksel ispat bir sonucu doğrulamak, iletişim kurmak ve diğerlerini bu sonuca ikna etmek, bir sonuç keşfetmek ve sonuçları dedüktif bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır (Almeida, 2003). Stylianou, Chea ve Blanton (2006) ispatın bir kişinin iddiasını doğrulamasını, kendisini ve başkalarını ikna etmeyi sağlayan mantıksal argüman olarak matematikte başrole sahip olduğunun kabul edildiğini ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Mejia-Ramos ve Inglis (2009) ispatın özel bir argümantasyon aktivitesi olduğunu belirtmiştir. Burada sözü edilen argüman terimi, bir öneri ya da düşünceyi desteklemek veya karşı çıkmak için üretilen sebep ya da sebepler ya da bu sebepleri açıklama süreci olarak tanımlanmıştır (Cambridge advenced learner's dictionary, 2013). Argümantasyon kavramı ise bir ya da daha fazla argümanın mantıklı bir şekilde birleşmesiyle oluşan bir süreç (Douek, 1998) ve bir teoriyi, eylemi, düşünceyi desteklemek için kullanılan mantıksal argümanlardır (Oxford advenced learner's dictionary, 2010). Argüman kavramı ayrıca, argümantasyon sürecinin yapılandırılmış bir kaydı olarak da kullanılmaktadır (Rumsey, 2012). Argüman kavramını ilk ortaya atan informel mantığın kurucularından olan Stephen Toulmin'dir. Toulmin bir argümanın sahip olduğu yapı için tanımladığı altı bileşenli bir örüntü zaman içinde Toulmin modeli adını almıştır. Toulmin modeli öğrencilerin argüman ve ispatlarının yapılarını tespit etmek, analiz etmek ve karşılaştırmak için verimli bir araçtır (Boero vd., 2010; Pedemonte, 2007, 2008; Rumsey, 2012). Toulmin'e (2003) göre her iyi inşa edilmiş mantıklı bir argümanda birbiri ile ilişkili üç ana eleman bulunur. Bu elemanlar veri, sonuç ve gerekçedir. Argümanlara niteleyen, destek ve çürüten adında üç yardımcı bileşen eklenebilir.

Ko (2010) matematikte ispatların ve ters örneklerin birincil amacının bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek olduğunu belirtmiştir. Ko ve Knuth'a (2009) göre ispatlama ve çürütme, önermelerin doğru ya da yanlış olup olmadığını ve nedeninin gösterilmesine yardımcı olduğundan dolayı ileri matematiksel düşüncede önemli becerilerdir. Buradan da anlaşılacağı gibi matematikte bir önermenin doğrulanması kadar çürütülmesi de önemli bir etkinliktir. Matematiğin gelişmesinde önemli bir yere sahiptir (Lakatos, 1976). Matematiksel önermelerin yanlışlığının gösterilmesi genellikle ters örnekler yardımıyla olur (Altun, 2014; Lampert, 1990; Yasuhiro, 1991). Diğer bilim dallarından farklı olarak matematikte ters örnekler, bir netliğe ve statüye sahiptir (Whiteley, 2009). Ters örneklerle yapılan çürütme ya da yanlışlama birçok kaynakta ispatlama yöntemleri arasında gösterilmektedir (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1998; Altun, 2014; Irmak, 2008). Bir matematiksel ispat tüm durumlar için önermenin doğruluğunu gösterirken (Stylianides ve Stylianides, 2009), bir ters örnek mevcut önermenin yanlış olduğunu gösterir (Akkaş vd., 1998; Irmak, 2008). Benzer şekilde Zaslavsky ve Ron (1998), ters örneklerin diğer örneklerden daha güçlü bir konuma sahip olduğunu belirtmiş, tek bir ters örneğin genel sonuçları bozmak için yeterli iken destekleyici ve doğrulayıcı olarak sunulan birçok örneğin yeterli olmadığını ifade etmişlerdir. Varlık bildiren teoremler ispatlanırken teoremin doğru olduğunu göstermede bir tek örnek vermek yeterli değildir. Çünkü teorem bu örnek için doğrulandığı halde başka bir örnek için doğrulanmış olmayabilir (Akkaş vd., 1998).

Araştırmacılar tarafından ispatın matematik ve matematik eğitimi için önemi vurgulanmasına rağmen üniversite öğrencileri ve matematik öğretmenlerinin ispat yapmada (Cusi ve Malara, 2007; Doruk ve Kaplan, 2015; Ko ve Knuth, 2009; Weber, 2001), ters örnek üretmede (Riley, 2003; Zaslavsky ve Peled, 1996) ve başkaları tarafından yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirmede (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013; Güler ve Ekmekçi, 2016; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Selden ve Selden, 2003; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) başarısız oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu başarısızlıklarını tespit eden araştırmacılar, öğrencilerin ispatlama sürecine odaklanmışlardır. Öğrencilerin ispatlama sürecine etki eden faktörleri bulmaya çalışmışlardır. Bu bağlamda Weber (2001) öğrencilerin ispat yaparken yaptıkları hataları anlayabilmek için öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesinin gerekli olduğunu ifade etmiştir.

Lisans öğrencilerinin ispat ve ters örneklerde güçlük yaşamasının sebeplerinden biri ispat ve ters örnekler hakkındaki yanlış algıları ve eksik bilgileridir. Weber'e (2001) göre öğrencilerin ileri matematik konularındaki ispatlarda yaşadıkları güçlüklerden biri, öğrencilerin matematiksel ispatın nelerden oluştuğu ve özellikleri hakkında doğru bir fikre sahip olmamalarıdır. Bazı öğrencilerin genel bir teoremin ispatını, bir ya da birkaç özel örnek ile doğrulanınca (Barkai, Tsamir, Tirosh ve Dreyfus, 2002; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Weber, 2001) ve geleneksel, ritüel bir formatta (Harel ve Sowder, 1998) olunca kabul ettikleri tespit edilmiştir. Bazı öğrencilerinin ise kendilerine sunulan bir önermenin doğru olup olmadığını belirlemede bile güçlük yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır (Gibson, 1998; Goetting, 1995; Ko ve Knuth, 2009; Riley, 2003). Öğrencilerin bir kısmının, bir önerme için üretilen doğru ters örneği, önermenin istisnası olarak gördükleri ve önermenin hala doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir (Williams, 1979). Benzer şekilde Galbraith (1981), öğrencilerin tek bir ters örneğin, yanlış olan önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu bilmediklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin ispat değerlendirme süreçlerine yönelik yapılan araştırmalarda da ilginç sonuçlara ulaşılmıştır. Bu çalışmalardaki öğrencilerin bir kısmı, bir önerme için üretilen hem indüktif (tümevarımsal) hem de dedüktif argümanı geçerli ispatlar olarak değerlendirmiştir (Martin ve Harel, 1989). Bazı öğrenciler de bir önerme için üretilen hem doğru ters örneğin hem de yanlış ispatın geçerli olduğunu belirtmişlerdir (Goetting, 1995). Öğrencilerin çoğu dedüktif bir tarzda üretilen yanlış ispatların geçerli olduğunu kabul etmişlerdir (Segal, 2000). Öğrencilerin başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirirken yüzeysel bir inceleme yaptıkları, genel mantıksal boşluklara dikkat etmek yerine gereksiz ayrıntılara odaklandıkları ve sonuç odaklı bir yaklaşım sergiledikleri tespit edilmiştir (Doruk ve Kaplan, 2013; Selden ve Selden, 2003).

Lisans öğrencilerinin ispat değerlendirme süreçlerini inceleyen çalışmalarda çoğunlukla cebir (Güler ve Ekmekçi, 2016; Knuth, 2002; Morris, 2002; Selden ve Selden, 2003; Weber, 2008) alanının tercih edildiği görülmüştür. Analiz alanında yapılan çalışmaların ise sınırlı sayıda olduğu tespit edilmiştir. Yapılan çalışmaların da daha çok limit konusuna yoğunlaşıldığı görülmüştür (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013). Öğrencilerin ispatları değerlendirme sürecinde nelere dikkat ettikleri ne tür stratejiler uyguladıkları konusunda çalışma sayısının oldukça az olduğu tespit edilmiştir. Bu çalışmalardan biri olan Ko (2010) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin ispatları ve ters örnekleri değerlendirirken kullandıkları stratejilerin; "ispat/ters örnek yöntemine dikkat etme", "satır satır inceleme" ve "örnek temelli olarak satır satır inceleme" olduğu ortaya çıkmıştır.

Geçerli argümanlar ya da ispatlar üretme ve argümanların kritik edilmesi matematik yapmanın ayrılmaz parçalarıdır. Eğer muhakeme becerileri öğrencilere kazandırılmazsa o zaman matematik, bir işlem dizisini takip etmek ve anlamını düşünmeden örnekleri taklit etmek olur (Ross, 1998). Bu anlamda gelecekte matematik öğretiminden sorumlu olacak olan öğretmen adaylarının kendilerine sunulan argümanların doğruluğunu nasıl değerlendirileceği konusunda bilgili olmaları gerekmektedir. Öğretmen adaylarının bu beceriye sahip olabilmesi için öncelikle argüman değerlendirme sürecinde ne tür stratejiler kullandıklarının ortaya çıkarılması önemlidir. Bu tarz çalışmalardan elde edilecek bilgilerle öğrencilerin doğru stratejiler geliştirilmesi adına gerekli çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki ispatları değerlendirme süreçleri incelenerek öğrencilerin ne tür stratejiler uyguladıkları ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Yöntem

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiş olup bir durum çalışması örneğidir. Durum çalışması, sınırlı bir sistem içerisinde bir konunun bir ya da bir kaç durum üzerinden incelenmesini içeren araştırmalardır (Creswell, 2007). Diğer bir deyişle, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir (Merriam, 2013). Bu çalışmada da öğretmen adaylarının analiz alanındaki ispatları değerlendirme süreçleri ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Katılımcılar

Bu çalışmanın katılımcılarını 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılında, Türkiye'nin Doğu Anadolu Bölgesi'nde yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören toplam sekiz matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Ayrıca çalışmanın pilot uygulaması 2013-2014 eğitim öğretim yılının güz yarıyılında, yine aynı üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün son sınıfında öğrenim gören toplam 10 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Pilot çalışmada taslak olarak hazırlanan veri toplama araçları kullanılmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler asıl uygulamada planlanan koşullarda gerçekleşmiştir. Pilot çalışma sayesinde veri toplama araçlarının işlevselliği, çalışma yönteminin geçerliği, çalışmada karşılaşılabilecek muhtemel zorluklar ve çalışmadan elde edilecek sonuçlar hakkında bilgiler elde edilmiştir. Pilot çalışmadan elde edilen sonuçlar altı uzman akademisyen ile tartışılmıştır. Uzmanlar veri toplama araçlarının ve yöntemin çalışma için uygun olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca uzmanlar katılımcı sayısının fazla olduğunu ve bu nitel araştırmada derinlemesine bilgi elde edilebilmesi için katılımcı sayısının düşürülmesini önermişlerdir. Pilot çalışma sonucunda çalışmanın veri toplama araçları ve yöntemi değerlendirilmiş ve katılımcı sayısı azaltılmıştır.

Araştırma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınmıştır. Ölçüt örnekleme yönteminde temel anlayış önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan durumların çalışılmasıdır. Burada sözü edilen ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ölçüt örneklemenin mantığı da, daha önceden belirlenmiş bazı önem ölçütlerini karşılayan tüm durumları çalışma ve gözden geçirmedir (Patton, 2014). Çalışmada öğretmen adaylarının analiz alanında ispatları değerlendirirken ne tür stratejiler kullandıkları ve neleri dikkate aldıkları araştırılmak istenmiştir. Bu bakımdan araştırma grubu seçiminde, öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu, nasıl yapıldığı, bir argümanın nasıl savunulması gerektiği ya da matematikte "çürüten" yani ters örneklerin varlığı ve kullanımı hakkında bilgi sahibi oldukları Soyut Matematik dersi ile analiz konularının öğretiminin yapıldığı Genel Matematik, Analiz-I, Analiz-II ve Analiz-III derslerini almış ve başarı ile geçmiş olmaları dikkate alınmıştır. Analizin temel konuları olarak fonksiyonlar, diziler, limit, süreklilik ve türev kavramları dikkate alınmıştır. Araştırma grubunun seçilmesinde daha ayrıntılı bilgi elde edebilmek için öğrencilerin hazırlanan etkinliklerin ilgili olduğu derslerdeki başarıları (Analiz-I, Analiz-III, Soyut Matematik) ve ağırlıklı genel not ortalamaları (AGNO) incelenmiştir.

Yapılan değerlendirmeler sonucunda öğrenciler ilgili derslerdeki başarıları ve AGNO'larına göre iki gruba ayrılmıştır. İlk grup ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerdir. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin arasından gönüllülük esasına ve kolay ulaşılabilme olanağı olan dört öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerin AGNO'ları 2.5/4 ile 3.0/4 arasındadır. Ortalama başarı düzeyindeki öğrencilerin bir kısmı araştırma etkinliklerinin ilgili olduğu dersleri (Soyut Matematik, Analiz-I, Analiz-III) ilk seferinde, bir kısmı da bu dersleri tekrara düşerek ortalama bir başarı ile geçmişlerdir. Çalışmanın yürütüldüğü diğer grup başarı düzeyi yüksek öğrencilerden oluşmuştur. Bu gruptaki öğrencilerin AGNO'ları 3.0/4 ile 4.0/4 arasında ve ilgili dersleri ilk seferinde yüksek bir başarı ile geçmişlerdir. Bu grup arasından da gönüllü olmaları ve kolay ulaşılabilmeleri göz önünde tutularak dört öğrenci araştırma grubuna dâhil edilmiştir. Bu gruptaki öğrenciler öğrenim gördükleri bölümlerin en başarılı öğrencileridir. Örneğin, bu gruptaki öğrenciler arasında ilgili derslerin hepsini alabileceği en yüksek harf notu (AA) ile geçen ve öğrenim gördüğü dört yıllık bölümü üç senede başarılı bir şekilde bitiren öğrenciler bulunmaktadır.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının gerçek isimlerinin yerine takma isimler kullanılmıştır. İlk grup olan ortalama düzeyde akademik başarıya sahip öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Barış, Belma, Bilge ve Buse'dir. Başarı düzeyi yüksek öğretmen adaylarının takma isimleri başarı sırasına göre Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'dir

Çalışmada başarı düzeyi farklı iki grubun incelenmesinin sebebi farklı görüşlerin elde edilmesini sağlamaktır. Bu sayede öğretmen adaylarından araştırılan konuya yönelik çeşitli ve derinlemesine bilgi alınabileceği düşünülmüştür. Amaçlı örneklem seçiminde de mantık, araştırmanın daha derinlemesine yapılabilmesi için bilgi açısından zengin durumları seçmektir. Bilgi açısından zengin durumlar, araştırmacının araştırmanın amacı açısından mümkün olduğunca fazla bilgi elde edebileceği durumlardır. Bilgi açısından zengin durumları çalışma, ampirik genellemelerden ziyade derinlemesine anlama imkânı sağlar (Patton, 2014). Ayrıca amaçlı örnekleme yöntemiyle katılımcı seçmek, ayrıntılı betimlemeyle beraber nitel çalışmaların aktarılabilirliğini (dış geçerlik) önemli ölçüde artırmaktadır (Yıldırm ve Şimsek, 2011). Belirli ölçütlere göre farklı başarı düzeylerinden öğrenci grupları ile çalışma, ilgili literatürde sıklıkla karşılaşılan bir durumdur (Sarı vd., 2007; Weber, 2001, 2008, 2009). Çalışmada başarı düzeyi düşük öğrencilerin araştırmaya dâhil edilmemesinin sebeplerinden biri de pilot uygulamada bu tarz öğrencilerin analizi kolay olmayan ifadeler kullanma eğiliminde olmalarıdır.

Veri Toplama Araçları

Öğretmen adaylarının analiz alanındaki ispat değerlendirme becerilerinin ortaya çıkarılmasında dört adet yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerden yararlanılmıştır. Öğretmen adayları ile dört kez görüşülmüştür. Görüşme belirli bir araştırma konusu veya bir soru hakkında derinlemesine bilgi sağlayan, en az iki kişi arasında sözlü olarak sürdürülen bir iletişim sürecidir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2012). Görüşme türlerinden biri olan etkinlik temelli görüşmeler, hem araştırmalarda veri toplama aracı olduğu hem de ölçme ve değerlendirme için araştırmaya dayalı bir araç olma potansiyeli taşıdığı için önem taşımaktadır. Doğrudan sınıf hedeflerine dayanan öğrencilerden bilgi edinme imkânı sunarlar ve eğitim reform sürecinin merkezindeki araştırma sorularını cevaplamaya yardımcı olabilirler (Goldin, 1997). Bu çalışmada da kullanılan etkinlik temelli klinik bir görüşme, açık ve gizli normlar, değerler ve kurallar sistemi tarafından düzenlenen, bir etkinlik üzerinde katılımcı ve görüşmeci arasında etkileşimin olduğu bir durum olarak görülebilir (Koichu ve Harel, 2007). Görüşmeler sırasıyla fonksiyonlar, diziler, limit ve türev konularındaki ispat değerlendirme süreçlerini ortaya çıkarma için yapılmıştır. Çalışmada doğrudan, çelişki bulma, olmayana ergi ve ters örnek gösterme ispatlama yöntemleriyle yapılmış geçerli ispatların yanında, doğrudan ispatlama yöntemiyle yapılmış geçersiz ispat, tümevarımsal argüman ve yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argüman olmak üzere toplam yedi adet ispat değerlendirme aktivitesi yer almaktadır. Çalışmada kullanılan önermeler öğretmen adaylarının ilgili derslerden aşina oldukları önermelerdir. Bu etkinliklerle öğretmen adaylarının ispatlama sürecinin önemli bir parçası olan başkası tarafından yapılan ispatların doğruluğunu ya da yanlışlığını nasıl değerlendirdikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Tümevarımsal ispat yöntemi ile yapılmış ispatlara yer verilmemesinin sebebi, tümevarımsal ispat yönteminin kendine has adımları sebebiyle fark edilmesinin kolay olmasıdır. Bu yüzden tümevarımsal ispat yöntemiyle yapılan ispatlarda detaylı inceleme yapmadan, sadece ispatın görüntüsüne bakarak kullanılan ispatlama yönteminin belirlenme ihtimali yüksektir. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirmelerinin ardından argümanları "doğru", "kısmen doğru" ve "yanlış" seçeneklerinden biri ile belirtmeleri ve verdikleri kararların gerekçelerini yazmaları istenmiştir.

Veri toplama araçlarının geliştirilmesinde geçerlik çalışmaları kapsamında altı uzman akademisyenin görüşüne başvurulmuş ve pilot uygulama yapılmıştır. Bu uzmanlar bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik ve ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi alanında doçent ve yardımcı doçent olarak görev yapmaktadırlar. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda formda bulunan yazım hataları ve matematiksel hatalar düzeltilmiştir. Tablo 1'de çalışmada kullanılan önermelere ait argümanlar hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 1.
Çalışmada Kullanılan Önermelerin Doğruluğunu veya Yanlışlığını Göstermek için Üretilen Argümanların Özellikleri

Görüşme konuları	Önermeler	Önermeler için üretilen argümanların özellikleri
Fonksiyonlar	*$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ birer fonksiyon olsunlar. Eğer f ve g fonksiyonları birebir ise gof fonksiyonu da birebirdir."*	Teoremin doğruluğu gösteren doğrudan ispat yöntemiyle yapılmış geçerli ispat.
	$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $D \subset A$ olsun. O halde $f^{-1}(f(D)) \subset D$'dir.	Söz konusu yanlış bir önermenin doğruluğunu göstermek için üretilen geçersiz dedüktif bir argüman.
Diziler	*Dizilerin limiti varsa tektir*	Çelişki bulma yöntemiyle yapılmış geçerli bir ispat.
	(s_n) herhangi bir reel sayı dizisi olsun. (s_n) dizisinin herhangi bir yığılma noktası var ise yakınsaktır.	Söz konusu önermenin yanlış olduğunu göstermek için ters bir örnek yardımıyla yapılan ispat.
Limit	*$f(x), h(x), g(x)$ fonksiyonları $x = a$ noktası hariç bu noktayı ihtiva eden uygun bir açıklıkta tanımlı olsun. Bu aralıkta $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ olmak üzere $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$*	Teoremin ispatında bulunan önemli bir kilit ifade değiştirilmek suretiyle geçersiz hale getirilen ispat.
Türev	*$A \subset R$, $a \in A$ ve $f: A \rightarrow R$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli değil ise türevli de değildir.*	Teoremin doğruluğunu gösteren, olmayana ergi ispatlama yöntemiyle yapılan geçerli ispat.
	Her tek fonksiyonun türevi çift, çift bir fonksiyonun da türevi tek bir fonksiyondur.	Teoremin doğruluğunu göstermek için tek bir örnek çifti üzerinden yapılmış tümevarımsal argüman.

Veri Toplama Süreci

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yardımıyla dört haftada toplanmıştır. Öğretmen adaylarına görüşmelere başlamadan önce çalışma hakkında gerekli bilgiler verilmiştir. Çalışmanın gönüllülük esasına göre yürütüleceği ve istedikleri zaman çalışmadan ayrılabilecekleri ifade edilmiştir. Öğretmen adaylarının isimlerinin gizli tutulacağı ve takma isimlerin kullanılacağı belirtilmiştir. Çalışmanın video kaydı altına alınması planlanmış fakat pilot uygulamadan elde edilen bilgiler doğrultusunda, öğretmen adaylarının bu durumdan tedirgin olacakları ve dikkatlerini çalışmaya veremeyecekleri düşüncesiyle çalışma ses kaydı altına alınmıştır.

Görüşmeler araştırmacı ile öğretmen adaylarının dışsal faktörlerden etkilenmeyeceğine inanılan bir ortamda gerçekleşmiştir. Öğretmen adaylarından görüşmeler sırasında sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Öğretmen adayları da genellikle düşüncelerini sesli olarak ifade etmişlerdir. Görüşmeler sırasında araştırmacı, öğretmen adaylarını yönlendirici davranışlardan kaçınmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının düşüncelerini anlamak için sıklıkla sorular sorulmuştur. Görüşmelere başlamadan önce araştırmacı tarafından sorulacak olan soruların onların ne düşündüklerini anlamak için olduğu, kesinlikle yönlendirici bir nitelik taşımadığı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarına da araştırmacıdan bir onay beklememeleri ve buna yönelik soru sormamaları istenmiştir.

Veri Analizi

Öğretmen adaylarından başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarından değerlendirme yaparken sesli düşünmeleri rica edilmiştir. Araştırmacı gerekli yerlerde öğretmen adaylarına sorular sorarak düşüncelerini açığa çıkarmaya çalışmıştır. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirmelerinin ardından doğru, kısmen doğru ve yanlış seçeneklerinden biri ile belirtmeleri ve verdikleri kararların gerekçelerini yazmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken sesli düşünceleri, araştırmacının sorularına verdikleri yanıtlar ve yazdıkları gerekçeler ortak olarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarından elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizinden faydalanılmıştır. Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken ne tür stratejiler kullandıkları üzerine odaklanılmıştır.

Bulgular

Çalışmada öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken çoğunlukla birden çok strateji kullandıkları tespit edilmiştir. Çalışmada yapılan içerik analizi sonucunda, kullanılan stratejilerin genel olarak argüman incelemesi, yapısal inceleme ve otoriter inceleme olmak üzere üç kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Ayrıca bu kategorilerin altında birçok alt kategori tespit edilmiştir. Tablo 2'de öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler sunulmuştur.

Tablo 2.
Öğretmen Adaylarının Başkası Tarafından Yapılan İspatları Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler

Stratejiler	*f*	*Göstergeler*
Argüman incelemesi	47	*Öğretmen adayları ispatları satır satır incelerler. İspatların içerisindeki lokal argümanlara odaklanırlar. İspatların satırları içerisinde işlemsel bir hatanın mevcut olup olmadığını, bir ifadeden diğerine geçilirken kullanılan gerekçelerin doğruluğunu kontrol ederler. İspatlarda önemli bir yere sahip olan ve teoremin hipotezlerinden elde edilen verileri bir sonraki aşamaya taşımayı sağlayan kilit ifadelere dikkat ederler. Kilit ifadeler sayesinde teoremin hipotezinden elde edilen bilgiler, kavramsal anlayışlar işe koşularak teoremin hükmüne ulaşmada kullanılabilmesi için hazır hale getirilir.*
Yapısal inceleme	74	*Öğretmen adayları ispatları, ispatın içeriğine girmeden, ispatın basamaklarının doğruluğunu ya da basamaklar arasındaki ilişkiyi sorgulamadan incelerler. İspatın doğruluğuna dışarıdan bakarak yapısal özelliklerine göre karar verirler. Yapısal inceleme stratejisini yüzeysel inceleme ve ispatlama yöntemi olarak iki gruba ayırmak mümkündür. Yüzeysel inceleme yapan öğretmen adayları tanımların ve teoremin hipotezlerinin kullanılıp kullanılmamasına dikkat ederler. Ayrıca ispata nasıl başlandığı ve teoremin hükmüne ulaşılıp ulaşılamamasına odaklanarak başlangıç ve sonuç odaklı bir yaklaşım sergilerler. Bazı durumlarda, öğretmen adayları ispatları incelerken kullanılan ispatlama yönteminin uygunluğuna ya da argümanların yapılarına dikkat ederler. Örneğin bazı öğretmen adayları tümevarımsal argümanları ispat olarak kabul ederken bazıları da öğrendiği ispatlama yönteminden farklı bir ispatlama yöntemi ile yapılmış ispatları kabul etmezler.*
Otoriter inceleme	9	*Öğretmen adayları ispatları incelerken ispatlardaki argümanları sorgulamaz ya da ispatları yapısal olarak incelemeye çalışmazlar. Sorulan ispat daha önce ezberledikleri ya da kendilerine tanıdık gelen bir ispat ise ispatı hatırlamaya çalışırlar. Öğrendiği ispata benzer semboller ya da ifadeler ararlar. Bazı öğretmen adayları da ispatları değerlendirirken bildikleri farklı ispatları düşünerek incelemekte olduğu ispata uyarlamaya çalışırlar. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğu için verdikleri kararlar, daha önce hocalarının yaptığı ya da kendilerinin ezberledikleri ispatları hatırlama durumları ile yakından alakalıdır.*

Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde, ispatların doğruluğunu değerlendirmek için üç kategori altında 15 farklı yaklaşım tarzının sergilendiği belirlenmiştir. Çalışma boyunca öğretmen adaylarının 130 ispat değerlendirme stratejisi kullandıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adayları ispatları değerlendirirken genel olarak argüman incelemesi, yapısal inceleme ve otoriter inceleme stratejilerini takip etmişlerdir. Yapısal inceleme stratejisi kendi içerisinde yüzeysel inceleme ve ispatlama yöntemi olarak iki gruba ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının çalışmanın bütününde sergiledikleri 130 yaklaşımın 74'ünün yapısal olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının çalışmada en çok tercih ettikleri stratejilerden biri ispatların içerisindeki lokal argümanları inceleme olmuştur. Bu strateji 47 kez kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının kullandıkları dokuz ispat değerlendirme stratejisi ise otoriter bilgilere yöneliktir. Bu stratejiler hakkında detaylı bilgiler aşağıda bölümler halinde sunulmuştur.

Fonksiyonlar Konusunda Kullanılan İspat Değerlendirme Stratejileri

Öğretmen adaylarına fonksiyonlar konusunda ilk olarak "*$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ birer fonksiyon olsunlar. Eğer f ve g fonksiyonları birebir ise gof fonksiyonu da birebirdir.*" teoreminin doğrudan ispat yöntemiyle yapılmış geçerli ispatı sunulmuştur. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejilerin üç kategori ve altı alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 3'de öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler ve argümanın doğruluğu için verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 3.

Öğretmen Adaylarının Fonksiyonlar Konusundaki İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Yapısal inceleme	Birebir fonksiyon tanımı	✓					✓	✓	✓
	Teoremin hipotezi kullanılıp hükmünün bulunması				✓	✓		✓	
	İspatın başlangıcı		✓				✓		
	Teoremin hipotezlerinin kullanılması		✓						✓
Otoriter inceleme	Öğrenilen ispatla uyum								✓
Verilen Karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

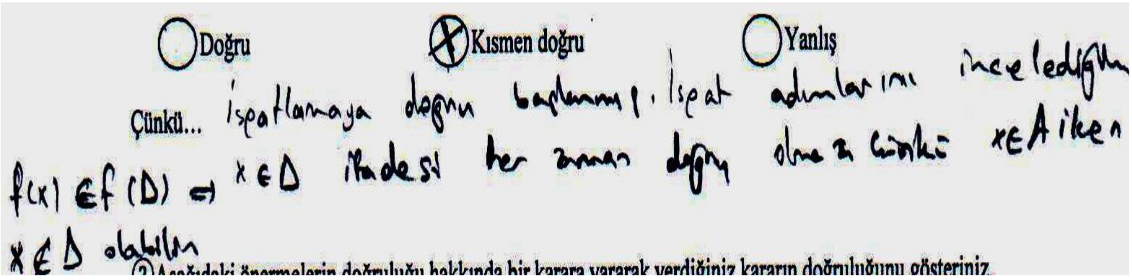
Öğretmen adaylarının tümü teoremin doğru bir şekilde ispatlandığını belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının çoğunun (Belma hariç) ispatın içeriğinde işlemsel bir hatanın olup olmadığını sorguladıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları ispatın basamakları arasındaki geçişlerin gerekçelerine ve basamaklarda işlemsel bir hatanın olmamasına dikkat etmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Bilge, Buse, Belma) ispatta birebir fonksiyon tanımının kullanılıp kullanılmadığını incelemiştir. Öğretmen adaylarının üçü (Aysun, Barış, Buse) teoremin hipotezinin ispatta kullanılarak hükmün bulunmasını göz önüne almışlardır. İki öğretmen adayı (Adem, Belma) özellikle teoremin hipotezinin ispatta kullanılmasına dikkat etmişlerdir. İki öğretmen adayı da (Adem, Bilge) ispata nasıl başlandığına odaklanmışlardır. Belma ise ispatı değerlendirirken ispatın önceden öğrendiği ispatlarla uyumlu olup olmadığını düşünmüştür.

Öğretmen adaylarına fonksiyonlar konusunda yanlış bir önermeye ait dedüktif argüman sunulmuştur. Öğretmen adaylarından argümanı incelemeleri ve doğruluğu hakkında karar vermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarınca "*$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $D \subset A$ olsun. O halde $f^{-1}(f(D)) \subset D$'dir.*" yanlış önermesinin doğrulaması yapılmıştır. Bu argümantasyonda yer alan "$f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in D$" argümanı her durumda doğru olmayan bir argümandır. Öğretmen adaylarının argümanı incelerken kullandıkları stratejiler incelenmiştir. Kullanılan stratejilerin iki kategori ve üç alt kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 4'de öğretmen adaylarının kendilerine sunulan argümanı değerlendirirken kullandıkları stratejiler sunulmuştur.

Tablo 4.
Öğretmen Adaylarının Yanlış Önerme İçin Üretilen Dedüktif Argümanı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	Gerekçe kontrolü	✓	✓	✓	✓	✓			
Yapısal inceleme	Hipotezden hükme ulaşma	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	Tanımların kullanılması	✓	✓			✓			✓
Verilen karar		Doğru	Kısmen doğru	Doğru	Kısmen doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 4 incelendiğinde, argümanın doğru olmadığını Aysun ve Adem'in fark ettiği ortaya çıkmıştır. Argümanın kısmen doğru olduğunu belirtmişlerdir. Diğer öğretmen adayları ise söz konusu argümanın doğru ve ikna edici olduğunu ifade etmişlerdir. Argümanı değerlendirirken kullanılan stratejiler incelendiğinde, öğretmen adaylarının çoğunun verdikleri kararlarda argümanın başlangıcının ve elde edilen sonucun etkili olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının çoğu ispata nereden başlandığı, elemanların hangi kümeden seçildiği ve sonucun ne olduğu ile ilgilenmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı da yapılan işlemlerin alt küme ve ters fonksiyon tanımları ile uyumlu olup olmamasına dikkat ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının çoğunluğu da argümantasyonda bulunan argümanların doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Argümanlarda bulunan verilerden sonuca nasıl gidildiğini, yani argümanların gerekçelerini bulmaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adayları özellikle yanlış ifade olan "$f(x) \in f(D) \Longrightarrow x \in D$" argümanının gerekçesini, anlamaya çalışmışlardır. Bu öğretmen adaylarından Adem, argümanın doğru bir ispat olmadığını belirterek açıklama yapmıştır. Kendisine yöneltilen argümanın da kısmen doğru olduğunu belirtmiştir. Adem kullanılan yöntemin geçerli bir yöntem olduğunu düşündüğü için argümanın doğruluk yönünün olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda örnek olarak Adem'in gerekçesi sunulmuştur.



Şekil 1. Adem'in gerekçesi

Diziler Konusunda Kullanılan İspat Değerlendirme Stratejileri

İkinci görüşmelerde öğretmen adaylarının diziler konusunda kendilerine yöneltilen çelişki bulma ispat yöntemi ve ters örnek kullanılarak yapılmış ispatları nasıl değerlendirdikleri incelenmiştir. Öğretmen adaylarına ilk olarak "*Dizilerin limiti varsa tektir.*" teoreminin doğru bir şekilde yapılmış ispatı sunulmuştur. Kullanılan stratejiler ve verilen kararlar Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5.
Öğretmen Adaylarının İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İspat basamakları ve işlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
	n_0 ın seçimi		✓	✓					
Yapısal inceleme	İspatlama yöntemi	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Yakınsak dizi tanımı	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Otoriter inceleme	Öğrenilen ispatla uyum					✓	✓		✓
Verilen karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 5'e göre, öğretmen adaylarının kendilerine sunulan ispatın doğru bir ispat olduğunu belirleyebildikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının doğru ispatı seçme becerilerinin yüksek olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken nelere dikkat ettikleri incelendiğinde, hepsinin öncelikle ispatlama yöntemine ve yakınsak dizi tanımının kullanılmasına dikkat ettikleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yarısından fazlası (Ahu, Adem, Aziz, Barış ve Bilge) ispat basamaklarındaki geçişlere ve bu geçişlerde işlemsel hata olup olmamasına odaklanmışlardır. Üç öğretmen adayı (Barış, Bilge ve Belma) ispatı değerlendirirken, otoriter bir bakış açısı ile daha önce öğrendikleri ispatla uyumlu olmasına dikkat etmişlerdir. İki öğretmen adayı (Adem ve Aziz) ise ispatta bulunan n_0 teriminin nasıl seçildiğini göz önünde bulundurmuşlardır.

Öğretmen adaylarının verdikleri kararlarda ispatlama yöntemini değerlendirmeleri önemli bir yer tutmuştur. Öğretmen adayları ispatlama yöntemini doğru bir şekilde belirlemede sıkıntı çekmişlerdir. Öğretmen adaylarından Ahu, Adem ve Aysun ispatın çelişki bulma yöntemiyle yapıldığını belirtip açıklayabilirken, diğerleri ise ispatın olmayana ergi ispatlama yöntemiyle yapıldığını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarına, ispatın neden olmayana ergi yöntemi ile yapıldığını düşündükleri sorulduğunda uygun bir açıklama yapamamışlardır. Bu durumun sebebi incelendiğinde ise, öğretmen adaylarının çelişki bulma yöntemi ile olmayana ergi ispatlama yöntemini birbirinden ayırt edemedikleri tespit edilmiştir. Aşağıda ispatlama yöntemini doğru bir şekilde tespit eden öğretmen adaylarından Ahu ile araştırmacı arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.

Ahu: *Hocam tersini kabul etmiş. Sonra aslında aldığımız iki tane limitin bir tane olduğunu göstermiş. Yani tersini kabul edip öyle olmadığını göstermiş.*

Araştırmacı: *Hangi ispatlama yöntemi ile yapılmış?*

Ahu: *Olmayana ergi $q' \Rightarrow p'$ idi. Burada q' yani. Olmayana ergi mi, çelişki bulma mı? Çelişki bulma sanki.*

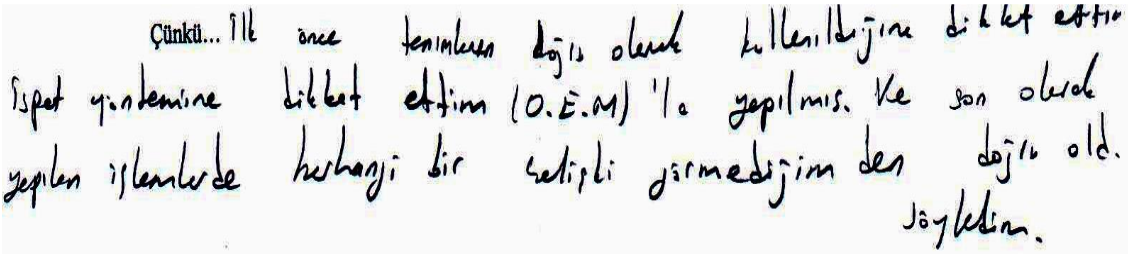
Araştırmacı: *Neden çelişki bulma?*

Ahu: *Tersini varsayalım diye başlıyoruz?*

Araştırmacı: *Olmayana ergi yöntemi ile çelişki bulma yöntemi arasındaki fark nedir?*

Ahu: *Çelişki bulmada tersini varsayıyorduk, daha sonra onun doğru olmadığını gösteriyorduk. Olmayana ergide de yine önermenin tersini alıyorsun yine tersini buluyorsun. Sembolik olarak $p \Rightarrow q$ önermesi için $q' \Rightarrow p'$ idi.*

Ahu, Adem ve Aysun'un dışındaki öğretmen adayları ispatın olmayana ergi ispatlama yöntemi ile yapıldığını belirtmişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın gerekçesine ve araştırmacı ile arasında geçen konuşmaya yer verilmiştir.



Şekil 2. Barış'ın gerekçesi

Araştırmacı: *Neden olmayana ergi yöntemi?*

Barış: *Bu gibi şeylerde onu kullanıyoruz. Diyelim ki A noktasından B noktasına iki farklı yoldan gidiliyor. Sen bunu ispatlamaya geçtiğin zaman A ve B noktalarına bir yoldan gidilsin diyor. Kabul ediyor bunu. Bu şekilde yapılan ispatlara olmayana ergi metodu diyoruz.*

Araştırmacı: *Peki, çelişki bulma yöntemiyle arasındaki fark nedir?*

Barış: *Çelişki bulmayı biraz andırıyor ama tam karşılığını vermez. Çelişki var ama olmayana ergi de, kabul ettiği bir şeye çelişki var. Hani iki tane limiti olsun diyor sonra aynı olduğunu buluyor bu bir çelişkidir. Çünkü bir tane limiti olmuş diyor. Yani kabul ettiği şeyle çelişmiş oluyor. Aradaki fark bu.*

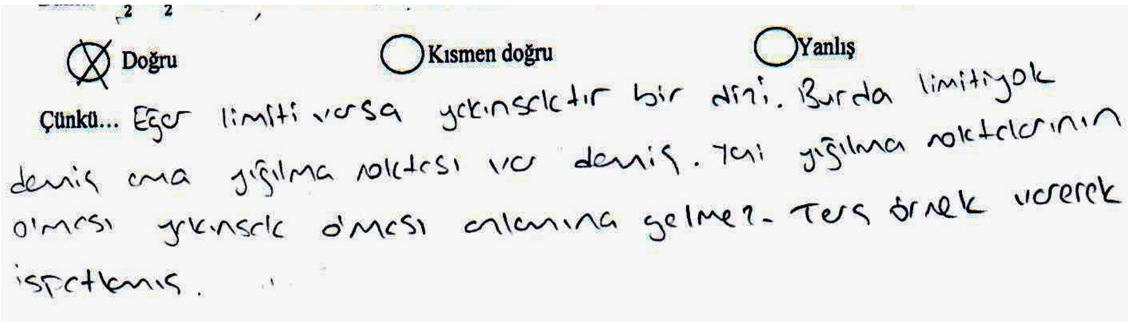
Öğretmen adaylarına değerlendirmeleri için bir dizinin yığılma noktası ile limiti arasındaki ilişki ile ilgili olan *"(s_n) herhangi bir reel sayı dizisi olsun. (s_n) dizisinin herhangi bir yığılma noktası var ise yakınsaktır."* yanlış önermesinin, ters bir örnek yardımıyla yanlışlığı gösterilmiştir. Öğretmen adaylarından ters örnek ile yapılan ispatı değerlendirmeleri ve bu ispatın doğruluğu hakkında karar vermeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının ters örnekle yapılan ispatı değerlendirirken ne tür stratejiler uyguladıkları incelenmiştir. Tablo 6'da öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

Tablo 6.
Öğretmen Adaylarının Ters Örnek Kullanılarak Yapılan İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	Gerekçeleri inceleme	✓	✓	✓		✓	✓		
Yapısal inceleme	İspatlama yöntemi	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Otoriter inceleme	Geçmiş bilgiler						✓		
	Otoriter bilgiler							✓	
Verilen karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Yanlış	Kısmen doğru

Tablo 6 incelendiğinde öğretmen adaylarından sadece iki öğretmen adayının (Buse ve Belma) ters örnek ile yapılan ispatın doğru olmadığını ifade ettikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının tümü ispatı değerlendirirken ispatın yapılış yöntemini dikkate almışlardır. Öğretmen adaylarından yarısından fazlası (Ahu, Adem ve Aziz) ispatta kullanılan gerekçeleri incelemiştir. Bilge ispatı sorgulamadan geçmiş bilgilerinden yardım alarak değerlendirirken, Buse ders hocasının onun ifade ettiği şekilde bir bilgi verdiğini iddia ederek otoriteden gelen bilgilerini kullanmıştır.

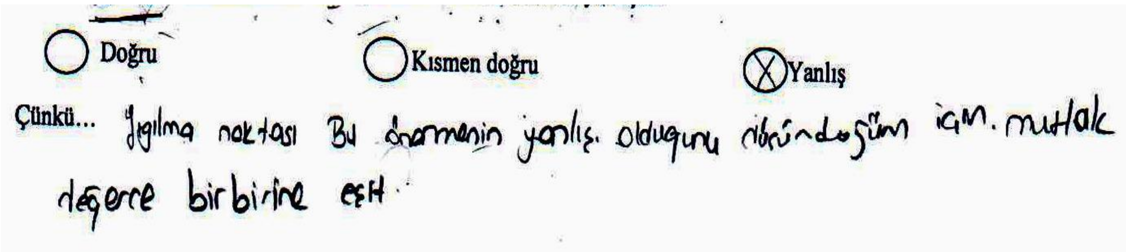
Öğretmen adaylarının hepsi ispata yönelik değerlendirme yaparken ispatın yöntemine dikkat etmişlerdir. Verdikleri kararlarda büyük oranda ispatın nasıl yapıldığı etkili olmuştur. Öğretmen adaylarının çoğu, ters örnek üretilerek yapılan ispatın doğru bir ispat olduğunu ifade etmişlerdir. Söz konusu ters örneğin önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu vurgulamışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Aysun'un sunduğu gerekçeye yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Eğer limiti varsa yakınsaktır bir dizi. Burda limiti yok demiş ama yığılma noktası var demiş. Yani yığılma noktalarının olması yakınsak olması anlamına gelmez. Ters örnek vererek ispatlamış.

Şekil 3. Aysun'un gerekçesi

Buse ise ispatta yer alan ters örneğin uygun bir ters örnek olmadığını ifade etmiştir. Buse ifadelerinde söz konusu ters örneğin yığılma noktalarının mutlak değerce birbirine eşit olduğunu ifade ederek bu örneğin uygun olmadığını belirtmiştir. Buse'nin ifadelerinden ne demek istediği tam olarak anlaşılamamaktadır. Buse bu düşüncesine dayanak olarak ilgili dersin hocasını göstermiştir. Ders hocasının onun ifade ettiği şekilde söylediğini iddia etmiştir. Aşağıda Buse'nin gerekçesine ve konu ile ilgili ifadelerine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Yığılma noktası bu önermenin yanlış olduğunu düşündüğüm için. mutlak değerce birbirine eşit.

Şekil 4. Buse'nin gerekçesi

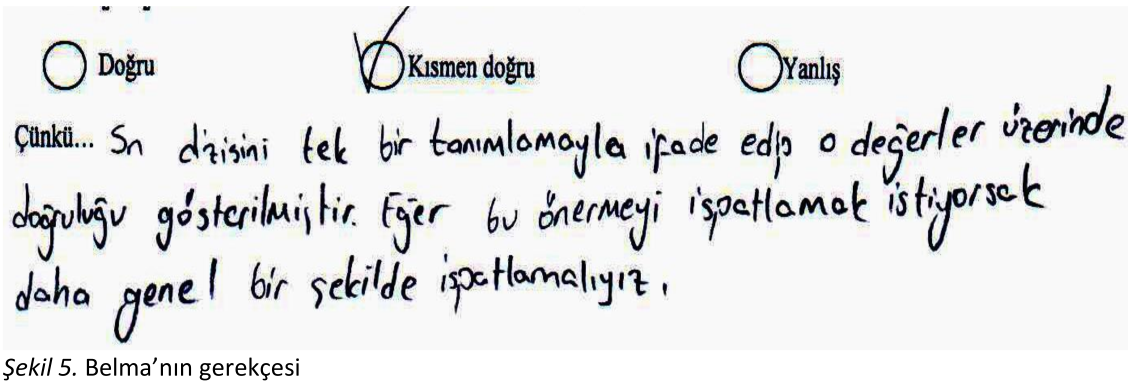
Araştırmacı: *Bu yapılan sana neden ikna edici gelmedi?*

Buse: *Burada seçtiği yığılma noktaları iki tane olsa bile -½ ve ½ mutlak değerce birbirine eşit. O yüzden bana yanlış geldi sanki.*

Araştırmacı: *Neden mutlak değerini alıyorsun?*

Buse: *Bu şekilde olduğu zaman mutlak değeri olamıyor muydu? Ben öyle hatırlıyorum. Bilmiyorum ama hocanın söylediklerini öyle gözümde canlandırmış olabilirim. Hocanın söylediklerinden ben öyle anladım.*

Belma ters bir örneğin bu önermeyi yanlışlamak için yeterli olmadığını, daha genel bir şekilde ispatlanmasının gerekli olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden yapılan ispatın da kısmen doğru olacağını ifade etmiştir. Buna göre Belma'nın ters örneklerle yapılan ispatlara yönelik bilgisinde eksikliklerin olduğu söylenebilir. Aşağıda Belma'nın gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış

Çünkü... Sn dizisini tek bir tanımlamayla ifade edip o değerler üzerinde doğruluğu gösterilmiştir. Eğer bu önermeyi ispatlamak istiyorsak daha genel bir şekilde ispatlamalıyız.

Şekil 5. Belma'nın gerekçesi

Öğretmen adaylarının yarısından fazlası ispatta bulunan argümanların gerekçelerini incelemişlerdir. Öğretmen adayları bu argümanlarda ya işlem hatası olup olmamasını ya da elde edilen sonuçların mantıksal olarak doğru olup olmamasına dikkat etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının çoğu, ispatta yer alan ifadelerin sebeplerini doğru bir şekilde sorgularken bazıları ise matematiksel olarak yanlış gerekçeler sunmuşlardır. Ahu, Adem ve Aziz ispatta yer alan ters örnek olarak verilen dizinin yığılma noktalarını sorgularken matematiksel olarak doğru gerekçeler kullanmışlardır. Aziz, dizinin yığılma noktalarının alt dizilerinin limitinden geldiğini ifade etmiştir. Aşağıda Aziz'in ifadeleri yer almaktadır.

Araştırmacı: *½ ve -½ nereden geliyor?*

Aziz: *Sonsuza giderken dizinin limitine baktığımız zaman bir pozitif, bir negatif oluyor. Çiftler için pozitif oluyor ½, tekler için -½ oluyor.*

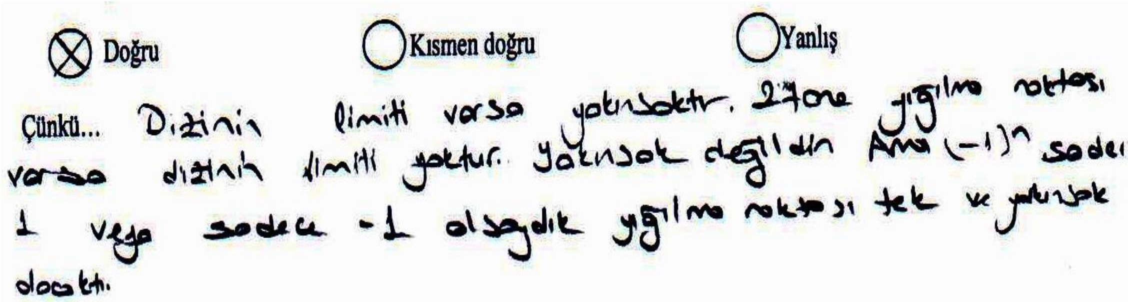
Araştırmacı: *Çift ve tek dediğin şey nedir?*

Aziz: *Tekler ve çiftler bu dizinin iki alt dizisi. Alt dizilerin limitleri farklı olduğu için ıraksaktır.*

Öğretmen adaylarından Bilge ise yığılma noktaları olan ½ ve -½ nin nereden geldiğini ifade ederken dizilerdeki limit kavramını fonksiyonların bir noktadaki limiti kavramı ile karıştırmıştır. Bu durumun sebebinin Bilge'nin yakınsak dizi tanımına yönelik kavramsal bilgi eksikliği olduğu ortaya çıkmıştır. Dizi kavramına yönelik etkinliklere başlamadan önce yakınsak dizi tanımını açıklarken de süreklilik kavramı ile ilgili ifadeler kullanmıştır. Burada da yakınsak dizi kavramı ile fonksiyonların bir noktadaki limiti kavramı arasındaki ayırımı yapamadığı ortaya çıkmıştır. Yığılma noktalarının sağ limit ve sol limitten geldiğini ifade etmiştir. Aşağıda Bilge'nin ifadeleri yer almıştır.

Bilge: *Buradaki $(-1)^n$ de n yerine 2n olsaydı, sağ limiti 1 olacaktı. O zaman da limiti var diyecektik ve yakınsak olacaktı. Burada -1 işin içine girdiği için, limiti olmadığı için ikna oldum.*

Ayrıca Bilge ispatı değerlendirirken daha önceki bilgilerinin etkisi ile karar vermiştir. Bilge bir dizinin iki tane yığılma noktası varsa dizinin ıraksak olacağı bilgisini kullanarak karar vermiştir. Aşağıda Bilge'nin kararının gerekçesine yer verilmiştir.


Doğru Kısmen doğru Yanlış
Çünkü... Dizinin limiti varsa yakınsaktır. 2 tane yığılma noktası varsa dizinin limiti yoktur. Yakınsak değildir. Ama $(-1)^n$ sadece 1 veya sadece -1 olsaydık yığılma noktası tek ve yakınsak olacaktı.

Şekil 6. Bilge'nin gerekçesi

Barış ise ters örnekte verilen dizinin neden ıraksak olduğunu sorgularken sıklıkla dizileri reel sayı serileri ile karıştırmıştır. Serilerin yakınsaklık karakterini belirlemede geçerli olan özellikleri dizinin karakterini belirlemek için kullanmıştır. Aşağıda Barış'ın ifadelerinden bölümlere yer verilmiştir.

Barış: *Genel teriminin limiti sıfırdan farklı ise ıraksak diyorduk… Alterne seri, dizileri de serilerin aynı şeyinden yapıyoruz. Yani terimleri çift için artı, tek için eksi… Tamam hocam birkaç değer verelim. Artan, azalan dizi olduğunu görürüz. Hocam mesela a_{n+1} ile a_n i oranlarız, farkını alırız.*

Limit Konusunda Kullanılan İspat Değerlendirme Stratejileri

Üçüncü görüşmede öğretmen adaylarının limit konusundaki yanlış yapılmış bir ispatı nasıl değerlendirdikleri araştırılmıştır. Öğretmen adaylarına "*$f(x), h(x), g(x)$ fonksiyonları $x = a$ noktası hariç bu noktayı ihtiva eden uygun bir açıklıkta tanımlı olsun. Bu aralıkta $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ olmak üzere $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$*" teoreminin yanlış bir şekilde yapılmış ispatı sunulmuştur. Bu ispatın orijinalinde yer alan “$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$" ifadesi “$\delta = \mathrm{maks}\{\delta_1, \delta_2\}$” olarak değiştirilmiştir. İspatta yapılan böyle bir değişiklik ispatın genellenebilirliğine zarar vermekte ve ters bir örnekle yanlışlanabilmektedir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejilerin üç kategori ve yedi alt kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 7’de kullanılan stratejiler ve verilen kararlar sunulmuştur.

Tablo 7.

Öğretmen Adaylarının Limit Konusundaki İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

	Stratejiler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata ve basamak kontrolü	✓		✓	✓	✓	✓		
	$\boldsymbol{\delta}$ nın seçimi	✓	✓	✓	✓				
Yapısal İnceleme	Hipotezin kullanılması	✓	✓						✓
	Limit tanımının kullanılması	✓	✓	✓	✓	✓		✓	
	Hükme ulaşılması					✓		✓	
Otoriter inceleme	Öğrenilen ispatla uyum						✓		✓
	Uyarlama					✓			
Verilen Karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru

Tablo 7’ye göre öğretmen adaylarının hepsinin, yanlış olan bu ispatın doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının limit konusunda yapılan yanlış ispatı belirleme becerilerinin oldukça düşük olduğu söylenebilir. Öğretmen adayları ispatı değerlendirirken çoğunlukla limit tanımının ispatta kullanılmasına ve ispat basamaklarında işlemsel ve mantıksal olarak bir hata bulunup bulunmamasına dikkat etmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı da (Ahu, Adem, Aziz, Aysun) ispatta δ sayısının seçimini göz önüne almışlardır. Öğretmen adaylarının çoğu ispatın yapısına dikkat ederek teoremin hipotezinin ispatta kullanılması ve hükme ulaşılması ile ilgilenmişlerdir. İki öğretmen adayı (Bilge ve Belma), ispatın daha önceden bildikleri ispatla uyumlu olmasına dikkat etmişlerdir. Barış farklı bir konudaki ispatı söz konusu ispata uyarlayarak değerlendirmiştir.

Ahu, Aziz, Adem ve Aysun’un ispatı değerlendirirken ispatta yer alan δ sayısının seçimine dikkat ettikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adayları yaptıkları değerlendirmelerde ve ürettikleri argümanlarda doğru gerekçeler sunmalarına rağmen δ sayısının doğru seçildiğini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları limit tanımına yönelik kavramsal bilgilerin yeterli düzeyde olmasına rağmen δ nın doğru bir şekilde seçildiğini ifade etmişlerdir. Bu durumun sebebinin, bir önceki görüşme olan diziler ile ilgili yapılan ispatta kesme noktasının seçiminin etkili olduğu düşünülmüştür. Buna en iyi örnek Aziz’in durumudur.

Etkinlik temelli görüşmelere başlamadan önce ispatla ilgili Aziz’in görüşleri alınırken doğru bir ispatta neler olması gerektiği de sorulmuştu. Buna cevap olarak Aziz, ispatlarda bulunan kilit ifadelerin önemli olduğunu ifade etmişti. Kilit ifadelere örnek olarak fonksiyonların limiti ile ilgili ispatlarda δ nın minimum seçilmesini vermişti. Eğer δ minimum seçilmezse ispatın yanlış olacağını belirtmişti. Aziz, bu ispatı değerlendirirken δ nın nasıl seçildiğine dikkat etmiştir. Aziz δ nın seçimi için uygun gerekçeler öne sürmesine rağmen ısrarla δ nın doğru bir şekilde seçildiğini iddia etmiştir. Buna göre Aziz ile beraber Ahu, Aysun ve Adem’in fonksiyonlar ve dizilerin limiti tanımlarına yönelik kavramsal bilgileri yeterli seviyede olmasına rağmen reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların bir noktadaki limiti ile reel sayı dizilerin limiti arasındaki fark hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları söylenebilir. Aşağıda Aziz’in konu ile ilgili ifadelerine yer verilmiştir.

Aziz: *Evet doğru yapmış. İşlemlerde bir sıkıntı yok. Tanımları doğru kullanmış, yine sağlamadığı durumları ortadan kaldırmak için $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ seçmiş. Eşitsizliği doğru kullanmış. Herhangi bir işlem hatası yok.*

Araştırmacı: *Neden $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilmiş?*

Aziz: *İlkine a nın δ_1 komşuluğundaki x ler, diğerine a nın δ_2 komşuluğundaki x ler diyoruz. İşte bu yarıçaplardan birisi ufak diğeri büyük olacak, zaten birbirinden farklı maksimum aldığımız zaman ufak olanı da kapsar. δ_1, $\delta_2$den daha büyük olsun. Şimdi maksimum aldığımız zaman δ_1 yarıçapı zaten kapsıyor. δ_2 yarıçapı da δ_1 den daha küçk olduğu için yine kapsıyor. Bu yüzden yani.*

Araştırmacı: *Minimum seçilseydi ne olurdu?*

Aziz: *Minimum seçilseydi δ_1 yarıçaplı komşulukta olup, δ_2 yarıçaplı komşulukta olmayan x ler olabilirdi. O yüzden maksimum seçtiğimiz zaman bu ortadan kalkıyor.*

Araştırmacı: *Eğer minimum seçilseydi ispatın bundan sonraki adımlarının hangisinin yazımında sıkıntı olurdu?*

Aziz: *$|f(x) - L|$ nin ε dan küçük olduğunu söyleyemezdik.*

Aziz ifadelerinde $\delta = maks\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilmesinin sebebinin sağlanmadığı durumları ortadan kaldırmak olduğunu belirtmiştir. Aziz, sağlamayan durum ile $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlamayan *x* değerlerinden bahsetmektedir. Burada Aziz tarafından açıkça belirtilmese de, Aziz'in sağlamasını istediği *x* lerin, birinci tanımda yer alan $|g(x) - L| < \varepsilon$ ve $|h(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliklerini ortak olarak sağlayan *x* değerleri olduğu anlaşılmıştır. Aziz δ nın minimum seçilmesi durumunda, bu iki eşitsizliğin kullanılarak oluşturulan $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliğin yazılamayacağını ifade etmiştir. Aziz'in sunduğu gerekçeler doğru olmasına rağmen iddiası yanlıştır. İki farklı aralıktaki elemanlar için geçerli olan iki eşitsizliğin ortak olarak kullanılabilmesi için, her iki eşitsizliği de sağlayan elemanlar seçilmelidir. Bu durum ise iki aralığın kesişiminin, yani ortak olan elemanların alınması ile mümkündür. Bu yüzden Aziz'in eşitsizliği sağlayacak *x* lerin seçilmesi düşüncesi doğru fakat bu durumun $\delta = \mathrm{maks}\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilmesi ile mümkün olacağı iddiası yanlıştır.

Türev Konusunda Kullanılan İspat Değerlendirme Stratejileri

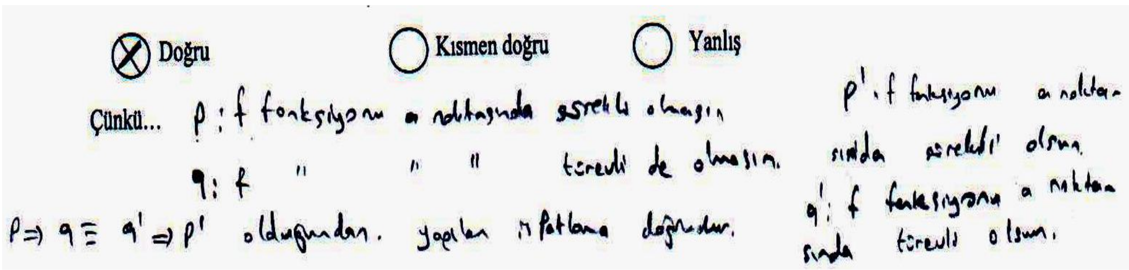
Son görüşmede öğretmen adaylarının türev konusundaki olmayana ergi ispatlama yöntemi ile yapılmış doğru bir ispatı ve tümevarımsal argümanı nasıl değerlendirdikleri araştırılmıştır. Öğretmen adaylarına ilk olarak, olmayana ergi ispatlama yöntemi ile ispatlanmış olan *"$A \subset R$, $a \in A$ ve $f: A \to R$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli değil ise türevli de değildir."* teoreminin ispatı sunulmuştur. Öğretmen adaylarından teoremin doğru bir şekilde ispatlanıp ispatlanmadığı konusunda kullanılan stratejilerin iki kategori ve beş alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 8'de kullanılan stratejiler ve verilen kararlar sunulmuştur.

Tablo 8.
Öğretmen Adaylarının İspatı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓			
Yapısal inceleme	İspatlama yöntemi	✓	✓		✓	✓			✓
	Türev tanımı	✓		✓		✓		✓	
	Sonucu bulma					✓	✓		
	Hipotezi kullanma							✓	
Verilen karar		Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Doğru	Yanlış

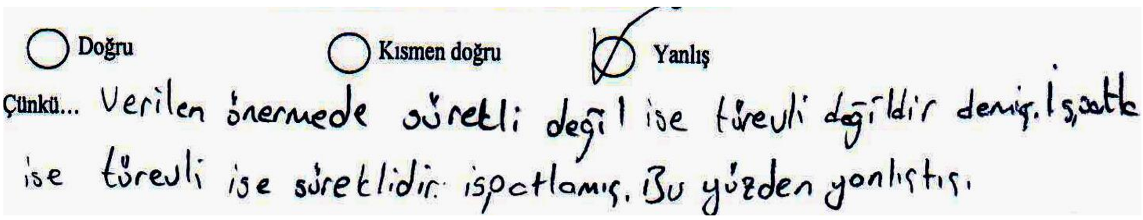
Tablo 8 incelendiğinde Belma dışındaki öğretmen adaylarının teoremin doğru bir şekilde ispatlandığını belirttikleri anlaşılmaktadır. Buna göre öğretmen adaylarının doğru yapılmış bu ispatı değerlendirme becerilerinin oldukça yüksek olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatı değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde, çoğunlukla ispatta kullanılan ispatlama yöntemine ve ispatın basamaklarında işlemsel hatanın olup olmamasına dikkat ettikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının yarısının teoremin ispatında türevin formel tanımının kullanılmasına dikkat ettikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ikisi teoremin hükmüne ulaşılıp ulaşılmadığına dikkat ederken bir öğretmen adayının ise teoremin hipotezinin ispatta kullanılıp kullanılmadığına dikkat ettiği ortaya çıkmıştır.

Öğretmen adaylarından Ahu, Adem, Aysun, Barış ve Belma ispatın doğruluğunu değerlendirirken ispatlama yöntemine dikkat etmişlerdir. Belma dışındaki öğretmen adayları teoremin olmayana ergi yöntemi ile yapıldığını belirtmiş ve olmayana ergi yöntemini doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Belma ise teoremin ispatının doğrudan ispat yöntemi ile yapıldığını belirtmiştir. İspatı değerlendirirken ispatlama yöntemine dikkat etmediği düşünülen Aziz, Bilge ve Buse'ye ispatın hangi ispatlama yöntemi ile yapıldığı sorulduğunda, Aziz çelişki bulma ispatlama yöntemi ile yapıldığını ifade etmiş fakat çelişki bulma ispatlama yöntemini açıklayamamıştır. Bilge ve Buse ise ispatlama yönteminin olmayana ergi olduğunu belirtmişler fakat uygun bir şekilde ifade edememişlerdir. Buna göre, öğretmen adaylarının çoğunun ispatın yöntemini doğru bir şekilde belirleyebilmiş olmalarına rağmen sadece yarısının olmayana ergi ispatlama yöntemini açıklayabildikleri ortaya çıkmıştır. Aşağıda Adem, Aziz ve Belma'nın ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 7. Adem'in gerekçesi

Aziz: *Olmayana ergi de tersinden miydi? Direk şey yapıyorduk… Doğru, bu teorem karşıt tersi ile ispatlandığı için bu çelişki bulma yöntemi.* $p \Rightarrow q$ *yu* $q' \Rightarrow p'$ *ile göstermeye çalışıyor. Bu yüzden bu çelişki bulma.*



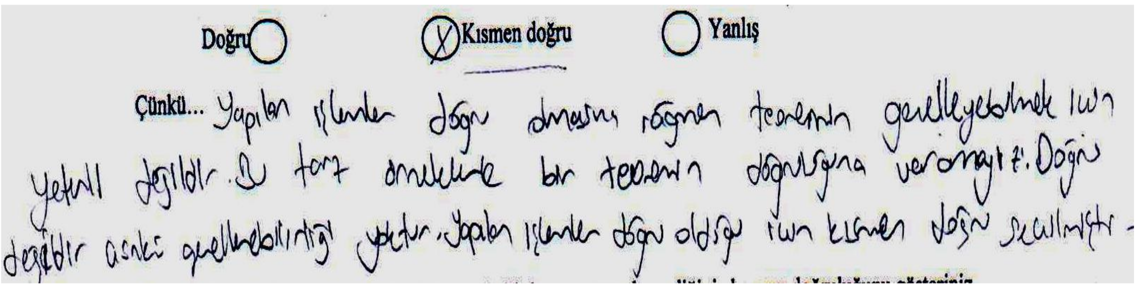
Şekil 8. Belma'nın gerekçesi

Öğretmen adaylarının başkası tarafından yapılan ispatı değerlendirme becerilerini incelemek amacıyla reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için geçerli olan *"Her tek fonksiyonun türevi çift, çift bir fonksiyonun da türevi tek bir fonksiyondur."* teoremi, tümevarımsal bir gerekçe kullanılarak doğrulanmıştır. Bu teoremin doğruluğu tek bir örnek çifti üzerinden gösterilmiştir. Öğretmen adaylarından argümanın doğruluğunu değerlendirmeleri ve bir karara varmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının argümanı değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelenmiş ve Tablo 9'da kullandıkları stratejiler ve verdikleri kararlar sunulmuştur.

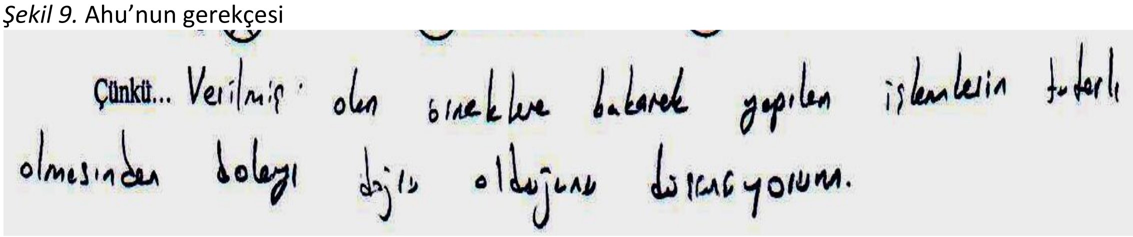
Tablo 9.
Öğretmen Adaylarının Tümevarımsal Argümanı Değerlendirirken Kullandıkları Stratejiler ve Verdikleri Kararlar

Kategoriler	Alt Kategoriler	Ahu	Adem	Aziz	Aysun	Barış	Bilge	Buse	Belma
Argüman incelemesi	İşlemsel hata	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Yapısal inceleme	Argüman yapısı	✓	✓		✓		✓		✓
Verilen karar		Kısmen doğru	Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru	Kısmen doğru	Doğru	Doğru

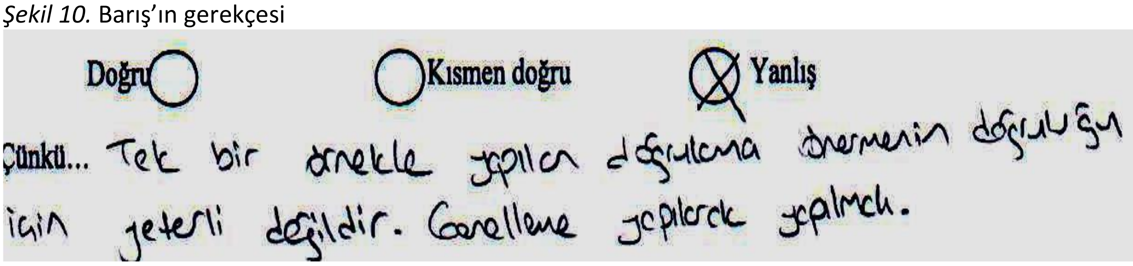
Tablo 9'daki verilere göre öğretmen adaylarının yarısının (Aziz, Barış, Belma ve Buse) tümevarımsal gerekçe kullanılarak üretilen argümanı doğru bir ispat olarak değerlendirdikleri belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının tümevarımsal argümanları geçerli bir ispat olarak değerlendirdikleri söylenebilir. Öğretmen adaylarının diğer yarısı ise tümevarımsal argümanın bir ispat olamayacağını ifade etmişlerdir. Tek bir örnek ile yapılan doğrulamanın bir önermenin doğru olduğunu göstermek için yeterli olamayacağını dile getirmişlerdir. Öğretmen adaylarından ikisi (Adem ve Aysun), bu şekilde yapılan bir doğrulamanın kesinlikle yanlış bir doğrulama olacağını belirtirken ikisi (Ahu ve Bilge) ise kısmen doğru bir ispat olacağını belirtmişlerdir. Tümevarımsal argümanı kısmen doğru olarak değerlendiren öğretmen adayları, önermenin doğrulama şeklinin yanlış olmasına rağmen yapılan işlemlerin doğru olduğunu düşündükleri için yapılan argümanı tamamen ret etmemişlerdir. Bu öğretmen adaylarına örnek olarak Ahu, Barış ve Aysun'un gerekçelerine yer verilmiştir.



Şekil 9. Ahu'nun gerekçesi



Şekil 10. Barış'ın gerekçesi



Şekil 11. Aysun'un gerekçesi

Tartışma ve Sonuç

Öğretmen adaylarının geçerli ispatları ve geçersiz ispatı değerlendirme becerileri incelendiğinde, öğretmen adaylarının doğrudan, çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemleri ile yapılmış geçerli ispatları çoğunlukla belirleyebildikleri tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının geçerli ispatları belirleyebildikleri ortaya çıkmıştır. Hiçbir öğretmen adayının geçersiz ispatı belirleyemediği görülmüştür. Öğretmen adaylarından sadece ikisi (Adem ve Aysun) yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argümanın doğru bir ispat olmadığını belirleyebilmişlerdir. Buna göre, öğretmen adaylarının geçersiz ispatları belirleyemedikleri ve başarısız oldukları tespit edilmiştir. Bu durumda öğretmen adaylarının geçerli ispatları belirlemede başarılı iken geçersiz ispatları belirlemede başarısız oldukları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin geçerli ispatları belirleme becerileri yüksek iken geçersiz ispatları belirleme becerilerinin düşük olduğu çalışmalarla benzerlik göstermektedir (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013; Goetting, 1995; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Segal, 2000; Uygan vd., 2014).

Öğretmen adaylarının çeşitli ispatlama yöntemleriyle yapılmış ispatları değerlendirmeleri incelendiğinde, bazı katılımcıların özellikle çelişki bulma ve olmayana ergi ispatlama yöntemi ile yapılmış ispatların yöntemlerini belirleyemedikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemleri ile ilgili bilgileri sorgulandığında, bazılarının bu iki ispatlama yöntemini açıklayamadıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları olmayana ergi ve çelişki bulma yöntemlerini birbiri ile karıştırmış ya da açıklayamamışlardır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin ispat yaparken uygun ispatlama yöntemini seçmede güçlük yaşadıkları araştırmalarla paralellik göstermektedir (Doruk ve Kaplan, 2015; Güler, 2013; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2003). Riley (2003) de bu sonucu destekler nitelikte bir sonuca ulaşmıştır. Çalışmasında öğretmen adaylarının %57'sinin doğrudan ispatlama yöntemi barındıran geçerli bir ispat yapabildiklerini ortaya koymuştur. Dolaylı ispatlama yöntemi ile yapılan ispatları yapma oranının ise sadece %39 olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemlerine yönelik tespit edilen bu güçlüklerin giderilmesi adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümü programında ispatın ve ispatlama yöntemlerinin tanıtıldığı Soyut Matematik dersinde ispatlama yöntemleri üzerinde önemle durulmalıdır. Özellikle öğretmen adaylarının olmayana ergi ve çelişki bulma yöntemlerini ayırt etmede sıkıntı çektikleri dikkate alınarak bu iki yöntem arasındaki temel farklılıklar vurgulanmalıdır.

Öğretmen adaylarının geçersiz ispatlara nasıl yaklaştıklarını belirlemek için öğretmen adaylarına kilit ifadesi değiştirilerek yapılmış geçersiz bir ispat sunulmuştur. Söz konusu ifade teoremin hipotezinden elde edilen verileri düzenleyerek teoremin hükmüne ulaşmak için yapılacak işlemlere zemin hazırlamaktadır. Bu ifadenin işlevinin farkında olmak, ispatın ilgili olduğu tanımlara yönelik kavramsal bilgiyi yorumlama ve kullanabilmeyi gerektirmektedir. Öğretmen adaylarının çoğu bu ifadeye dikkat etmemiştir. İspatı genellikle sonuç odaklı olarak değerlendirmişlerdir. Alcock ve Weber (2005) benzer bir çalışma yürütmüşlerdir. Çalışmalarında öğrencilere sonuç satırı doğru fakat diğer satırları uygun bir şekilde ilerlemeyen geçersiz bir ispat sunulmuştur. Öğrencilerin çoğunun ispatın geçersiz olduğunu belirleyemediklerini ortaya koymuşlardır. Öğrencilerin ispatları değerlendirirken her satırın doğru olup olmadığını kontrol etmenin yanında bir satırın bir önceki ve sonraki satırla ile olan bağlantısını kontrol etmenin gerekli olduğunu ifade etmişlerdir. Yani ispatın satırları arasındaki bağlantıyı sağlayan argümanların gerekçelerinin sorgulanmasını tavsiye etmişlerdir. Doruk ve Kaplan (2013) yaptıkları çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat değerlendirmede başarısız olduklarını tespit etmişlerdir. İspat değerlendirmede başarısız olmalarının sebebinin öğrencilerin ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmemeleri ve ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmek yerine sadece ispatları ezberlemeleri olduğunu belirtmişlerdir. Raman (2003) ispatların içerisinde anahtar düşüncelerin olduğunu, matematikçilerin kendi çalışmalarında bu anahtar düşüncelere önem verirken öğretim sırasında anahtar fikirlere gerekli vurguyu yapmadıklarını ve değerlendirmede de kullanmadıklarını ifade etmiştir. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmedikleri tespit edilmiştir. İspat ağırlıklı derslerin öğretiminden sorumlu öğretim elemanlarının ispatlardaki bu anahtar düşüncelere vurgu yapmaları önerilmektedir.

Öğretmen adaylarının ters örnek ile yapılan ispata yönelik yaptıkları değerlendirmeler incelendiğinde, öğretmen adaylarının çoğunun ters örnekle yapılan ispatı geçerli bir ispat olarak değerlendirdikleri anlaşılmaktadır. İki öğretmen adayı ise bu ispatın doğru bir ispat şekli olmadığını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları ispatta öne sürülen ters örneğin söz konusu önermeyi çürütmek için yeterli olmadığını ya da bu önermenin yanlış olduğunu göstermek için daha fazla ters örnek verilmesi gerektiğini dile getirmişlerdir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç öğrencilerin bir kısmının, bir önerme için üretilen doğru ters örneği önermenin istisnası olarak gördükleri ve önermenin hala doğru olduğunu düşündükleri çalışmaları desteklemektedir (Williams, 1979). Benzer şekilde Galbraith (1981), öğrencilerin tek bir ters örneğin, yanlış olan önermeyi çürütmek için yeterli olduğunu bilmediklerini ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının ters örneklerin yeri ve önemi hakkında yeterli bilgiye sahip olmaları adına gerekli çalışmalar yapılmalıdır. Çünkü ters örnekler varsayımların yeniden düzenlenmesini sağlar ve muhakemenin gelişmesine yardımcı olurlar (Whiteley, 2009). Bir matematiksel ispat tüm durumlar için önermenin doğruluğunu gösterirken (Stylianides ve Stylianides, 2009), bir ters örnek mevcut önermenin yanlış olduğunu gösterir (Akkaş vd., 1998; Irmak, 2008; Peled ve Zaslavsky, 1997). Zaslavsky ve Ron (1998) ters örneklerin diğer örneklerden daha güçlü bir konuma sahip olduğunu belirtmiş, tek bir ters örneğin genel sonuçları bozmak için yeterli iken destekleyici ve doğrulayıcı olarak sunulan birçok örneğin yeterli olmadığını ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının yarısı bir teorem için sunulan tümevarımsal argümanın geçerli bir ispat olduğunu belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının bir özel örneğin gerekçe olarak kullanıldığı argümanı doğru bir ispat olarak algıladıkları söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, öğretmen adaylarının tümevarımsal argümanları doğru bir ispat olarak değerlendirdikleri çalışma sonuçlarını desteklemektedir (Gholamazad, Liljedahl ve Zazkis, 2004; Goetting, 1995; Knuth, 2002).

Öğretmen adaylarının çoğu yanlış bir önerme için üretilen dedüktif argümanın doğru bir ispat olduğunu belirtmişlerdir. Sadece iki öğretmen adayı önerme için üretilen argümanın yanlış bir ispat olduğunu belirleyebilmişlerdir. Öğretmen adaylarının bu kararları vermelerinde argümanın yapısının dedüktif tarzda olmasının daha çok ön planda tutulduğu düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının çoğunun yanlış da olsa tanım, teorem ve aksiyomların kullanılarak yapılan ispatlara ikna olma eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, öğrencilerin yanlış olsa bile dedüktif argümanlara ikna oldukları yönündeki çalışma sonuçları ile örtüşmektedir (Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014). Segal (2000) çalışmasının sonucunda, öğrencilerin çoğunun dedüktif argümanı yanlış olsa bile geçerli ispat olduğunu belirttiklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin dedüktif argümanları doğru olup olmamasına bakmaksızın geçerli kabul etme eğiliminde olduklarını ifade etmiştir. Martin ve Harel (1989) öğretmen adaylarının %38 ve %52'sinin sırasıyla tanıdık ve tanıdık olmayan önermeler için üretilen yanlış dedüktif argümanları matematiksel olarak doğru kabul ettiklerini belirtmiştir. Uygan ve diğerleri (2014) de çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğunun yanlış dedüktif argümanı ispat olarak değerlendirdiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca tümevarımsal argümanların doğru bir ispat olduğunu iddia eden öğretmen adaylarının hepsinin dedüktif argümanlar kullanılarak yapılan ispatları da aynı anda ikna edici buldukları tespit edilmiştir. Bu durum Morris'in (2002) öğretmen adaylarının bazılarının hem dedüktif hem de tümevarımsal argümanları ikna edici bulduğu yönündeki çalışma sonucuyla da uyumludur.

Öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken kullandıkları stratejiler incelendiğinde, ispatların doğruluğunu değerlendirmek için üç kategori altında 15 farklı yaklaşım tarzının sergilendiği belirlenmiştir. Öğretmen adayları ispatları değerlendirirken genel olarak argüman incelemesi, yapısal inceleme ve otoriter inceleme stratejilerini takip etmişlerdir. Yapısal inceleme stratejisi kendi içerisinde yüzeysel inceleme ve ispatlama yöntemi olarak iki gruba ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının çalışmanın bütününde sergiledikleri yaklaşımların 74'ünün yapısal olduğu ortaya çıkmıştır. Yapısal inceleme yüzeysel ve ispatlama yöntemi olarak iki grupta incelendiğinde, yüzeysel incelemenin 48 defa, ispatlama yönteminin 26 defa tercih edildiği belirlenmiştir. Yüzeysel incelemede öğretmen adayları, ispatın içeriğini incelemeden ispatta kullanılanları dikkate almışlardır. Bu öğretmen adayları ispatta tanımların, teoremin hipotezinin kullanılmasına ve teoremin hükmüne ulaşılmasına dikkat etmişlerdir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar, üniversite öğrencilerinin çoğunun ispatları değerlendirirken yüzeysel bir inceleme yaptıklarını ortaya koyan çalışmalarla uyumludur (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013b; Morris, 2002; Selden ve Selden, 2005). Selden ve Selden (2003) öğrencilerin ispatları değerlendirirken önermenin karşıtının ispatlanması ve ispatın içindeki temel matematiksel boşluklar gibi genel hataların yerine cebirsel ifadeler ve sembolik manipülasyonlar gibi yüzeysel hatalara odaklandıklarını ifade etmişlerdir. Doruk ve Kaplan (2013b) çalışmalarında öğrencilerin çoğunu ispatları değerlendirirken sonuç odaklı bir yaklaşım sergilediklerini tespit etmişlerdir. Öğretmen adaylarının kullandıkları stratejilerin 26 tanesinin ispatlama yöntemine ilişkin olduğu tespit edilmiştir. Bu öğretmen adayları ispatta kullanılan ispatlama yöntemine ve argümanların yapısına dikkat etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispatlama yöntemine ilişkin bu stratejisi daha önce yapılan çalışmalarda da tespit edilen stratejilerden biridir (Knuth, 2002; Ko, 2010).

Öğretmen adaylarının çalışmada en çok tercih ettikleri stratejilerden biri ispatların içerisindeki lokal argümanları inceleme olmuştur. Bu strateji 47 kez kullanılmıştır. Argüman incelemesi yapan öğretmen adayları, ispatın basamakları arasındaki geçişlerin gerekçelerini anlamaya çalışmışlar ya da ispat basamaklarında işlemsel hatanın olup olmadığını göz önüne almışlardır. Öğretmen adaylarının nadiren, ispatlarda bulunan ve ispatın mantıksal bağlantılarını sağlayan kilit ifadelere odaklandıkları ortaya çıkmıştır. Alcock ve Weber (2005) yaptıkları çalışmada, bu çalışmada olduğu gibi, öğrencilerin ispatta bulunan argümanlardaki gerekçeleri kontrol etmede başarısız olduklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin her satırın doğru olup olmadığını kontrol etmenin yanında, önceki satır ile sonraki satırın birbiri ile bağlantısını kontrol etmenin de gerekli olduğunu düşündükleri anlaşılmıştır.

Öğretmen adaylarının kullandıkları ispat değerlendirme stratejilerinin 9 tanesi otoriter bilgilere yöneliktir. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adayları daha önce bu ispatın yapılıp yapılmadığını hatırlamaya çalışmış ya da söz konusu ispat ile benzer olan başka bir ispatı değerlendirme yapmak için kullanmışlardır. Bazı çalışmalarda da öğretmen adaylarının ispatın yapısına dikkat ettikleri ve geçmiş bilgilerini hatırlamaya çalıştıkları yönünde sonuç bildirilmiştir (Ko, 2010; Selden ve Selden, 2003). Ayrıca, öğretmen adaylarının ispatları değerlendirirken satır satır inceleme yaptıkları ortaya çıkmıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç Ko'nun (2010) çalışmasıyla uyumludur. Diğer yandan öğretmen adaylarının ispatları değerlendirmek için 15 farklı yaklaşım sergilemeleri bu tarz etkinliklere yabancı olduğu için yeterli anlayışa sahip olmadıklarını düşündürmüştür. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, üniversite öğrencilerinin ispatları değerlendirmek için gerekli anlayıştan uzak oldukları yönündeki çalışma sonuçları ile uyumludur (Ko, 2010; Selden ve Selden, 2003).

Çalışma sonucunda, bazı öğretmen adaylarının yanlış olan ispatları değerlendiremedikleri, ispatlama yöntemleri ve ters örnekler hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının bu tarz etkinlikler ile ilk defa karşılaştıkları düşünülmüştür. Çalışmaya katılan öğretmen adayları da bu şekilde görüş bildirmişlerdir. Buna göre ispat ağırlıklı derslerde bu tarz etkinliklerin yapılması, doğru ispat ile yanlış ispat arasındaki farkların vurgulanması ve öğretmen adaylarına bunların hissettirilmesi gerekmektedir. Ek olarak ispatlarda bulunması gereken özelliklere yönelik bilgiler de verilmelidir. Derslerde yanlış bir ispat sunarak ispatta nasıl bir yanlışlığın olduğu ile ilgili etkinlikler yapılabilir. Bu tarz etkinlikler öğrencilerin ispatlara yönelik bilgilerinin artmasına ve mevcut ön yargıların kırılmasına yardımcı olabilmesi açısından önemlidir. Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında kullandıkları ispat değerlendirme stratejileri araştırılmıştır. Çalışma farklı araştırma yaklaşımları ve farklı araştırma grupları ile tekrarlanabilir. Öğretmen adaylarının matematiğin soyut matematik veya geometri gibi farklı alanlarındaki ispat değerlendirme becerileri sınanabilir. Ayrıca öğrencilerin ispatlama yöntemlerini anlayışları üzerine çalışmalar yapılabilir.

References

Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z., & Sabuncuoğlu, A. (1998). *Soyut matematik*. Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24(*2), 125-134.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479-488.

Altun, M. (2013). *Ortaokullarda (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi.* (9. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M. (2014). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için liselerde matematik öğretimi.* (5. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. Paper presented at the annual meeting of *the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, England.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-204). Belo-Horizonte, Brazil: PME.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (13. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Cambridge University (2013). *Cambridge Advenced Learner's Dictionary*. (4th edition). McIntosh, C. (Ed.). UK: Cambridge University Press.

Creswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches.* London: Sage Publication.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings of *the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 591-600). Cyprus, Larnaca.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2013b). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı Üzerine İspat Değerlendirme Becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 241-252.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015b). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328.

Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In European Research in Mathematics Education 1.1, *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 125-139).

Galbraith, P.L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 1-28.

Gholamazad, S., Liljedahl, P. & Zazkis, R. (2004). What counts as proof? Investigation of pre-service elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. In D. E. McDougall & J. O. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 639–646), University of Toronto, Toronto

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. InA. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. Ill* (pp. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9539653).

Goldin, G. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40-177. doi:10.2307/749946

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güler, G., & Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği*. Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(1), 59-83.

Harel, G, & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. InA. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Irmak, H. (2008*). Soyut matematik.* Ankara: Pegem Akademi.

İskenderoğlu, T., Baki, A., & Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(1), 181-203.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Ko, Y.Y. (2010). *Proofs and Counterexamples: Undergraduate Students' Strategies for Validating Arguments, Evaluating Statements, and Constructing Productions.* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3437186)

Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 68-77.

Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 349–365

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.

Mejia-Ramos, J.P., & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof?. *Research in Mathematics Education, 11*(1), 77-78.

Merriam, S.B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber.* (Çev. Ed. S. Turan). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics. 27*, 249-266.

Morris, A.K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' ability to make the inductive- eductive distinction. *Cognition and Instruction, 20*(1), 79-118.

Oxford University. (2010). *Advenced Learner's Dictionary (International students' edition)*.(8th edition). New York: Oxford University Press

Patton, M.Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri.* (Çev. Ed. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23–41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 385–400.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Riley, K.J. (2003). *An investigate of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3083484)

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. The *American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Rumsey, C. W. (2012). *Advancing fourth-grade students' understanding of arithmetic properties with instruction that promotes mathematical argumentation* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3520912)

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40*(2), 295–319.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 191-210.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237-253.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In Alatorre, S. Cortina, J. and Mendez A.(Eds, 2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapters of the International Group of the Psychology of Mathematics Education.* Merida, Mexico.

Toulmin, S.E. (2003). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.

Uygan, C., Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıt Bağlamındaki İnançlarının, Kanıtlama Süreçlerinin ve Örnek Kanıtları Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 5*(2), 137-157.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-1 19.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour, 24, 351*-360.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 431-459.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2-3), 200-208.

Whiteley, W. (2009). Refutations: the role of counter-examples in developing proof. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, vol. 2 Taipei, Taiwan (pp. 257-262).

Williams, E. (1979). *An investigation of senior high school students ' understanding of the nature of mathematical proof.* Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Edmonton.

Yasuhiro, S. (1991). *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Atlanta.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (8. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme.* (10. Baskı). İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. Journal for Research in Mathematics Education, 67-78.

Zaslavsky, O., & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In Olivier A. & Newstead K. (Eds.), Proceedings ofthe Twenty-second Annual Meeting of the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 225-232). Stellenbosch, South Africa.