

NORMALLEŞTİRİLMİŞ BEKLENEN FAYDA-ENTROPİ RİSK ÖLÇÜMÜNE DAYALI HİSSE SENEDİ SEÇİMİ VE KARAR MODELİ

Canan HAMURKAROĞLU

Doç. Dr., Karabük Üniversitesi, Aktüerya ve Risk Yönetimi Böl.
Assoc. Prof. Karabuk University, Dept. of Actuary and Risk Man.

cananhamurkaroglu@karabuk.edu.tr

ORCID ID: 0000-0002-8537-513X

Duygu ÖZKAN

Araştırma Görevlisi, Karabük Üniversitesi, İşletme Bölümü
Res. Asst., Karabuk University, Dept. of Business Adm.

duyguozkan@karabuk.edu.tr

ORCID ID: 0000-0002-7430-0685

Selin DEĞİRMENÇİ

Araştırma Görevlisi, Karabük Üniversitesi, İşletme Bölümü
Res. Asst., Karabuk University, Dept. of Actuary and Risk Man.

selindegirmenci@karabuk.edu.tr

ORCID ID: 0000-0002-4011-1368

Öz

Risk altında karar verme, finans, ekonomi, aktüerya gibi alanlarda gittikçe önemi artan bir konudur. Bu sebeple riskli karar problemlerine ilişkin bilgi elde etmek için geliştirilen farklı risk ölçümleri, risk içeren eylemlerin seçimi için ve karar analiz modellerinde kullanılmaktadır. Bu çalışmada, riskli kararlar alırken Yang ve Qiu tarafından önerilen, beklenen fayda ve entropiyi birleştiren normalleştirilmiş beklenen fayda-entropi EU-E risk ölçümü ve normalleştirilmiş EU-E karar modeli ele alınmış ve özellikleri ortaya

konulmuştur. Normalleştirilmiş EU-E modelinde, riskli eylemin ölçüsü, beklenen fayda ve entropinin bir λ risk faktörü ile ağırlıklı doğrusal ortalamasıdır. Entropi için Shannon entropisi ve fayda fonksiyonu için üstel fayda fonksiyonu olarak dikkate alınmıştır. Çalışmanın uygulama bölümünde normalleştirilmiş EU-E karar modeline göre hisse senedi seçimi yapılmıştır. Riskin değerlendirilmesinde, karar vericinin göreceli belirsizliği ve beklenen faydayı ayırt etmesine yarayan λ katsayısının farklı değerleri için birçok seçim yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Entropi, Beklenen fayda fonksiyonu, Optimal portföy seçimi, Karar modeli

JEL Sınıflaması: C44, F65, G11.

THE STOCK SELECTION BASED ON THE NORMALIZED EXPECTED UTILITY- ENTROPY MEASURE OF RISK AND DECISION MODEL

Abstract

Making decisions under risky actions has an increasing importance in many scopes such as finance, economics and actuarial sciences. Different type of risk measures, which are developed to obtain information about risky decision problems, are used for decision analyze models such as decision of risky actions. In this study, we use the normalized EU-E and entropy measure of risk and the normalized EU-E and entropy decision model which was developed by Yang and Qui while making risky decisions. In the model, the measure of risky action is the weighted linear average of expected

utility and entropy using a risk tradeoff factor. In this study we use Shannon entropy as an entropy measure and exponential utility function is used for the utility function. In the application part, stock selection is made by using the normalized EU-E and entropy decision model. We obtain the results for the different tradeoff factor values.

Key Words: Entropy, Expected utility, Optimal portfolio selection, Decision model.

JEL Classification: C44, F65, G11.

1. Giriş

Riskli karar problemlerine ilişkin bilgi elde etmek için çeşitli risk ölçümleri oluşturulmuştur. Bu konuda yapılan araştırmaların bir kısmı beklenen fayda ve entropi kuramı üzerinedir (Dong vd., 2016; Dionsio vd., 2005; Luce vd., 2008; Yang ve Qiu, 2005).

Yang ve Qiu (2014), beklenen fayda-entropi (EU-E) risk ölçütünü ve risk içeren bir eylemin beklenen faydası ve entropisine dayanan bir karar verme modelini önermişlerdir. EU-E risk ölçütü, risk altındaki genel karar verme modeline dayanır ve farklı eylemler farklı durumlarına karşılık gelebilir ve her bir durumu kendi dağılımına sahip olabilir. Yang ve Qiu tarafından beklenen fayda ve entropi bir araya getirilerek önerilen EU-E risk ve karar modeli daha sonra geliştirilerek normalleştirilmiş EU-E risk ölçümü ve karar modeli olarak önerilmiştir. Normalleştirilmiş EU-E risk ölçümünün belirli koşullar altında bazı normatif özellikleri vardır ve uygun bir tanımlayıcı model olabilir (Yang vd., 2017)

Bu çalışmada, riskli kararlar alırken Yang ve Qiu tarafından normalleştirilmiş beklenen fayda-entropi EU-E risk ölçümü ve normalleştirilmiş EU-E karar modeli ele alınmış ve özellikleri ortaya konulmuştur. Karar vericinin öznel tercihi beklenen fayda ile belirlenirken objektif belirsizliği ise entropi ile ölçülür. Normalleştirilmiş EU-E modelinde, riskli eylemin ölçüsü, beklenen fayda ve entropinin bir λ risk faktörü ile ağırlıklı doğrusal ortalamasıdır.

Genel bir karar verme modeli $G = (\theta, A, u)$ için $\theta = \{\theta\}$ durum uzayıdır, $A = \{a\}$ eylem uzayı ve $u(X)$ karar vericinin fayda fonksiyonudur, $X = \{X, a\}$ ise, $A \times \Theta$ üzerinde tanımlanan ödeme fonksiyonudur.

Hem eylem hem de durum uzayı sonlu olduğunda, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, a_i 'ye karşılık gelen θ_i durumu, n_i tane $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{in_i}$ olası sonuca sahiptir. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n_i$ $X = X(a_i, \theta_{ij}) = x_{ij}$ ödemesi; a_i eylemi için θ_{ij} durumundaki ödemeyi fonksiyonudur. θ_i 'nin olasılık dağılımı $p_{ij} = P(X = x_{ij})$ ile gösterilirse genel karar verme modelinde; a_i eylemi için olası sonuçlar ve bu sonuçlara karşılık gelen olasılıkların birleşimi olarak şematik olarak,

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} a_{i2} \dots a_{in_i} \\ p_{i1} p_{i2} \dots p_{in_i} \end{pmatrix} \quad (1)$$

biçiminde gösterilebilir.

Karar analizindeki risk kavramının içgörüsünde, karar vericinin eylem seçimini belirleyen iki ana faktör vardır: belirli bir eylemi gerçekleştirirken karar vericinin beklenen faydası ve durumun belirsizliğinden kaynaklanan sonuçların belirsizliği. Bu risk

kavramına dayanarak, bir a eylemi için EU-E risk ölçümü şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$R(a) = \lambda H_a(\theta) - (1 - \lambda)E[u(X(a, \theta))] / \max_{a \in A} \{E[u(X(a, \theta))]\} \quad (2)$$

Eş. (2)'de λ , $0 < \lambda < 1$ aralığında bir katsayı, $H_a(\theta)$; θ durumunun dağılımına karşılık gelen entropisidir. Beklenen fayda fonksiyonunun negatif olmayan fonksiyon olduğu ve $\max_{a \in A} \{E[u(X(a, \theta))]\}$ 'nin her zaman mevcut olduğu varsayılır (Yang ve Qiu, 2014; Yang vd., 2017).

Sabit λ , karar vericinin bir eylemin sübjektif beklenen faydası ile onun karşılık gelen durumunun nesnel belirsizliği arasındaki bir uyumsuzluğu yansıtır. EU-E risk ölçümünde beklenen fayda, karar vericinin öznel tercihini yansıtmaktadır; Entropi, karşılık gelen durumun nesnel belirsizliğini ölçer. EU-E risk ölçütü, karar vericinin sübjektif tercihini ve durumuna ilişkin nesnel belirsizliği, riskten kaçınma faktörüyle birleştirir. Riskli eylemin bu ölçüsü, beklenen fayda ve entropinin ağırlıklı doğrusal (lineer) ortalamasıdır. Luce vd., (2008) tarafından tüm eylemlerin eşit bir beklenen faydası varsa, riskin sıralaması entropi bileşeni tarafından belirlendiği gösterilmiştir. Eğer tüm durumlar aynı dağılıma sahipse, o zaman durumların entropisi, her bir eyleme karşılık gelen her durum için aynıdır; Bu durumda risk sıralaması beklenen fayda bileşeni tarafından belirlenir.

Luce vd., (2008), entropi ile değiştirilmiş beklenen fayda (EM-EU) risk ölçütünü önermişlerdir. Genel karar verme modelinde, bir a eyleminin entropi- değiştirilmiş beklenen faydası (EM-EU) aşağıdaki biçimdedir:

$$U(a) = E[u(a)] + \lambda H_a(\theta) \quad (3)$$

Eş.3 'de $U(a)$, a eyleminin riskini, $E[u(a)]$ a eylemine ilişkin beklenen faydayı ve $H_a(\theta)$ ise a eyleminin θ durumuna karşılık gelen Shanon entropisini ifade eder. A ise bir katsayıdır.

Riskli eylemlere karşılık gelen durum sayıları farklı olduğunda, hem EU-E risk ölçütü hem de EM-EU ölçütü riskli seçim için uygun olmayabilir. Başka bir deyişle hem EU-E hem de EM-EU ifadeleri, riskli seçim için doğru tanımlamayı sağlayamayabilir. Bu tür riskli eylemlerde normalleştirilmiş entropi, riskli eylemlerin göreceli belirsizliğini ölçmenin daha iyi bir yol olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca, EU-E risk ölçümünün değeri standartlaştırılmış değildir (Luce vd., 2008; Yang ve Qiu, 2005) .

2. Normalleştirilmiş Beklenen Fayda- Entropi Risk Ölçümü

Entropi, Shannon tarafından tanımlanmış bir olasılık dağılımındaki belirsizlik miktarının bir ölçüsüdür (Shannon, 1948).

a eylemine karşılık gelen θ durumu kesikli bir raslantı değişkeni ve bunun olasılık kümesi p_1, p_2, \dots, p_n ise, θ durumunun entropisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H_a(\theta) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (4)$$

Bir a riskli bir eylemin θ durumunun göreceli belirsizliğini ölçmek için normalleştirilmiş entropi ise,

$$NH_a(\theta) = \frac{(-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i)}{\ln n} \quad n > 1 \text{ için}$$
$$NH_a(\theta) = \frac{(-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i)}{\ln n} = 0 \quad n = 1 \text{ için} \quad (5)$$

biçiminde tanımlanır.

$\ln(n)$ maksimum belirsizliğin ifadesidir ve θ durumunun olası n sonucu için uniform dağılıma sahip olduğunda maksimum belirsizliğe ulaşır. $NH_a(\theta) = 0$ olması belirsizliğin olmadığı anlamındadır (yani herhangi bir i için $p_i = 1$ ve tüm $i \neq j$ için $p_j = 0$). Buna karşın $NH_a(\theta) = 1$ olması, maksimum belirsizliği (yani tüm $i=1,2,\dots,n$ için, $p_i = \frac{1}{n}$) gösterir.

Normalleştirilmiş entropi göreceli belirsizliğin bir ölçütüdür (Luce vd., 2008; Yang ve Qiu, 2014). Normalleştirilmiş entropinin değeri 0 ile 1 arasındadır, yani $NH_a(\theta) \in [0,1]$. Bu, birbiriyle karşılaştırılabilecek standartlaştırılmış önlemleri sağlar (Shannon, 1948).

Riskten etkilenen bir karar verici için riskli eylemin daha küçük göreceli belirsizliğe, yani daha küçük normalleştirilmiş entropiye sahip olması daha iyi olacaktır. Bu, Yang ve Qiu tarafından önerilen risk kavramıyla tutarlıdır (Yang ve Qiu, 2014). Karar vericiler için belirsizliği azaltmak ve bir eylemin beklenen faydasını artırmak uygun olabilir. Bu risk anlayışı ile, genel karar analiz modeli bağlamında bir eylem için normalleştirilmiş EU-E risk ölçümünün kullanılması önerilmiştir.

Tanım 2.1. Genel bir karar analizi modeli $G(\theta, A, U)$, $a \in A$ eylemi, $\theta \in \theta$ durumu olsun. $u(x)$ fayda fonksiyonunun monoton artan fonksiyon ve $u(x) \geq 0$ olduğu, $\max_{a \in A} \{E[u(X(a, \theta))]\} > 0$ olduğu varsayalım. a eyleminin normalleştirilmiş EU-E risk ölçüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} R(a) &= \lambda NH_a(\theta) - (1 - \lambda)NE(a), \quad n > 1 \text{ için} \\ &= -(1 - \lambda)NE(a), \quad n = 1 \text{ için} \end{aligned} \quad (6)$$

Eş. (6)'da n eylem sayısını göstermek üzere,

$NH_a(\theta) = \frac{H_a(\theta)}{\ln(n)}$, a eyleminin θ durumunun normalleştirilmiş entropisi ve $H_a(\theta)$, a eyleminin θ durumunun entropisi,

$NE(a) = \frac{E[U(x)]}{\max_{a \in A}\{E[u(X(a, \theta))]\}}$, a eyleminin normalleştirilmiş beklenen faydası ve $X(a, \theta)$ a eyleminin θ durumunun sonucu,

λ ise $0 < \lambda < 1$ aralığındaki katsayıdır.

$0 \leq NH_a(\theta) \leq 1$ ve $0 \leq NE(a) \leq 1$ olduğundan $-1 \leq R(a) \leq 1$ olur.

Tanım 2.1, bir kişinin bir eylemin riskini sezgisel algılamasının ölçülmüş bir ölçüsünü sağlar. Bir a eyleminin riski normalleştirilmiş beklenen fayda ve entropinin ağırlıklı lineer ortalamasıdır. Karar vericinin daha az belirsizlik ve daha büyük bir fayda sağlamak istediği gerçeğine dayanmaktadır. EU-E risk ölçütü gibi, tüm eylemler eşit normalleştirilmiş bir beklenen faydaya sahipse, risk sıralaması normalleştirilmiş entropi bileşeni tarafından belirlenir. Eğer tüm durumları aynı dağılıma sahipse, o zaman durumların normalleştirilmiş entropisi, her eyleme karşılık gelen her durumu için aynıdır; bu durumda risk sıralaması, normalleştirilmiş beklenen fayda bileşeni tarafından belirlenir. Bu risk ölçümü, insanların risk algısının iki faktöre dayandığının göstergesidir: sonuçların göreceli belirsizliği ve riskli eylemlerin beklenen faydası. Bazı insanlar için göreceli belirsizlik, beklenen faydadan daha ağır basmaktadır ve diğer insanlar için beklenen fayda, belirsizlikten daha ağır basmaktadır. Riskin

değerlendirilmesinde, insanlar göreceli belirsizliği ve beklenen faydayı λ tradeoff katsayısı ile ayırt edebilirler. Beklenen fayda ve entropi tek başına risk ölçüsü değildir. Birisi sadece risk ölçüsü olarak tek başına beklenen fayda ve entropiyi ele alırsa doğru olmayabilir. Bireyin normalleştirilmiş EU-E risk ölçümüne göre karar aldığını varsayılmaktadır (Yang ve Qiu, 2014).

Tanım 2.2. Genel bir karar verme modeli $G = (\theta, A, u)$ için $A = \{a_1, a_2\}$ eylem uzayı ve $R(a_1)$ ve $R(a_2)$ sırasıyla a_1 ve a_2 eylemlerine ilişkin normalleştirilmiş EU-E risk ölçümlerini göstermek üzere, $R(a_1) < R(a_2)$ ise $a_1 > a_2$ 'dir, yani a_1 eylemi a_2 eylemine karşı tercih edilir, $R(a_1) \leq R(a_2)$ ise $a_1 \geq a_2$ dir, yani a_2 eylemi a_1 eyleminden üstün değildir. Bu tanıma göre eylem uzayındaki tüm eylemler üzerinden minimum normalleştirilmiş EU-E risk değeri optimaldir ve tüm risklerin normalleştirilmiş EU-E risk değerine göre sıralaması elde edilebilir (Yang ve Qiu, 2014).

2.1. Normalleştirilmiş EU-E Risk Ölçümünün Özellikleri

Önerme 1. $G = (\theta, A, u)$ karar modeli için için $A = \{a_1, a_2\}$ eylem uzayı ve $a_i (i = 1, 2)$ eylemlerine karşılık gelen θ durumuna ilişkin normalleştirilmiş entropi $NH_{a_i}(\theta)$ ve beklenen fayda $E(a_i) = E[u(X(a_i, \theta))]$ olsun.

- a. $NH_{a_1}(\theta) < NH_{a_2}(\theta)$ ve $E(a_1) = E(a_2)$ ise $R(a_1) < R(a_2)$ 'dir.
- b. $NH_{a_1}(\theta) = NH_{a_2}(\theta)$ ve $E(a_1) > E(a_2)$ ise $R(a_1) < R(a_2)$ 'dir.
- c. $NH_{a_1}(\theta) < NH_{a_2}(\theta)$ ve $E(a_1) > E(a_2)$ ise $R(a_1) < R(a_2)$

Aynı beklenen faydaya sahip iki farklı eylem için, daha küçük normalleştirilmiş entropiye sahip eylem daha az risk taşır. Ayrıca, daha yüksek beklenen faydaya sahip eylemin riskinin, iki eylemin durumlarına ilişkin normalleştirilmiş entropileri eşit olduğunda daha azdır. Bu, insanların risk algısı ile tutarlıdır (Yang ve Qiu, 2014).

Önerme 2. $G = (\theta, A, u)$ karar modeli için için,

a. A' 'daki tüm eylemlerin beklenen faydaları eşit ise karar vermek için sadece normalleştirilmiş entropilerini karşılaştırmak yeterlidir. Uygun karar en küçük normalleştirilmiş entropiye sahip olan eylemdir.

b. A' 'daki her bir eyleme karşılık gelen durumların normalleştirilmiş entropileri eşit ise, o zaman beklenen en büyük faydaya sahip eylem optimaldir. Bu durumda, $\lambda = 0$ alındığında daha az normalleştirilmiş EU-E risk ölçüsü ile eylem seçilir, yani daha yüksek beklenen fayda ile eylem seçilir. Böylece, normalleştirilmiş EU-U karar kriteri beklenen fayda ilkesi ile tutarlıdır. Özel olarak, eğer eylemlerden $\{a_1, a_2\}$ biri, bir sonucun meydana gelmesi olasılığı ile 1 ile kesin ise, diğeri risklidir (Yang ve Qiu, 2014).

Önerme 3. $G = (\theta, A, u)$ karar modeli için, karar verici riskten kaçınmak isteyendir yani $u(x) \geq 0, u'(x) \geq 0, u''(x) \leq 0$ 'dir. a_1 eyleminin sonucu kesin c sonucu olsun ve a_2 eylemi ise x_1, x_2, \dots, x_n sonuçlarını sırasıyla p_1, p_2, \dots, p_n olasılıkları ile alsın. Bu durumda a_1 ve a_2 eylemleri eşit beklenen değere sahip ise, normalleştirilmiş EU-E karar modeline göre a_1 eylemi tercih edilir.

Üçüncü önerme, eylemlerin aynı beklenen değere sahip olmaları durumunda, riskli eylemlerden ziyade, insanların eylemi

belirli sonuçlarla neden seçtikleri olgusunu açıklar. Bu özel problem için, beklenen fayda kriterine göre de karar verilirse, a_1 eylemi optimal olarak seçilebilir. Yani, bu karar problemi için, hem normalleştirilmiş EU-E modeli hem de beklenen fayda ilkesi ile aynı seçim kararı alınabilir. Riskten kaçınan kişi, sezgiye göre sonuca ulaşabilir, bu nedenle sonuçlar hem sezgi hem de normalleştirilmiş EU-E modeli ile tutarlı olur. Üçüncü önerme, normalleştirilmiş EU-E modelinin ya tanımlayıcı bir model ya da normatif bir karar modeli olarak kullanılabileceğini gösterir. EU-E risk ölçümüne benzer şekilde, aşağıdaki önermeler normalleştirilmiş EU-E risk ölçümünün, insanların risk algılamasına ilişkin deneysel bulgulara çok iyi uyduğunu göstermektedir (Yang ve Qiu, 2014).

Önerme 4. $G = (\theta, A, u)$ karar modeli ve negatif olmayan sonuçlar için,

1. $A = \{a, \alpha + a\}$, $\alpha > 0$ için, $R(\alpha + a) < R(a)$

Bir eylemin tüm olası sonuçlarına α ($\alpha > 0$) gibi bir sabit ile eklendiğinde risk azalır.

2. $A = \{a, \beta a\}$, $\beta > 1$ için, $R(\beta a) < R(a)$

Bir eylemin tüm olası sonuçları β ($\beta > 1$) gibi bir sabit ile çarpıldığında risk eylemine ilişkin sonuçların dağılım genişliğinin artmasıyla risk azalır.

Beklenen fayda, hem ekonomik davranışları hem de insani karar davranışlarını bir dereceye kadar yorumlamak için tanımlayıcı bir model olarak hizmet etmekle birlikte, çeşitli anomaliler ve ampirik çalışmalarla tartışılmıştır (Yang vd., 2017). Beklenen fayda teorisinde, sonuçların faydaları, olasılıkları ile ağırlıklandırılmaktadır. Kahneman

ve Tversky (1979) tarafından, insanların tercihlerinin bu ilkeyi ihlal ettiği bir dizi riskli seçenek tanımlamıştır. Dolayısıyla normalleştirilmiş EU-E modelinin açıklayıcı bir model olarak uygun olduğu ifade edilmiştir (Yang vd., 2017).

3. Normalleştirilmiş EU-E Karar Modeli Kullanılarak Hisse Senedi Portföy Seçimi

Çalışmada Eş.2 ile verilen normalleştirilmiş EU-E risk ölçüsü kullanılarak karar vericinin hisse senetleri üzerinden seçimlerinin sıralaması elde edilecektir. Karar verici modelden, daha düşük bir EU-E risk ölçümünü tercih eder. Ayrıca, daha küçük bir riskin daha iyi olduğu yerlerde, normalleştirilmiş EU-E riskine göre, A eylem uzayındaki tüm eylemler artan düzende sıralanacaktır.

m tane hisse senedinden $(S_i, i = 1, 2, \dots, m)$ oluşan bir portföy olsun. Bir yatırımcının bu portföyden daha az belirsizlik ve daha büyük bir fayda ile k tanesini seçmek istediğini düşünelim. Her bir hisse senedi için l gün önceki getiri verileri $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{il}$ ile gösterilsin. Her bir hisse senedinin getirilerinin dağılım genişliği $[b, c]$ biçiminde gösterilirse, $b = \min_{1 \leq i \leq m} \{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{il}\}$ ve $c = \max_{1 \leq i \leq m} \{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{il}\}$ 'dir. Hisse senedi getirilerinin örneklem dağılımını elde etmek için $[b, c]$ aralığı $b = r_0 < r_1 \dots < r_n = c$ biçiminde eşit aralıkla $[r_0, r_1], [r_1, r_2], \dots, [r_{n-1}, r_n]$ n alt gruba ayrılsın. Bu alt gruplar sırasıyla $\phi_j, j = 1, 2, \dots, n$ olarak adlandırılınsın. $\phi_j, j = 1, 2, \dots, n$ alt grubuna düşen S_i hisse senedi getiri verilerinin göreceli sıklığı ρ_{ij} ile gösterilsin. $\phi_j, j = 1, 2, \dots, n$ aralığındaki S_i hisse senedi getirilerinin ortalaması (beklenen değeri) \bar{x}_{ij} ler elde edilsin. Büyük Sayılar Yasası ve Bernouilli dağılımından l artarken ρ_{ij} göreceli sıklıkları p_{ij}

olasılıklarına yaklaşır. Bu durumda S_i hisse senedi getirilerinin p_{ij} olasılığı ile olasılık dağılımından $\phi_j = 1, 2, \dots, n$ aralığındaki \bar{x}_{ij} beklenen değerini alacağı varsayılabilir.

Hisse senedi karar verme modeli $G = (\theta, A, u)$ için $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ eylem uzayı yatırım yapılan hisse senetlerinin kümesi, $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ durum uzayı ve $u(X)$ karar vericinin fayda fonksiyonu olarak tanımlanırsa, S_i ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) hisse senedinin EU-E risk ölçümü,

$$R(a_i) = -\lambda \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \ln \rho_{ij} / \ln n - (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n [u(\bar{x}_{ij}) \rho_{ij}] / \max_{1 \leq i \leq m} \{ \sum_{j=1}^n u(\bar{x}_{ij}) \rho_{ij} \} \quad (7)$$

biçimindedir.

Eş.7'den her bir hisse senedi için risk ölçümü hesaplanır ve en düşük risk ölçümüne sahip olan k tanesi seçilir.

Normalleştirilmiş EU-E modeli uygulanmadan önce yatırımcı tarafından $u(x)$ fayda fonksiyonuna karar verilmesi gerekir. Ekonomik veriler ve karar modeli için genellikle üstel fayda fonksiyonu ele alınır.

Fayda, genellikle referans noktasından sapmalar biçiminde tanımlanmıştır (Dickson, 2005). Fayda fonksiyonu, normal olarak, kazançlar için konkav(dışbükey) ve genellikle kayıplar için konveks (içbükey) dir ve kazançlardan ziyade kayıplar için daha diktir. Çoğu yatırımcı kazançlar için riskten kaçınır ve kayıplar için risk alır. Ayrıca karar vermede insan davranışının küçük getirilerde riskte nötr olma eğiliminde oldukları ifade edilmiştir (Yang vd., 2017). İnsan davranışının bu özellikleri ile, ekonomik veriler için genellikle aşağıdaki üstel S-biçiminde fayda fonksiyonu ile kullanılır:

$$u(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0 \text{ için}$$

$$= -\lambda(1 - e^{-x}) \quad x < 0 \text{ için}$$

4. Uygulama

Çalışmanın uygulama kısmında BIST100'de işlem gören emeklilik şirketlerinden 5 tanesinin 2016-2017 yılları arasındaki 254 işlem günlük getiri verisi kullanılmıştır. Bu hisse senedi getiri verileri kullanılarak normalleştirilmiş EU-E risk ölçütü ile en uygun 3 hisse senedi seçilmiş ve optimal portföy oluşturulmuştur. Getiriler aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanmıştır.

$$r_{it} = 100 \times \ln \frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}$$

Uygulamanın ilk adımı olarak her bir hisse senedi için getirilerin tanım aralıkları beş eşit parçaya bölünmüş ve bu aralıklardaki getirilerin göreceli sıklıkları ve ortalamaları hesaplanmıştır. Bu aralıklar $\theta_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ile gösterilmektedir. Beş hisse senedi için işlemler ayrı ayrı olarak tekrarlanmıştır.

Tablo 1: 1. Hisse Senedinin Tanım Aralıkları, Göreceli Sıklıkları ve Beklenen Değerleri

θ_j durumları	Aralık sınırları	Sıklık	Göreceli sıklık ρ_{ij}	Beklenen değeri \bar{x}_{ij}
θ_1	[-5.53,-3.1)	6	$\rho_{11} = 0.02$	$\bar{x}_{11} = -3.53$
θ_2	[-3.1,-0.679)	59	$\rho_{12} = 0.23$	$\bar{x}_{12} = -1.41$
θ_3	[-0.679,1.75)	149	$\rho_{13} = 0.59$	$\bar{x}_{13} = -3.17$
θ_4	[1.75,4.17)	35	$\rho_{14} = 0.14$	$\bar{x}_{14} = 2.69$
θ_5	[4.17,6.6)	3	$\rho_{15} = 0.01$	$\bar{x}_{15} = 3.21$

Tablo 2: 2. Hisse Senedinin Tanım Aralıkları, Göreligi Sıklıkları ve Beklenen Değerleri

θ_j durumları	Aralık sınırları	Sıklık	Göreligi sıklık ρ_{ij}	Beklenen değer \bar{x}_{ij}
θ_1	[-3.72,-2,16)	3	$\rho_{11} = 0.012$	$\bar{x}_{11} = -3.113$
θ_2	[-2.16,-0,61)	33	$\rho_{12} = 0.216$	$\bar{x}_{12} = -1.168$
θ_3	[-0.61,0.94)	168	$\rho_{13} = 0.664$	$\bar{x}_{13} = 0.115$
θ_4	[0.94,2.50)	41	$\rho_{14} = 0.162$	$\bar{x}_{14} = 1.476$
θ_5	[2.50,4.05)	8	$\rho_{15} = 0.032$	$\bar{x}_{15} = 3.158$

Tablo 3: 3. Hisse Senedinin Tanım Aralıkları, Göreligi Sıklıkları ve Beklenen Değerleri

θ_j durumları	Aralık sınırları	Sıklık	Göreligi sıklık ρ_{ij}	Beklenen değeri \bar{x}_{ij}
θ_1	[-7.85,-5,34)	1	$\rho_{11} = 0.004$	$\bar{x}_{11} = -7.85$
θ_2	[-5.34,-2.83)	5	$\rho_{12} = 0.02$	$\bar{x}_{12} = -3.616$
θ_3	[-2.83,-0.33)	86	$\rho_{13} = 0.340$	$\bar{x}_{13} = -1.0695$
θ_4	[-0.33,2.18)	146	$\rho_{14} = 0.577$	$\bar{x}_{14} = 0.4771$
θ_5	[2.18,4.69)	15	$\rho_{15} = 0.059$	$\bar{x}_{15} = 3.1467$

Tablo 4: 4. Hisse Senedinin Tanım Aralıkları, Göreliliği Sıklıkları ve Beklenen Değerleri

θ_j durumları	Aralık sınırları	Sıklık	Göreliliği sıklık ρ_{ij}	Beklenen değeri \bar{x}_{ij}
θ_1	[-6.06,-3.62)	2	$\rho_{11} = 0.008$	$\bar{x}_{11} = -4.995$
θ_2	[-3.62,-1.19)	42	$\rho_{12} = 0.166$	$\bar{x}_{12} = -2.0352$
θ_3	[-1.19,1.24)	148	$\rho_{13} = 0.585$	$\bar{x}_{13} = -0.0342$
θ_4	[1.24,3.67)	56	$\rho_{14} = 0.221$	$\bar{x}_{14} = 2.0609$
θ_5	[3.67-6.10)	5	$\rho_{15} = 0.02$	$\bar{x}_{15} = 4.9040$

Tablo 5: 5. Hisse Senedinin Tanım Aralıkları, Göreliliği Sıklıkları ve Beklenen Değerleri

θ_j durumları	Aralık sınırları	Sıklık	Göreliliği sıklık ρ_{ij}	Beklenen değeri \bar{x}_{ij}
θ_1	[-13.13,-6.99)	3	$\rho_{11} = 0.012$	$\bar{x}_{11} = -10.6167$
θ_2	[-6.99,-0.84)	76	$\rho_{12} = 0.3$	$\bar{x}_{12} = -2.2938$
θ_3	[-0.84,5.30)	160	$\rho_{13} = 0.632$	$\bar{x}_{13} = 1.2264$
θ_4	[5.30,11.44)	13	$\rho_{14} = 0.051$	$\bar{x}_{14} = 7.7346$
θ_5	[11.44,17.59)	1	$\rho_{15} = 0.004$	$\bar{x}_{15} = 17.59$

Çalışmanın ikinci adımında $\lambda \in [0, 1]$ 'nin farklı değerleri ve her bir hisse senedi için Eşitlik (2) kullanılarak risk ölçüm değerleri hesaplanmıştır.

Tablo 6: Farklı Tradeoff Katsayıları ile Hisse Senetlerinin Risk Ölçümleri

λ	$R(a_1)$	$R(a_2)$	$R(a_3)$	$R(a_4)$	$R(a_5)$
0.1	0.03853	0.06413	0.03731	0.06128	-0.8453
0.25	0.14291	0.16321	0.12947	0.16083	-0.6133
0.5	0.31688	0.32835	0.28307	0.32676	-0.2266
0.75	0.49086	0.49348	0.43667	0.49269	0.16008
1	0.66483	0.65862	0.59027	0.65862	0.54677

Elde edilen risk ölçümü değerlerine göre ve yatırımcının tercihlerine göre en düşük belirsizliğe sahip 3 hisse senedi seçilmiştir.

$\lambda = 0.1$ için $R(a_5)$, $R(a_3)$, $R(a_1)$ hisseleri seçilmelidir.

$\lambda = 0.25$ için $R(a_5)$, $R(a_3)$, $R(a_1)$ hisseleri seçilmelidir.

$\lambda = 0.5$ için $R(a_5)$, $R(a_3)$, $R(a_1)$ hisseleri seçilmelidir.

$\lambda = 0.75$ için $R(a_5)$, $R(a_3)$, $R(a_1)$ hisseleri seçilmelidir.

$\lambda = 1$ için $R(a_5)$, $R(a_3)$, $R(a_4)$ hisseleri seçilmelidir.

Elde edilen sonuçlara göre 5. ve 3. hisse senetlerinin bütün portföy tercihlerimizin içinde yer alması gerektiği görülmüştür. Yatırımcının riskli ya da risksiz yatırım tercihlerinin hepsinde en yüksek getirileri bu iki hisse senedinin sağladığı görülmektedir.

Yatırımcının fazla risk alması durumu haricinde her durum için aynı 3 hisse senedi ile optimal portföyü elde edebileceği görülmektedir.

5. Sonuç ve Öneriler

Çalışmada, risk algısının, sonuçların göreceli belirsizliği ve riskli eylemlerin beklenen faydası biçiminde iki faktörle tanımlanması durumunda beklenen fayda ve entropiyi birleştiren normalleştirilmiş beklenen fayda-entropi EU-E risk ölçümü ve normalleştirilmiş EU-E karar modeli tanıtılmış ve özellikleri ortaya konmuştur. Riskli eylemin bu ölçüsü, beklenen fayda ve entropinin ağırlıklandırılmış lineer bir ortalamasıdır. Uygulamada hisse senedi seçimi tercih edilmiş ve 5 hisse senedinden 3 hisse senedinin normalleştirilmiş EU-E risk ölçütüne göre seçimi yapılmıştır. Riskin değerlendirilmesinde, karar vericinin göreceli belirsizliği ve beklenen faydayı ayırt etmesine yarayan farklı λ tradeoff katsayısı alınarak birçok seçim yapılmış ve elde edilen bilgiler özetlenmiştir. Elde edilen sonuçlar kullanılarak yatırımcının risk tercihlerine göre optimal portföyünün hangi hisselerden oluşması gerektiği gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

DICKSON, David C. M.; (2005), Insurance Risk and Ruin, Cambridge University Press, United Kingdom.

DIONISIO, Andreia, REIS, Heitor A. ve COELHO, Luis; (2008), "Utility Function Estimation: The Entropy Approach", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 387 (15), ss. 3862–3867.

DONG, Xin, LU, Hao, XIA, Yuanpu ve XIONG, Ziming; (2016), "Decision-Making Model Under Risk Assessment Based on Entropy", *Entropy*, 18, ss. 1-15.

KAHNEMAN, Daniel ve TVERSKY, Amos; (1979), "Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk", *Econometrica*, 47(2), ss. 263–291.

LUCE, Duncan, R., NG, C. T., MARLEY, A.A.J. ve ACZEL, Janos; (2008), "Utility of Gambling I: Entropy Modified Linear Weighted Utility". *Economic*, 36, ss. 1–33.

SHANNON, Claude E.; (1948), "A mathematical theory of communication". *Bell System Technical Journal*, 27, ss. 379–423.

YANG, Jiping, FENG, Yijun ve QIU, Wanhua; (2017), "Stock Selection for Portfolios Using Expected Utility-Entropy Decision Model", *Entropy*, 19(10), ss. 2-11.

YANG, Jiping and QIU, Wanhua; (2005), "A Measure of Risk and a Decision-Making Model Based on Expected Utility and Entropy", *European Journal of Operational Research*, 164(3), ss. 792–799.

YANG, Jiping and QIU, Wanhua; (2014), "Normalized Expected Utility-Entropy Measure of Risk", *Entropy*, 16, ss. 3590–3604