Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi/ Journal of the Institute of Natural & Applied Sciences 23 (3): 254-260, 2018

Araştırma Makalesi / Research Article

Geliş Tarihi: 31.05.2018
Kabul Tarihi: 02.11.2018

Singüler Pertürbe Özellikli Singüler Diferansiyel Denklemler için Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Derya Arslan

Milli Eğitim Bakanlığı, 13200, Bitlis, Türkiye
e-posta: ayredlanu@gmail.com

Öz: Bu çalışmanın amacı, diferansiyel dönüşüm metodunun (DTM) hem singüler hem de singüler pertürbe özellik taşıyan diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkili olduğunu göstermektir. Teorik olarak incelenen denklemin her bir terimine karşılık gelen diferansiyel dönüşümler elde edilir, tekrar bağıntısı kurularak diferansiyel dönüşüm katsayıları hesaplanır, bu katsayılar seri açılımında yazılır ve yaklaşık çözüm elde edilir. Uygulamada ise seri çözümünde ε ile t için tam çözüm ve seri çözüm değerleri grafikler ve tablolarla gösterilir. Elde edilen sonuçlar gösterir ki önerilen metot singüler pertürbe olmuş singüler denklemlerin yaklaşık çözümünü birçok metoda nazaran daha kolay ve hızlı bulur.
Anahtar Kelimeler: Singüler pertürbe diferansiyel denklem**, S**ingüler diferansiyel denklem, Diferansiyel dönüşüm metodu, Seri çözüm.

Differential Transform Method for Singularly Perturbed Singular Differential Equations

Abstract: The purpose of this work is to show that the differential transformation method (DTM) is very effective in solving differential equations which carry both singular and singular perturbation properties. Theoretically, the differential transforms corresponding to each term of the examined equation are obtained, the differential transform coefficients are calculated by establishing the recurrence relation, these coefficients are written in the series expansion and approximate solution is obtained. In practice, exact solution and series solution values for ε and t are shown in graphs and tables. The obtained results show that the proposed method indicates the approximate solution of singular perturbed singular equations easier and faster than other methods.
Keywords: Singularly perturbed differential equation, singular differential equation, differential transform method, series solution.

Giriş

Şimdiye kadar birçok matematik, fizik ve mühendislik alanında yer alan analitik çözümü olmayan ya da çözümü zor ve zaman gerektiren başlangıç değer ve sınır değer problemleri için çeşitli metotlar çalışılmıştır. Bu nedenle bu problemleri en hızlı ve en kolay şekilde nümerik çözüme ulaştıran yöntemlerin seçilmesi zorunludur. Örneğin, Laplace ve Fourier dönüşümleri kullanıldığında karmaşık kısımların integrallerinin alınması güç olabilir ve ayrıca ters dönüşümlerinin alınmasında problemler oluşabilir. Oysaki, diferansiyel dönüşüm metodu sayesinde bu zorluklar ortadan kalkmakta lineer olmayan terimlerin lineer hale gelmesi, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemler ve pertürbe olmuş singüler denklemlerin çözümü kolaylıkla bulunarak yaklaşık seri çözümler veya kapalı formda çözümler elde edilmektedir. Diferansiyel dönüşüm yöntemi bir boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve *n* boyutlu olmak üzere dört ayrı durumda incelenir. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi adi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için, iki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için ve *n* boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi de bazı tür kısmi türevli diferansiyel denklemler için kullanılmaktadır.

Bu çalışmada aşağıda verilen formda singüler pertürbe singüler sınır değer problemi incelenecektir:

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$y(0) = a, \; y(1) = b, \tag{2}$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$, $q(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları (0,1) aralığında sınırlı ve sürekli fonksiyonlar; a ve b sonlu sabitler; $P(x)$ ise $x = 0$ noktasında singüler özelliği içeren fonksiyondur.

Bu denklemler adi diferansiyel denklem sınıfında yer aldığından bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu kullanılacaktır. Ayrıca şimdiye kadar farklı metotlarla çözülmüş singüler pertürbe singüler problemlere diferansiyel dönüşüm metodu bu çalışmada uygulanmıştır.

Diferansiyel dönüşüm metodunu ilk olarak (Pukhov, 1978) ele almıştır. Diferansiyel denklemlerin seri çözümünü veren bu yöntem birçok çalışmada görülebilir (Zhou, 1986; Ayaz, 2004a; Ayaz, 2004b; Ertürk, 2007; Alquran ve Al-Khaled, 2012). Yine singüler pertürbe singüler denklemler birçok yazar tarafından bilimin hemen hemen her alanında çalışılmıştır (Nayfeh, 2008; Kadalbajoo ve Aggarwal, 2005; Jian, 2008; Lodhi ve Mishra, 2016; Li, 2008; Prasad ve Reddy, 2015; Zhu, 1995; Mohantyve Jha, 2005). Ayrıca singüler pertürbe başlangıç ve sınır değer problemleri farklı metotlarla değerlendirilmiştir (Kudu ve ark., 2016a; Kudu ve ark., 2016b).

Bu çalışmanın süreci şöyle özetlenebilir: Diferansiyel dönüşüm metodunun kısa bir tanımı yapılır. Metodun uygulanması için iki örnek problem verilir. Bu örnekte singülerlik özelliği veren terim denklemde bulunan her terim ile çarpılır. Diferansiyel dönüşüm metodu ile denklemdeki her terimin diferansiyel dönüşümleri bulunur. Bulunan diferansiyel dönüşümler denklemde yerlerine yazılır ve tekrar bağıntısı elde edilir. Matematik programı kullanılarak diferansiyel dönüşüm katsayıları olan $Y(k)$ değerleri $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ için hesaplanır. Son olarak bu katsayılar seri açılımında yazılır ve yaklaşık çözüm elde edilir. Bu çözümlere farklı ε ve t değerleri verilerek tam çözüm, yaklaşık çözüm ve hata değerleri bulunur. Sonuçlar tablo ve grafikler üzerinde gösterilir. Böylece metodun singüler pertürbe singüler denklemleri çözebilme etkinliği sunulmuş olur.

Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Bu kısımda, bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu kısaca tanıtılır ve bazı teoremler sunulur.

$y(t)$ orijinal fonksiyonunun $T-$dönüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsü $Y(k)$ dönüşüm fonksiyonu olarak aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right]_{t=0}. \tag{3}$$

$Y(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümü ise

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k = Y(0) + Y(1)t + Y(2)t^2 + Y(3)t^3 + \cdots \tag{4}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda verilen ifadelerden diferansiyel dönüşümün Taylor seri açılımından türetildiği kolayca anlaşılmaktadır.

Aşağıda verilen teoremler ise örnek çözümlerinde diferansiyel denklemin terimlerine karşılık gelecek diferansiyel dönüşümleri göstermektedir. Bu teoremler diferansiyel dönüşüm tanımından elde edilir ve ispatları çalışmanın kaynaklarında görülebilir.

Teorem

Eğer $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$ ise

$$F(k) = (k+1)G(k+1).$$

Teorem

Eğer $f(t) = \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$ ise

$F(k) = (k+2)(k+1)G(k+2).$

Teorem

Eğer $f(t) = ty'(t)$ ise

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)(k-r+1)\, G(k-r+1).$$

Teorem

Eğer $f(t) = tsinh(t)$ ise

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1) \frac{1^{(k-r)}}{(k-r)!}$$

$$\frac{1^{(k-r)}}{(k-r)!} = \begin{cases} \frac{1^{(k-r)}}{(k-r)!}, (k-r)\ \ tek\ ise \\ 0, \qquad (k-r)\ \ çift\ ise \end{cases}$$

Teorem

Eğer $f(t) = tcosh(t)$ ise

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1) \frac{1^{(k-r)}}{(k-r)!}$$

$$\frac{1^{(k-r)}}{(k-r)!} = \begin{cases} \frac{1^{(k-r)}}{(k-r)!}, (k-r)\ \ çift\ \ ise \\ 0, \qquad (k-r)\ \ tek\ ise \end{cases}$$

Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Singüler pertürbe Singüler Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 1. Singüler pertürbe singüler diferansiyel denklem,

$$-\varepsilon y'' + \left(1 - \frac{1}{t}\right) y' - \frac{t}{2} y = 0, \qquad (5)$$

sınır değerleri,

$$y(0) = 0,\ \ y(1) = \frac{1}{2} \qquad (6)$$

ve tam çözümü

$$y(t) = \frac{1}{2-t} - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-t+t^2}{4\varepsilon}\right).$$

ile verilen sınır değer probleminin diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak çözümü:

Öncelikle (5) denklemi aşağıdaki gibi t ile çarpılır

$$-\varepsilon t y'' + (t-1)y' - \frac{1}{2} y = 0, \qquad (7)$$

Sonra (7) denklemdeki her bir terime karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonlarını teoremler yardımıyla bulunur.

$$-\varepsilon t y''(t) \to -\varepsilon k(k+1)Y(k+1)$$

$$ty'(t) - y'(t) \to kY(k) - (k+1)Y(k+1)$$

$$\frac{t}{2} y(t) \to \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)\, Y(k-r) = \frac{1}{2} y(k-1)$$

Bulunan bu diferansiyel dönüşümleri (7) denkleminde yazılırsa aşağıdaki tekrar bağıntısı elde edilir:

$$Y(k+1) = \frac{kY(k) - \frac{1}{2}Y(k-1)}{(\varepsilon k+1)(k+1)} \qquad (8)$$

Burada $k = 0,1,2,3,4 \ldots$ değerleri (8) tekrar bağıntısında yazılırsa $Y(2), Y(3), Y(4), Y(5) \ldots$ diferansiyel dönüşümleri elde edilir. $Y(0)$ ve $Y(1)$ için $y(0) = 0$ ve $y'(0) = c$, başlangıç koşulları (4) denkleminde yazılırsa $Y(0) = 0$ ve $Y(1) = c$ elde edilir. Tekrar bağıntısı ile

$$k = 1, \qquad Y(2) = \frac{Y(1) - \frac{1}{2}Y(0)}{2(\varepsilon+1)} = 0.1332400519$$

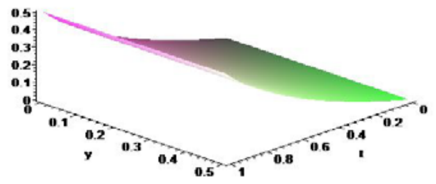
$$k = 2, \quad Y(3) = \frac{Y(2) - \frac{1}{2}Y(1)}{3(2\varepsilon+1)} = 0.04428037653$$

$$k = 3, \qquad Y(4) = \frac{Y(3) - \frac{1}{2}Y(2)}{4(3\varepsilon+1)} = 0.01650575863$$

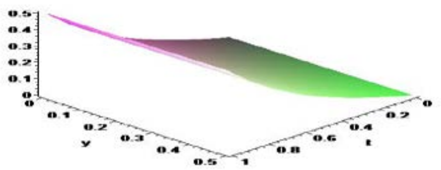
diferansiyel dönüşümleri elde edildikten sonra (4) serisinde yerlerine yazılırsa,

$$y_{DTM} = 0.2667465839t + 0.1332400519t^2 + 0.04428037653t^3 + 0.01650575863t^4 + \cdots$$

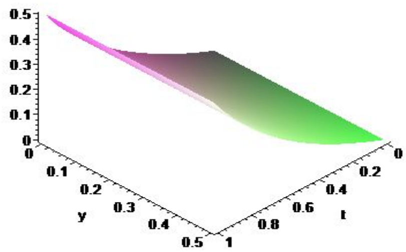
seri çözümü bulunur. $\varepsilon = 0.001$ için seri çözümden elde edilen yaklaşık çözüm eğrisi Şekil 1, tam çözüm eğrisi Şekil 2 ile verilir. Şekil 3'te ise yaklaşık ve tam çözüm eğrileri 2 boyutlu (Yaklaşık ve tam çözüm-b) ve üç boyutlu (Yaklaşık ve tam çözüm-a) olarak gösterilir.



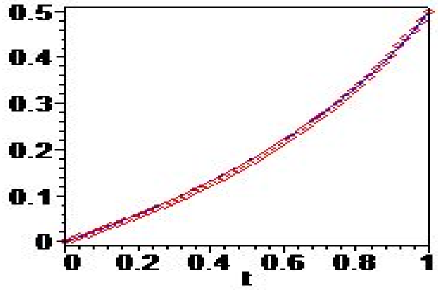
Şekil 1. $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözüm.



Şekil 2. $\varepsilon = 0.001$ için tam çözüm eğrileri.



Yaklaşık ve tam çözüm-a



Yaklaşık ve tam çözüm-b

Şekil 3. $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık ve tam çözüm eğrileri.

Çizelge 1. $\varepsilon = 0.001$ için tam çözüm, DTM çözümü ve hata değerleri.

t	Tam çözüm	DTM çözüm	Hata
0.0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.1	0.0263270393	0.0280530836	0.0017260443
0.2	0.0555755552	0.0590628114	0.0034872562
0.3	0.0882615434	0.0933716348	0.0051100914
0.4	0.1250299991	0.1313976859	0.0063676868
0.5	0.1666979157	0.1736722018	0.0069742861
0.6	0.2143157134	0.2209100735	0.0065943601
0.7	0.2692570185	0.2741600074	0.0049029889
0.8	0.3333533329	0.3351767723	0.0018234394
0.9	0.4091021589	0.3351767723	0.0739253866
1.0	0.5000000000	0.4999999998	0.0000000002

Çizelge 1'de, $\varepsilon = 0.001$ ve t'nin farklı değerleri için tam çözüm, yaklaşık çözüm (DTM çözüm) ve hata değerleri gösterilmiştir.

Örnek 2. Singüler pertürbe singüler başlangıç değer problemi,

$$-\varepsilon y''(t) + \frac{1}{t} y(t) = f(t) \qquad (9)$$

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0 \qquad (10)$$

tam çözümü ise

$$y(t) = tsinh(t).$$

Burada

$$f(t) = (1 - \varepsilon t)\sinh(t) - 2\varepsilon \cosh(t)$$

biçimindedir.

(9)-(10) probleminin çözümü için ilk adım olarak (9) denklemi t ile çarpılır.

$$-\varepsilon t y'' + y = t(1-\varepsilon t)\sinh(t) - 2\varepsilon t\cosh(t) \qquad (11)$$

Sonra (11) denklemindeki tüm terimler için diferansiyel dönüşüm fonksiyonları teoremler yardımıyla elde edilir.

$$y(t) \to Y(k)$$

$$-\varepsilon t y''(t) \to -\varepsilon k(k+1)Y(k+1)$$

$$t sinh(t) \to \begin{cases} \dfrac{1^{(k-1)}}{(k-1)!}, & (k-1)\ \ tek\ ise \\ 0, & (k-1)\ \ çift\ ise \end{cases}$$

$$\varepsilon t^2 sinh(t) \to \begin{cases} \dfrac{\varepsilon 1^{(k-2)}}{(k-2)!}, & (k-2)\ tek \\ 0, & (k-2)\ çift \end{cases}$$

$$2\varepsilon t cosh(t) \to \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon 1^{(k-1)}}{(k-1)!}, & (k-1)\ \ çift \\ 0, & (k-1)\ \ tek \end{cases}$$

elde edilen bu diferansiyel dönüşümler (11) denkleminde yazılırsa aşağıdaki tekrar bağıntısı bulunur:

$$Y(k+1) = \frac{Y(k) - \overbrace{\dfrac{1}{(k-1)!}}^{k-1\ tek\ ise} + \overbrace{\dfrac{\varepsilon}{(k-2)!}}^{k-2\ tek\ ise} + \overbrace{\dfrac{2\varepsilon}{(k-1)!}}^{k-1\ çift\ ise}}{\varepsilon k(k+1)}$$

bu tekrar bağıntısında $k = 0,1,2,3,4\ldots$ için $Y(3)$, $Y(4)$, $Y(5), \ldots$ diferansiyel dönüşümleri elde edilir. $Y(0)$, $Y(1)$ ve $Y(2)$ için $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ ve $y''(0) = d$ (d, sonlu sabit) başlangıç koşulları (4) denkleminde yazılırsa $Y(0) = 0$, $Y(1) = 0$ ve $Y(2) = d$ bulunur. Yukarıdaki tekrar bağıntısı ile

$$k = 2, \qquad Y(3) = \frac{Y(2) - 1 + 0 + 0}{6\varepsilon}$$

$$k = 3, \qquad Y(4) = \frac{Y(3) - 0 + \varepsilon + \varepsilon}{12\varepsilon}$$

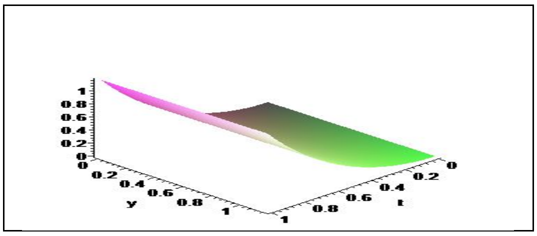
$$k = 4, \qquad Y(5) = \frac{Y(4) - \frac{1}{6} + 0 + 0}{20\varepsilon}$$

$$k = 5, \qquad Y(6) = \frac{Y(5) - 0 + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6}}{30\varepsilon}$$

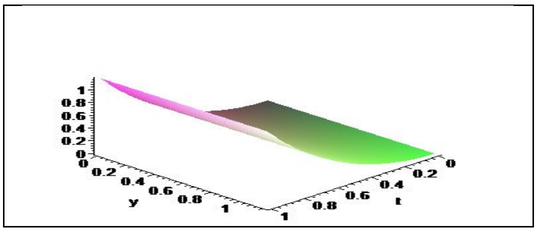
$k = 6,7,8, \ldots$ için bu şekilde devam ederek diferansiyel dönüşümler elde edilir ve (4) serisinde yerlerine yazılırsa,

$$y_{DTM} = 0.99899999900t^2 - 0.16.10^{-5}t^3 + 0.16653t^4 + 0.0096t^5 + \cdots$$

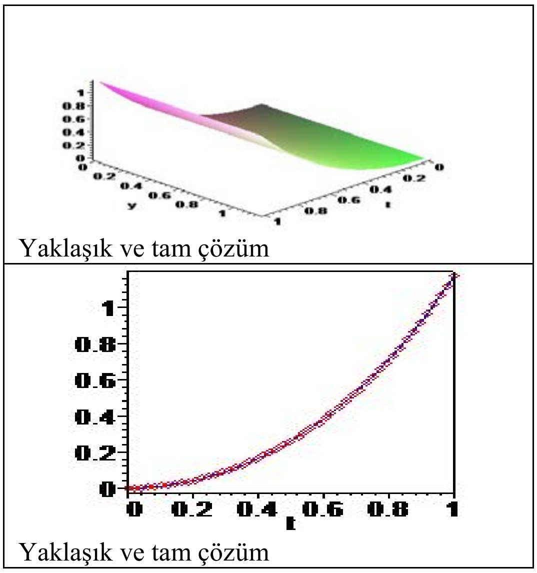
seri çözümü elde edilir. $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözüm eğrisi Şekil 4, tam çözüm eğrisi Şekil 5 ile verilir. Şekil 6'da ise yaklaşık ve tam çözüm eğrileri gösterilir.



Şekil 4. $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözüm eğrisi.



Şekil 5. $\varepsilon = 0.001$ için tam çözüm eğrisi.



Şekil 6. $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık ve tam çözüm eğrisi.

Çizelge 2'de $\varepsilon = 0.001$ için t'ye verilen farklı değerlerden elde edilen tam çözüm, DTM çözümü ve hata değerleri verilmiştir.

Çizelge 2. $\varepsilon = 0.001$ için tam çözüm, DTM çözümü ve hata değerleri.

t	Tam çözüm	DTM çözüm	Hata
0.0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.1	0.0100166750	0.0100067473	0.0000099277
0.2	0.0402672005	0.0402295068	0.0000376937
0.3	0.0913560880	0.0912821769	0.0000739111
0.4	0.1643009303	0.1642013680	0.0000995623
0.5	0.2605476528	0.2604579225	0.0000897303
0.6	0.3819921493	0.3819684348	0.0000237145
0.7	0.5310085913	0.5311067713	0.0000981800
0.8	0.7104847858	0.7107155904	0.0002308046
0.9	0.9238650534	0.9241178625	0.0002528091
1.0	1.1752011940	1.1752011750	0.0000000190

Sonuç

Çalışmada, diferansiyel dönüşüm yönteminin singüler pertürbe singüler başlangıç ve sınır değer problemlerini gayet kolay ve akıcı bir proses ile çözdüğü gösterilmiştir. İki örnek uygulamasından elde edilen veriler tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Sonuçlar gösterir ki kullanılan metot hızlı ve güvenilirdir.

Kaynaklar

Alquran, M., Al-Khaled, K., 2012. Effective approximate methods for strongly nonlinear differential equations with oscillations. Mathematical Sciences. 6:32.

Ayaz, F., 2004a. Solution of the system of differential equations by differential transform method. Applied Mathematics and Computation. 147:547-567.

Ayaz, F., 2004b. Applications of differential transform method to differential algebraic equations. Applied Mathematics and Computation. 152: 649-657.

Ertürk, V.S., 2007. Differential transform method for solving differential equations of Lane-Emden type. Mathematical and computational Applications. 12(3):135-139.

Kadalbajoo, M.K., Aggarwal, V.K., 2005. Fitted mesh B-spline method for solving a class of singular singularly perturbed boundary value problems. International Journal of Computer Mathematics. 82(1):67-76.

Kudu, M., Amirali, I., Amiraliyev, G.M., 2016a. A layer analysis of parameterized singularly perturbed boundary value problems. IJAM. 29(4):439-449.

Kudu, M., Amirali, I., 2016b. A priori estimates of solution of parameterized singularly perturbed problem. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2, 73-78.

Li, J., 2008. A computational method for solving singularly perturbed two-point singular boundary value problem. International Journal of Mathematical Analysis. 2:1089-1096.

Lodhi, R.K., Mishra, H.K., 2016. Solution of a class of fourth order singular singularly perturbed boundary value problems by quintic B-spline method. Journal of Nigerian Mathematical Society. 35:257-265.

Nayfeh, A.H., 2008. Perturbation Methods. John Wiley&Sons.

Mohanty, R.K., Jha, N., 2005. A class of variable mesh spline in compression method for singularly perturbed two point singular boundary value problem. Applied Mathematics and Computation. 704-716.

Prasad, H.S., Reddy, Y.N., 2015. A fifth order compact difference method for singularly perturbed singular boundary value problems. American Journal of Applied Mathematics and Statistics. 3:49-53.

Pukhov, G.E., 1986. Differential transformations and mathematical modeling of physical processes. Kiev.

Zhou, J.K., 1986. Differentiel transform and its application for electrical circuits. Huazhong University Press, China.

Zhu, H., 1995. The dirichlet problem for a singular singularly perturbed quasilinear second order differential system. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 210:308-336.