



Stress intensity factors for cracked elastic beams subjected to moving loads

Volkan Kahya*^{ID}, Sebahat Karaca^{ID}

Department of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Trabzon, 61080, Turkey

Highlights:

- Number of cracks has nearly no effect on the stress intensity factors
- Increase in the crack depth increases the midspan deflections and stress intensity factors, both
- Existence of crack in the beam has great effect on the dynamic behavior of beam

Keywords:

- Moving load
- Crack
- Elastic beam
- Transfer matrix method
- Stress intensity factor

Article Info:

Received: 09.03.2017

Accepted: 26.09.2017

DOI:

10.17341/gazimmfd.416428

Acknowledgement:

Correspondence:

Author: Volkan Kahya
e-mail: volkan@ktu.edu.tr
phone: +90 462 377 2631

Graphical/Tabular Abstract

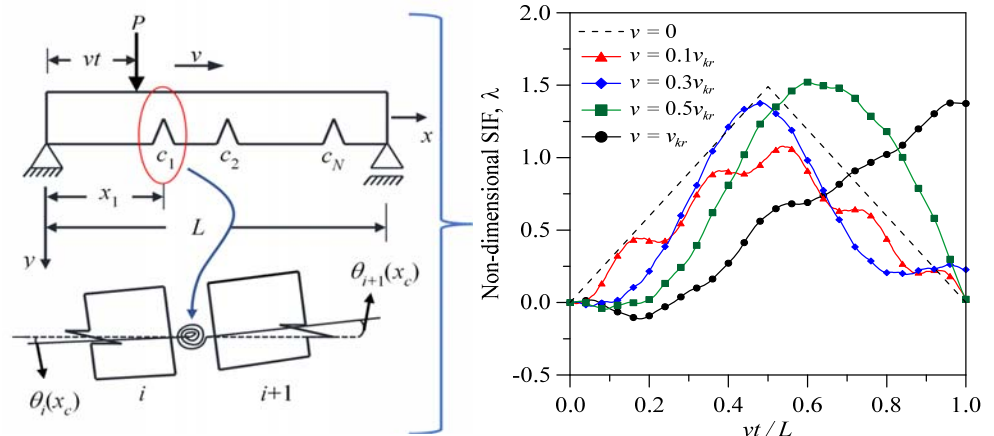


Figure A. Modelling a crack and variation of sifs depending on load speeds

Purpose: This study focuses on the stress intensity factors at crack tip in a simply-supported elastic beam with multiple cracks subjected to moving loads.

Theory and Methods:

Massless rotational spring is used to model cracks. Natural frequencies and mode shapes are obtained by the transfer matrix method. Equation of motion for the forced vibration problem is then solved numerically by the Newmark method.

Results:

For four different damage cases, variation of the maximum deflections of the beam with crack size and location for various load speeds is investigated. Stress intensity factors at crack tips are studied in detail for load speeds, crack size and location.

Conclusion:

According to the study, the number of cracks has no effect on the stress intensity factors. However, the crack depth is the most important parameter on both the deflections and stress intensity factors.



Hareketli yük etkisindeki çatlaklı elastik kirişlerde gerilme şiddeti faktörleri

Volkan Kahya*^{ID}, Sebahat Karaca^{ID}

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 61080, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Çatlak sayısının artması, gerilme şiddeti faktörleri üzerinde ise neredeyse hiç etkili olmamaktadır
- Çatlak derinliğinin artması hem yer değiştirmeleri hem de gerilme şiddeti faktörlerini arttırmıştır
- Kirişte çatlakın varlığı dinamik davranış üzerinde önemli etkiye sahiptir

Makale Bilgileri

Geliş: 09.03.2017

Kabul: 26.09.2017

DOI:

10.17341/gazimmfd.416428

Anahtar Kelimeler:

Hareketli yük,
çatlak,
elastik kiriş,
transfer matrisi metodu,
gerilme şiddeti faktörü

ÖZET

Bu çalışmada, birden fazla çatlağı olan ve hareketli yük etkisindeki basit mesnetli elastik kirişte çatlak ucundaki gerilme şiddeti faktörlerinin değişimi incelenmiştir. Çatlağın modellenmesi için kütleli dönel yay kullanılmıştır. Kirişin doğal frekansları ve mod şekilleri transfer matrisi metodu ile elde edilmiştir. Ardından, zorlanmış titreşim problemine ait hareket denklemi Newmark metoduyla sayısal olarak çözülmüştür. Üç farklı hasar durumu göz önüne alınarak çeşitli yük hızları için kirişte meydana gelen en büyük yer değiştirmelerin çatlak uzunluğu ve yerine bağlı değişimleri incelenmiştir. Çatlak ucundaki gerilme şiddeti faktörlerinin hareketli yükün hızına, çatlağın uzunluğuna ve yerine bağlı olarak değişimi detaylı olarak irdelenmiştir.

Stress intensity factors for cracked elastic beams subjected to moving loads

H I G H L I G H T S

- Number of cracks has nearly no effect on the stress intensity factors
- Increase in the crack depth increases the midspan deflections and stress intensity factors, both
- Existence of crack in the beam has great effect on the dynamic behavior of beam

Article Info

Received: 09.03.2017

Accepted: 26.09.2017

DOI:

10.17341/gazimmfd.416428

Keywords:

Moving load,
crack,
elastic beam,
transfer matrix method,
stress intensity factor

ABSTRACT

In this study, stress intensity factors at crack tip in a simply-supported elastic beam with multiple cracks subjected to moving loads is considered. Massless rotational spring is used for modelling the crack. Natural frequencies and corresponding mode shapes are obtained by the transfer matrix method. Equation of motion for the forced vibration problem is then solved numerically by the Newmark method. Considering four different damage cases, variation of the maximum deflections of the beam with crack size and location for various load speeds is investigated. Stress intensity factors at crack tips are studied in detail for load speeds, crack size and location.

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: volkan@ktu.edu.tr / Tel: +90 462 377 2631

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Hareketli yükler, yapılarda statik yüklere göre daha büyük yer değiştirme ve gerilmelerin meydana gelmesine sebep olur. Köprüler, hareketli yük altındaki yapılardır ve bir kiriş şeklinde basitçe modellenebilirler. Gelişen teknolojiyle birlikte daha hızlı ve ağır araçların ulaşım hizmetlerinde kullanılması sebebiyle, özellikle serviste olan mevcut köprülerde yükler, tasarım sırasında öngörülen yükleri aşabilmektedir. Bu tekrarlı yüklerin yapıya etkimesi ve zamanla malzemenin yorulması gibi sebeplerle köprü kirişlerinde çatlaklar meydana gelebilir. Bu hasarın tehlikeli boyutlara gelmeden tespiti ise son derece önemlidir. Bu sebeple, hareketli yük altındaki kirişlerde çatlağın dinamik davranışa etkisinin incelenmesi önemli bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Çatlaklı kirişin zorlanmış titreşim davranışının anlaşılması, hasarın meydana gelmeden önce tespiti veya meydana gelen hasarın ilerlememesi için tedbirler alınması açısından önemlidir.

Hareketli yük altında kirişlerin zorlanmış titreşimleri ve buradan hareketle hasar tayini üzerine yapılan çalışmalar son otuz yılda oldukça artmıştır. Hareketli yük altındaki basit kirişte, enine çatlakların dinamik davranışa etkisi Mahmoud vd. [1, 2] tarafından ele alınmıştır. Yazarlar, çatlaklı kirişin doğal frekansları ve mod şekillerini sayısal olarak elde etmiş ve ardından hareketli yük problemini Duhamel integrali yardımıyla çözmüşlerdir. Mahmoud [3], tek veya çift taraflı kenar çatlağı olan basit kirişte, hareketli yükten dolayı çatlak ucundaki gerilme şiddeti faktörlerinin değişimini incelemiştir. Bilello ve Bergman [4], hareketli yükün atalet etkisini dikkate alarak hasarlı Euler-Bernoulli kirişinin dinamik davranışını analitik ve deneysel olarak incelemiştir. Yazarlar, çatlaklı kirişin mod şekil fonksiyonlarını transfer matrisi metoduyla elde etmiş ve Newmark metoduyla zorlanmış titreşim problemini çözmüşlerdir. Lin ve Chang [5], çatlaklı konsol kirişin hareketli yük altında dinamik davranışını ele almışlar ve çeşitli hız değerleri için kiriş uç noktasındaki yer değiştirme üzerinde çatlağın etkilerini incelemiştir. Etefagh vd. [6], kütle-yay-sönümleyici olarak modellenen tek serbestlik dereceli hareketli araç etkisindeki çatlaklı basit kirişi ele almışlardır. Çalışmada; aracın kütlesi, rijitliği, sönümü ve hızının gelişigüzel değiştiği kabul edilmiş ve stokastik çözümler yapılmıştır. Ariaei vd. [7], hareketli kütle etkisindeki çatlaklı kirişlerin dinamik davranışını ayırık eleman tekniği (*discrete element technique*) ve sonlu elemanlar metoduyla incelemiştir. Aynı yazarlar, hareketli kütle etkisindeki çatlaklı Timoshenko kirişlerinin piezoelektrik yamalarla onarılması durumunda kiriş davranışındaki değişimi analitik olarak incelemiştir [8]. Reis ve Pala [9, 10] hareketli kütle etkisindeki çatlaklı konsol ve basit kiriş problemlerini, kütle atalet, merkezkaç ve Coriolis kuvvetlerini hesaba katarak ele almışlardır. Shavravi vd. [11], hareketli yük altındaki çatlaklı Timoshenko kirişinin piezoelektrik yamalarla onarılması durumunda dinamik davranışını sonlu elemanlar metoduyla incelemiştir. Öztürk vd. [12], sabit hızla hareket eden

tekil kuvvet etkisindeki elastik mesnetli çatlaklı kirişin dinamik davranışını sonlu elemanlar metoduyla incelemiştir. Kiriş üzerinde farklı yerlerde hesaplanan yer değiştirmelere, çatlak derinliği ve yeri, elastik mesnet ve yük hızının etkilerini araştırmışlardır. Pekediş ve Yıldız [13], model tabanlı hasar tespit tekniği algoritmaları kullanarak iç bölgelerinde ayrılma (*delamination*) bulunan tabakalı kompozit kiriş ve levhanın titreşim problemini incelemiştir. Yazarlar, deneysel veya sayısal yöntemlerle elde edilen verilerin model analiz tabanlı yapı sağlığı izleme yaklaşımlarında kullanılmasıyla laboratuvar ortamında imal edilen kompozit kiriş ve levhanın iç bölgelerinde oluşan ayrılmaların tahribatsız bir şekilde tahmin edilebileceğini belirtmişlerdir. Yukarıda verilen literatür taramasından da görüleceği üzere, çatlaklı kirişlerin hareketli yük altındaki dinamik davranışları çeşitli analitik ve sayısal metotlarla ele alınmıştır. Bu çalışmada genelde çatlağın kiriş yer değiştirmeleri üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Bununla beraber, dinamik yüklerden dolayı çatlak ucundaki gerilme şiddeti faktörlerinin değişimini detaylı bir şekilde ele alan çalışma sayısı oldukça azdır. Gerilme şiddeti faktörü, çatlak ilerleyip ilerlemeyeceğinin tespiti açısından önemli bir malzeme özelliği olduğundan, hareketli yük gibi tekrarlı dinamik yüklemelerden dolayı nasıl değiştiğinin bilinmesi son derece önemlidir. Bu çalışmada, sabit hızla hareket eden tekil kuvvet etkisindeki basit kirişte çatlak ucundaki gerilme şiddeti faktörlerinin yük hızı ve çatlak özelliklerine bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir. Kirişin doğal frekans ve mod şekilleri transfer matrisi metoduyla elde edilmiş; ardından Newmark metoduyla zorlanmış titreşim problemi sayısal olarak çözülmüştür. Kirişte en büyük yer değiştirmeler ve gerilme şiddeti faktörleriyle ilgili sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

2. TEORİK METOT (THEORETICAL METHOD)

Sabit hızla hareket eden tekil yük etkisindeki dikdörtgen kesitli, homojen, Bernoulli-Euler kirişinin geometrisi ve koordinat eksenleri Şekil 1'de verilmiştir. Kiriş üzerinde açıklık boyunca N tane çatlak bulunmaktadır. Kirişte çatlaklar, sol mesnetten itibaren x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) mesafelerinde olup çatlak uzunlukları a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) olarak verilmektedir. Şekil 2'de görüldüğü gibi kiriş, çatlağın bulunduğu kesitlerden $(N + 1)$ parçaya ayrılmış ve her parça, çatlağı temsil eden kütleless dönel yaylarla birbirlerine bağlanmıştır.

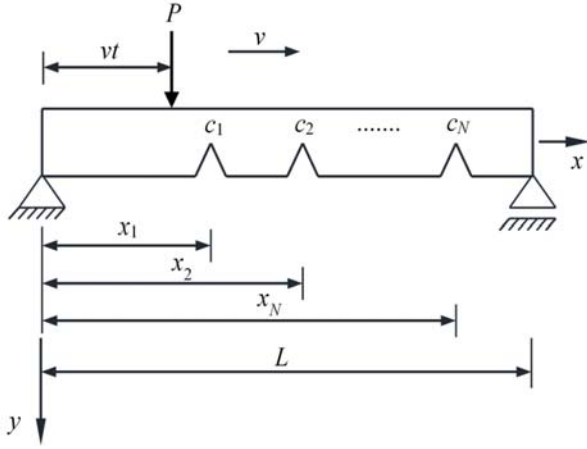
2.1. Serbest Titreşim (*Free Vibration*)

Kütleless dönel yaylar vasıtasıyla uç uca bağlanmış kiriş sisteminin serbest titreşimleri için hareket denklemi Eş. 1 ile verilmektedir.

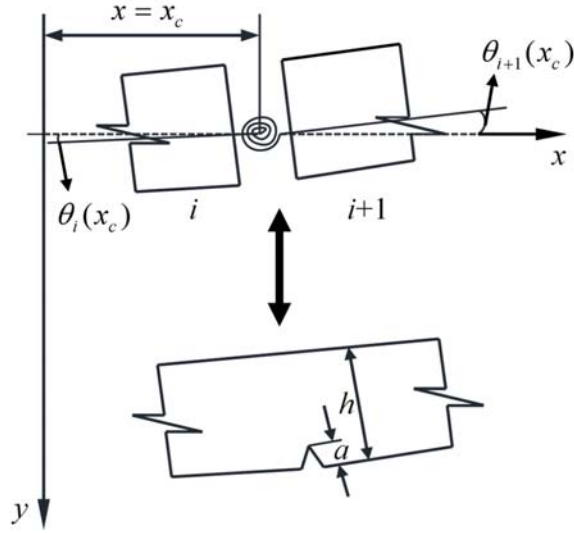
$$EI \frac{\partial^4 Y_i(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 Y_i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (1)$$

Burada $Y_i(x, t)$ kiriş parçalarının düşey yer değiştirmelerini, EI kirişin eğilme rijitliğini, ρ malzeme yoğunluğunu ve A

kesit alanını göstermektedir. Eş. 1 ifadesinde Eş. 2 ile verilen boyutsuz değer kullanılsın.



Şekil 1. Hareketli yük etkisindeki çatlaklı basit kiriş (Cracked simple beam under moving load)



Şekil 2. Eşdeğer kütleli dönel yay modeli ve çatlak sebebiyle kesit dönmesindeki süreksizlik (Equivalent massless rotational spring model and discontinuity in cross-sectional slope due to crack)

$$\bar{x} = x / L \quad (2)$$

Bu durumda, Eş. 1 diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 y_i(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (3)$$

Eş. 3 denkleminin çözümü Eş. 4 ile verildiği gibi kabul edilmiştir.

$$y_i(\bar{x}, t) = X_i(\bar{x}) e^{i\omega t} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (4)$$

Eş. 4, Eş. 3'te yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa mod şekil fonksiyonları Eş. 5'teki gibi elde edilir.

$$X_i(\bar{x}) = A_i \sin(m\bar{x}) + B_i \cos(m\bar{x}) + C_i \sinh(m\bar{x}) + D_i \cosh(m\bar{x}) \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (5)$$

Bu ifadede görülen m değeri Eş. 6 ile verilmiştir.

$$m^4 = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2 \quad (6)$$

Burada ω kirişin doğal frekansını, $A_i - D_i$ ise sınır ve süreklilik şartlarından elde edilecek sabit katsayıları göstermektedir.

Çatlağın bulunduğu kesitte süreklilik şartları Eş. 7 ile verilmiştir:

$$\begin{aligned} X_i(\bar{x}_i) &= X_{i+1}(\bar{x}_i), \\ X_i''(\bar{x}_i) &= X_{i+1}''(\bar{x}_i), \\ X_i'''(\bar{x}_i) &= X_{i+1}'''(\bar{x}_i), \\ X_i'(\bar{x}_i) &= X_{i+1}'(\bar{x}_i) - (h/L)f(d_i)X_{i+1}''(\bar{x}_i) \end{aligned} \quad (7)$$

Burada $(\bullet)'$ ile Eş. 2'de tanımlanan boyutsuz x değişkenine göre türev ifade edilmektedir. $f(d_i)$ çatlaklı kesitin yerel esnekliğini tanımlayan boyutsuz bir fonksiyon olup Eş. 8 ile verilmiştir [14].

$$f(d_i) = 2(1 - d_i / d_i)^2 (5,93 - 19,69d_i + 37,14d_i^2 - 35,64d_i^3 + 13,12d_i^4) \quad (8)$$

Bu ifadede $d_i = a_i / h$ şeklinde boyutsuz olarak verilmektedir. Eş. 7, matris formda Eş. 9'daki gibi yazılabilir:

$$[P_i] \{\Lambda_i\} = [Q_i] \{\Lambda_{i+1}\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

Bu ifadede görülen matris ve vektörler Eş. 10 ile verilmiştir.

$$[P_i] = \begin{bmatrix} \sin(m\bar{x}_i) & \cos(m\bar{x}_i) & \sinh(m\bar{x}_i) & \cosh(m\bar{x}_i) \\ \cos(m\bar{x}_i) & -\sin(m\bar{x}_i) & \cosh(m\bar{x}_i) & \sinh(m\bar{x}_i) \\ -\sin(m\bar{x}_i) & -\cos(m\bar{x}_i) & \sinh(m\bar{x}_i) & \cosh(m\bar{x}_i) \\ -\cos(m\bar{x}_i) & \sin(m\bar{x}_i) & \cosh(m\bar{x}_i) & \sinh(m\bar{x}_i) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$[Q_i] = [P_i] + [S_i], \quad \{\Lambda_i\} = \{A_i \ B_i \ C_i \ D_i\}^T$$

$$[S_i] = -m \frac{h}{L} f(a_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(m\bar{x}_i) & -\cos(m\bar{x}_i) & \sinh(m\bar{x}_i) & \cosh(m\bar{x}_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Eş. 9 ifadesinden yararlanılarak Eş. 11 elde edilebilir.

$$\{\Lambda_{i+1}\} = [Q_i]^{-1} [P_i] \{\Lambda_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

Eş. 12 yardımıyla $(N + 1)$. kiriş parçası ile 1. parçanın sabitleri arasında Eş. 13 ile verilen bağıntı elde edilir:

$$\{\Lambda_{N+1}\} = [Q_N]^{-1} [P_N] [Q_{N-1}]^{-1} [P_{N-1}] \dots [Q_1]^{-1} [P_1] \{\Lambda_1\} = [T] \{\Lambda_1\} \quad (13)$$

Burada $[T]$ transfer matrisi olarak adlandırılmaktadır.

Basit kiriş için sınır şartları modal yer değiştirmeler cinsinden Eş. 14 ile verildiği gibidir:

$$X_1(0, t) = X_1''(0, t) = X_{N+1}(1, t) = X_{N+1}''(1, t) = 0 \quad (14)$$

Verilen ilk sınır şartından $B_1 + D_1 = 0$, $-B_1 + D_1 = 0$ denklemleri elde edilir. Bunların çözümüyle $D_1 = B_1 = 0$ olarak bulunur. Kalan iki sınır şartından Eş. 15 elde edilir:

$$[W] \{\Lambda_{N+1}\} = 0 \quad (15)$$

Burada $[W]$ matrisi Eş. 16 ile tanımlanmıştır:

$$[W] = \begin{bmatrix} \sin(m) & \cos(m) & \sinh(m) & \cosh(m) \\ -\sin(m) & -\cos(m) & \sinh(m) & \cosh(m) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Eş. 13 ve Eş. 15 ifadeleri birlikte düşünüldüğünde Eş. 17 elde edilir:

$$[W][T] \{\Lambda_1\} = [Z] \{\Lambda_1\} = 0 \quad (17)$$

Burada $D_1 = B_1 = 0$ olduğu dikkate alınarak Eş. 17, aşağıdaki matris denkleme dönüştürülür:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Eş. 18'in sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Buna göre Eş. 19 ile verilen aşağıdaki denklem sağlanmalıdır.

$$\det \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{23} \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

Bu ifade, frekans denklemdir. Bu denklemin m kökleri bulunduktan sonra Eş. 6 ifadesi yardımıyla kirişin doğal frekansları elde edilir. Mod şekil fonksiyonları için ise Eş. 18 denklemini Eş. 20'de verildiği gibi açık yazalım:

$$A_1 Z_{11} + C_1 Z_{13} = 0, \quad A_1 Z_{21} + C_1 Z_{23} = 0 \quad (20)$$

Burada $A_1 = 1$ olarak kabul edilirse ilk denklemden $C_1 = -Z_{11} / Z_{13}$ elde edilir. Böylece birinci kiriş parçası için mod şekli belirlenmiş olur. Diğer parçalara ait katsayılar da Eş. 12 yardımıyla sırayla elde edilir.

2.2. Zorlanmış Titreşim (Forced Vibration)

Hareketli yük altındaki Euler-Bernoulli kirişi için boyutsuz hareket denklemi Eş. 21 ile verilmiştir.

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 y_i(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{P}{L} \delta\left(\bar{x} - \frac{vt}{L}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (21)$$

Burada P hareketli yükün büyüklüğünü, $\delta(\cdot)$ Dirac delta fonksiyonunu, v yükün hızını, t zamanı göstermektedir. Kirişin boyutsuz düşey yer değiştirmesi Eş. 22'de verildiği gibi kabul edilsin.

$$y_i(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{i,n}(\bar{x}) q_n(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (22)$$

Burada $q_n(t)$ genelleştirilmiş koordinatları göstermektedir. Eş. 22 ifadesi, Eş. 21'de yazılır; tüm ifade Eş. 5 ile çarpılır ve 0'dan 1'e integrali alınır Eş. 23 elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) EI \int_0^1 X_{i,n}^{iv}(\bar{x}) X_{i,m}(\bar{x}) d\bar{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \rho A \int_0^1 X_{i,n}(\bar{x}) X_{i,m}(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{P}{L} \int_0^1 X_{i,m}(\bar{x}) \delta\left(\bar{x} - \frac{vt}{L}\right) d\bar{x} \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (23)$$

Bu ifade üst nokta, zamana göre türevi göstermektedir. Eş. 5'in ilgili türevleri dikkate alınarak, Eş. 23 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) EI \int_0^1 \frac{\rho A}{EI} \omega^2 X_{i,n}(\bar{x}) X_{i,m}(\bar{x}) d\bar{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \rho A \int_0^1 X_{i,n}(\bar{x}) X_{i,m}(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{P}{L} \int_0^1 X_{i,m}(\bar{x}) \delta\left(\bar{x} - \frac{vt}{L}\right) d\bar{x} \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (24)$$

Eş. 24'te Eş. 25 ile verilen modal ortogonalite şartı dikkate alınırsın:

$$\int_0^1 X_{i,n}(\bar{x}) X_{i,m}(\bar{x}) d\bar{x} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (25)$$

Bu durumda Eş. 24 ile verilen hareket denklemi Eş. 26 şeklinde elde edilir.

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P}{M_n L} X_{i,n}(vt/L) = \begin{cases} \frac{P}{M_n L} X_{1,n}(vt/L) & 0 \leq vt/L \leq \bar{x}_1 \\ \frac{P}{M_n L} X_{2,n}(vt/L) & \bar{x}_1 < vt/L \leq \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \frac{P}{M_n L} X_{N+1,n}(vt/L) & \bar{x}_N < vt/L \leq 1 \end{cases} \quad (26)$$

Bu ifadede M_n modal kütle olup Eş. 27’deki gibi tanımlıdır:

$$M_n = \rho A \left\{ \int_0^{\bar{x}_1} X_{1,n}^2(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} X_{2,n}^2(\bar{x}) d\bar{x} + \dots + \int_{\bar{x}_N}^1 X_{N+1,n}^2(\bar{x}) d\bar{x} \right\} \quad (27)$$

Eş. 26, matris formda Eş. 28’deki gibi yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (28)$$

Bu ifadede $[M]$ ve $[K]$ matrisleri ile $\{F\}$ ve $\{u\}$ vektörleri Eş. 29’da verilmiştir.

$$\begin{aligned} [M] &= \text{diag}[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1], \\ [K] &= \text{diag}[\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \dots \quad \omega_n^2], \\ \{F\} &= \{F_{i,1} \quad F_{i,2} \quad \dots \quad F_{i,n}\}^T \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1), \\ \{u\} &= \{q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n\}^T \end{aligned} \quad (29)$$

Burada $\text{diag} []$, $n \times n$ boyutunda diyagonal kare matrisi göstermektedir. Eş. 26’nın sayısal çözümü Newmark metoduyla yapılacaktır. Burada işlem sırası şu şekildedir [15]:

- $[M]\{\ddot{u}\}_0 = \{F\} - [K]\{u\}_0$ denkleminde $\{\ddot{u}\}_0$ çözülür.
- Δt zaman adımı seçilir.
- $[\tilde{K}] = [K] + \gamma/\beta(\Delta t)^2 [M]$ matrisi oluşturulur. Burada γ ve β sayıları, yöntemin her adımda stabilitesi ve doğruluğuna göre seçilir. Genel olarak $\gamma = 1/2$ ve $1/6 \leq \beta \leq 1/4$ seçilmesi uygundur. Newmark metodu, $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/4$ için ortalama ivme yöntemine, $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/6$ için doğrusal ivme yöntemine dönüşür. Bu çalışmada, $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/4$ seçilmiştir.
- $[a] = (1/\beta(\Delta t)) [M]$, $[b] = (1/2\beta)[M]$ matrisleri elde edilir.
- $\{\Delta f\}_i = \{\Delta F\}_i + [a]\{u\}_i + [b]\{\ddot{u}\}_i$ elde edilir.
- $[\tilde{K}]\{\Delta u\}_i = \{\Delta f\}_i$ denkleminde i . adımda yer değiştirme için $\{\Delta u\}_i$ artımı elde edilir.
- i . adımda ivme için $\{\Delta \ddot{u}\}_i = (1/\beta(\Delta t)^2)\{\Delta u\}_i - (1/2\beta)\{\ddot{u}\}_i$ artımı elde edilir.
- $\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \{\Delta u\}_i$ ve $\{\ddot{u}\}_{i+1} = \{\ddot{u}\}_i + \{\Delta \ddot{u}\}_i$ şeklinde bir sonraki zaman adımı için yer değiştirme ve ivmeler elde edilir.

5-8 arasındaki işlemler tüm zaman adımları için tekrarlanarak $q_n(t)$ değerleri elde edilir. Ardından Eş. 22 kullanılarak kirişte meydana gelen yer değiştirmeler kolayca hesaplanır.

2.3. Gerilme Şiddeti Faktörü (Stress Intensity Factor)

Gerilme şiddeti faktörü çatlak ucu yakınındaki gerilme alanını düzenleyen temel bir büyüklük olup kesit geometrisi ve yükleme koşullarına bağlıdır. Tanım olarak Eş. 30’da verilmiştir [16].

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} f(a/h) \quad (30)$$

Burada $\sigma = Mh / 2I$ çatlaklı kesitte meydana gelen normal gerilmeyi, M eğilme momentini, $I = bh^3 / 12$ dikdörtgen kesit için atalet momentini ve $b \times h$ kesit boyutlarını göstermektedir. f boyutsuz fonksiyonu Eş. 8’de tanımlanmıştır.

Gerilme şiddet faktörü, K_{IC} kritik değerini aştığı zaman çatlak ani olarak ilerlemekte ve gevrek kırılma oluşmaktadır. Bu kritik değere kırılma tokluğu denir. Kırılma tokluğu, malzemenin kırılmaya karşı direncini gösteren bir mekanik özelliktir. $K_I \leq K_{IC}$ ise çatlak ilerlemez, $K_I > K_{IC}$ ise çatlak hızla ilerler ve gevrek kırılma meydana gelir. Özellikle dinamik yükleme altında çatlaklı kirişte gerilme şiddeti faktörünün kritik değeri aşıp aşmadığının kontrol edilmesi, oluşabilecek muhtemel kırılmaya karşı tedbir alınması açısından son derece önemlidir.

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR (RESULTS AND DISCUSSIONS)

Bu bölümde çatlaklı basit kirişin serbest ve hareketli yük altında zorlanmış titreşimlerine ait bulgulara yer verilmiş ve gerekli irdelemeler yapılmıştır. Sayısal hesaplamalarda uzunluğu $L = 900\text{mm}$, genişliği $b = 30\text{mm}$ ve yüksekliği $h = 10\text{mm}$ olan çelik kiriş göz önüne alınmıştır. Malzeme özellikleri: $E = 206\text{GPa}$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ ve $\nu = 0,3$ olarak alınmıştır. Sayısal çözümler, Tablo 1’de görülen üç farklı hasar durumu için elde edilmiştir. Tüm sayısal hesaplamalar, MATLAB ortamında yazılan programlarla yapılmıştır.

3.1. Doğal Frekanslar ve Mod Şekilleri (Natural Frequencies and Mode Shapes)

Tablo 2’de hasarsız ve göz önüne alınan üç hasar durumu için basit kirişe ait ilk altı doğal frekans verilmiştir. Görüleceği üzere hasarın varlığı doğal frekanslarda azalmaya sebep olmaktadır. Çatlak sayısının arttığı Hasar-1 ile Hasar-2 durumları karşılaştırdığında çatlak sayısındaki artışın doğal frekanslarda çok büyük değişimlere sebep olmadığı görülmektedir. Bununla beraber, çatlak derinliğinin arttığı Hasar-1 ile Hasar-3 durumları karşılaştırıldığında tek numaralı doğal frekansların önemli ölçüde azaldığı fakat çift numaralı olanların hiç değişmediği hatta hasarsız durumdakilerle aynı kaldığı görülmektedir. Çift numaralı modlara ait doğal frekansların değişmeme

Tablo 1. Göz önüne alınan hasar durumları (Damage cases considered)

Hasar durumu	Çatlak sayısı	x_i (mm)	a_i (mm)
Hasar-1	1	450	2,5
Hasar-2	2	90 – 450	2,5 – 2,5
Hasar-3	1	450	5,0

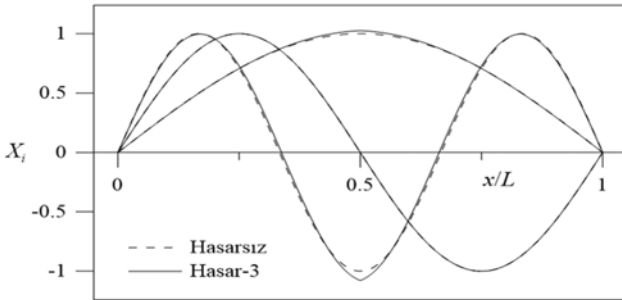
Tablo 2. Basit kirişte hasarsız ve hasarlı durumlar için ilk altı doğal frekans
(First six natural frequencies of the simple beam for undamaged and damaged cases)

Mod	Doğal frekanslar (Hz)							
	Hasarsız		Hasar-1		Hasar-2		Hasar-3	
	Analitik	ANSYS	Analitik	ANSYS	Analitik	ANSYS	Analitik	ANSYS
1	28,9345	28,8481	28,7322	28,5826	28,7139	28,5656	27,8760	27,8342
2	115,7566	115,2234	115,7566	114,8536	115,4621	114,6135	115,7566	114,8532
3	260,4111	258,5991	258,6457	256,2273	257,4904	255,2302	251,4812	249,8630
4	462,9899	457,9285	462,9899	456,4591	460,1206	454,0663	462,9899	456,4543
5	723,3641	710,7833	718,4908	704,7294	713,7255	701,0841	699,8870	690,0703
6	1041,6996	1007,1034	1041,6996	1003,5739	1035,4091	1000,7515	1041,6996	1002,0337

Tablo 3. Göz önüne alınan kirişlerde kritik hızlar (Critical speeds for beams considered)

Hasar durumu	f_1 (Hz)	v_{kr} (m/s)
Hasarsız	28,9345	52,0838
Hasar-1	28,7322	51,9014
Hasar-2	27,7856	51,8848
Hasar-3	27,8760	51,1222

sebebi, çatlakın kirişin tam ortasında olması ve mod şeklinin bu noktada hep sıfırdan geçmesidir. İkinci çatlakın varlığı hem tek modları hem de çift modları etkilemektedir. Tablo 2’de ayrıca basit kirişin sonlu elemanlar metoduyla elde edilen doğal frekansları verilmiştir. Kirişin üç boyutlu (3B) sonlu eleman modeli, ANSYS [17] programında SOLID186 elemanı kullanılarak oluşturulmuştur. Çatlak civarında ağ sıklaştırması yapılmıştır. Görüleceği üzere basit kirişte kütesiz dönel yay kabulüyle analitik olarak elde edilen doğal frekanslar, 3B sonlu eleman çözümüyle elde edilenlerle çok iyi uyum içindedir. Basit kirişin hasarsız ve hasarlı durumlarına ait analitik olarak elde edilen ilk üç mod şekli karşılaştırmalı olarak Şekil 3’te verilmiştir. Mod şekillerine dikkat edilirse, çatlakın bulunduğu noktalarda eğrilere kırıklıklar olduğu görülür. Bu durum, çatlak sebebiyle eğimde meydana gelen süreksizlikten kaynaklanmaktadır.

**Şekil 3.** Basit kirişin hasarsız ve hasarlı durumları için ilk üç mod şekli
(First three mod shapes of the simple beam for undamaged and damaged cases)

3.2. Hareketli Yük Altında Kiriş Yer Değiştirmeleri (Beam Deflections due to Moving Load)

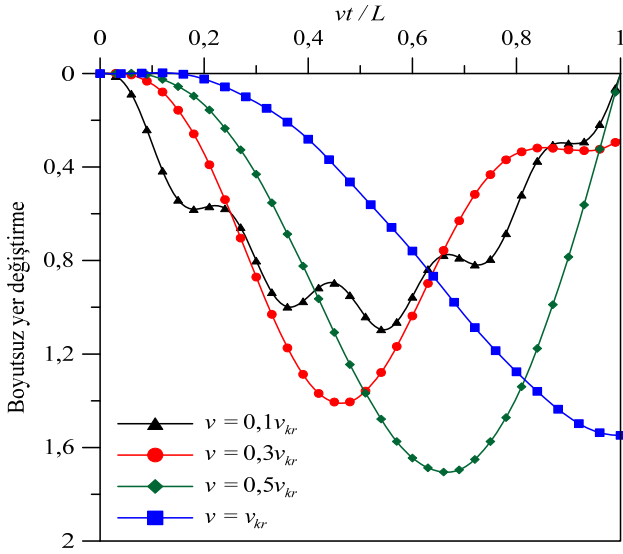
Basit kirişte en büyük yer değiştirmeler, $v = 0,1v_{kr}$, $v = 0,3v_{kr}$, $v = 0,5v_{kr}$, $v = v_{kr}$ hızları için kiriş açıklığının ortasında sayısal olarak elde edilmiştir. Burada v_{kr} hasarsız durumdaki kritik hız olup Eş. 31’deki gibi tanımlıdır [18].

$$v_{kr} = \frac{2\pi}{m_1} f_1 L \quad (31)$$

Seçilen basit kiriş için hasarsız durumda $v_{kr} = 52,0838$ m/sn olarak hesaplanır. Tablo 3’te hasarsız ve hasarlı kirişler için Eş. 31 kullanılarak hesaplanan kritik hızlar verilmiştir. Görüldüğü üzere; kirişte çatlakın varlığı rezonans hızını küçültmektedir. Çatlak sayısının veya çatlak derinliğinin artması (hasar şiddetinin artması) kirişte rezonans hızını azaltmaktadır. Şekil 4 ve 5’te hasarsız ve hasarlı durumlar için kiriş ortasında meydana gelen en büyük yer değiştirmeler verilmiştir. Grafiklerde yer değiştirmeler Eş. 32’deki gibi boyutsuz olarak verilmiştir.

$$\bar{y} = \frac{y}{y_0}, \quad y_0 = \frac{PL^3}{48EI} \quad (32)$$

Burada y_0 statik yük altında kiriş ortasında meydana gelen en büyük yer değiştirmedir. Şekil 4’te hasarsız kirişte çeşitli hız değerleri için en büyük yer değiştirmelerin değişimi görülmektedir.



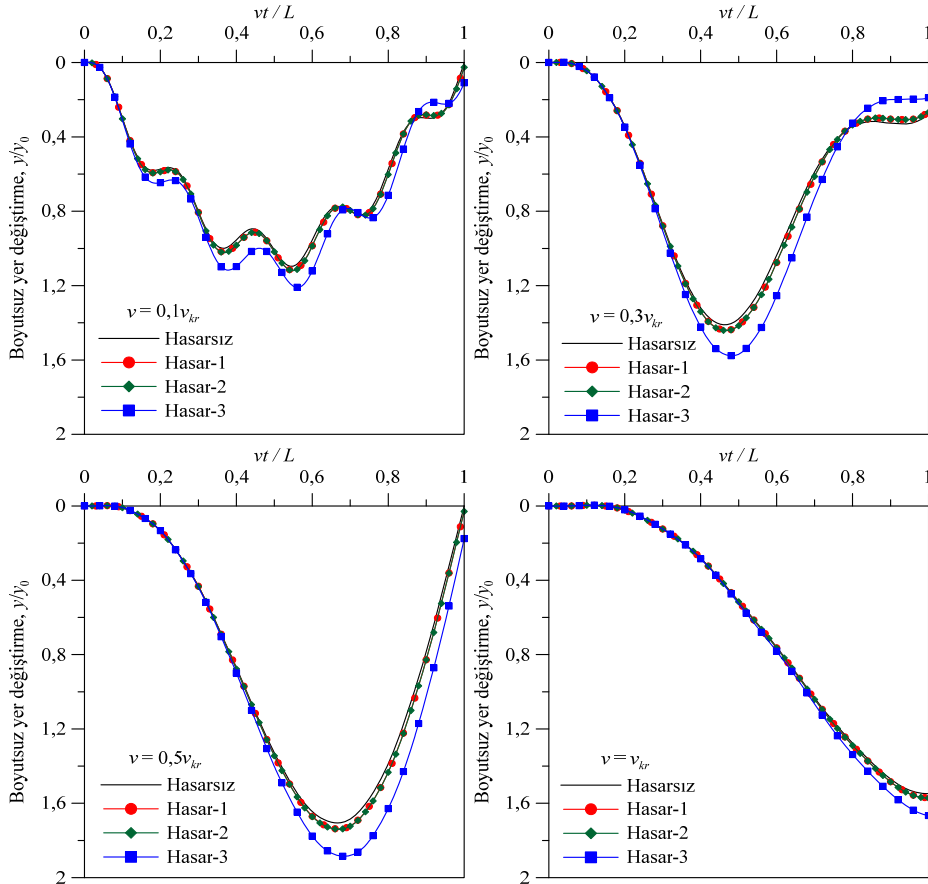
Şekil 4. Farklı hızlar için hasarsız basit kirişin ortasında meydana gelen yer değiştirmeler
(Midspan deflections of the undamaged beam for different load speeds)

Hız değiştikçe kiriş açıklık ortasındaki yer değiştirme grafiğinin şekli değişmektedir. En büyük değer $v = 0,5v_{kr}$ hızında yük, kirişin ortasını geçtikten sonra elde

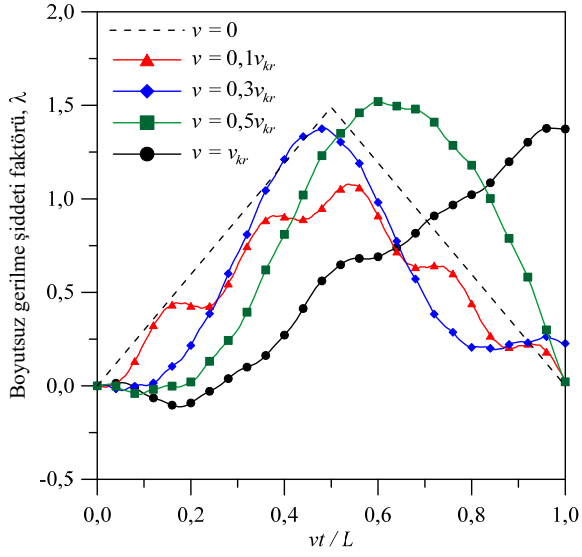
edilmektedir. Bu hız değerine kadar yer değiştirmeler genel olarak artma eğilimindedir. Hız arttıkça, en büyük yer değiştirme değerleri yük kiriş ortasını geçtikten sonra meydana gelmektedir. $v = v_{kr}$ hızında en büyük yer değiştirme, yük tam kirişin ortasını terk ederken ortaya çıkmaktadır. Hasarsız ve hasarlı durumlar için kiriş ortasında meydana gelen yer değiştirmelerin seçilen hızlara göre karşılaştırması ise Şekil 5'te verilmiştir. Sonuçlara bakıldığında, hasarlı kirişte meydana gelen yer değiştirmelerin hasarsız kirişte meydana gelen yer değiştirmelerden daha büyük olduğu açıkça görülmektedir. Hasar-3 durumunda en büyük yer değiştirmelerin elde edilmesi, çatlakın yer değiştirme üzerindeki etkisinin çatlak derinliği arttıkça daha fazla olduğunu göstermektedir.

3.3. Gerilme Şiddeti Faktörleri (Stress Intensity Factors)

Hareketli yükten dolayı basit kirişin açıklık ortasındaki çatlak ucunda meydana gelen gerilme şiddeti faktörü, yük hızının $v = 0,1v_{kr}$, $0,3v_{kr}$, $0,5v_{kr}$ ve v_{kr} olması hallerinde, göz önüne alınan hasar durumları için hesaplanmıştır. Çeşitli hız değerleri için Hasar-3 durumunda çatlak ucunda meydana gelen gerilme şiddeti faktörleri Şekil 6'da verilmiştir. Burada, λ boyutsuz gerilme şiddeti faktörü olup Eş. 33'deki gibi tanımlıdır [3].



Şekil 5. Hasarsız ve hasarlı durumlar için basit kirişin ortasında meydana gelen yer değiştirmeler
(Midspan deflections of undamaged and damaged beams for different load speeds)

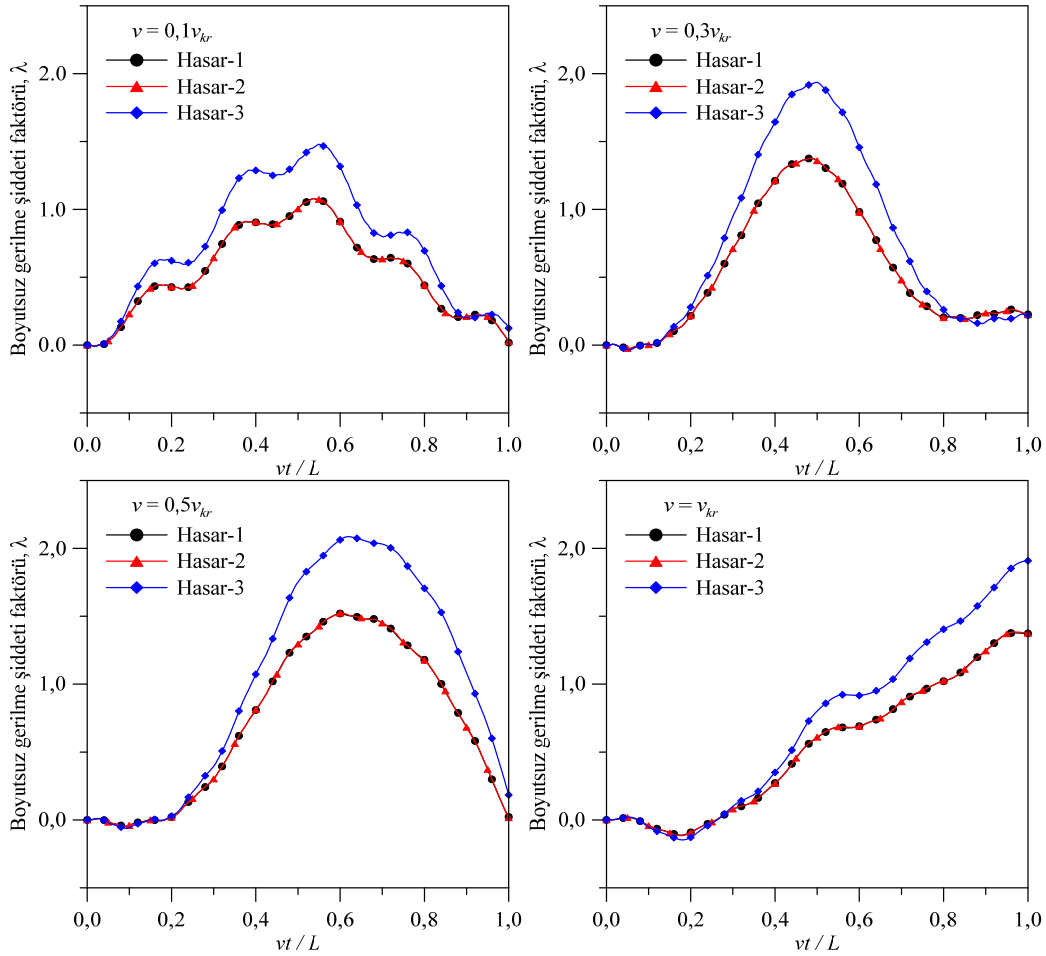


Şekil 6. Hasar-3 durumunda açıklık ortasındaki çatlakta boyutsuz gerilme şiddeti faktörleri (Dimensionless stress intensity factors at the crack on the midspan for Damage-3 case)

$$\lambda = \frac{K_I}{3PL\sqrt{\pi a} / (2bh^2)} \quad (33)$$

Hız değıştikçe çatlak ucunda meydana gelen gerilme şiddeti faktörü grafiğinin şeklinin değıştiğı görülmektedir. En büyük değeri, yer değıştirme grafiğinde olduğu gibi $v = 0,5v_{kr}$ hızında yük kirişin ortasını geçtikten sonra elde edilmektedir. Hız arttıkça, en büyük gerilme şiddeti faktörleri yük, kiriş ortasını geçtikten sonra meydana gelmektedir. Yer değıştirmelerde olduğu gibi, en büyük gerilme şiddeti faktörü de $v = v_{kr}$ hızında, yük tam kirişin ortasını terk ederken ortaya çıkmaktadır.

Ele alınan hasar durumları için kiriş ortasındaki çatlak ucunda meydana gelen gerilme şiddeti faktörlerinin çeşitli hız değerlerine göre karşılaştırılması Şekil 7’de verilmiştir. Grafiklere bakıldığında, kiriş ortasındaki çatlak ucunda meydana gelen gerilme şiddeti faktörlerinin Hasar-1 ve Hasar-2 durumları için neredeyse aynı çıktığı; hasar derinliğinin arttığı Hasar-3 halinde ise daha büyük olduğu görülmüştür. Buna göre, çatlak derinliğinin gerilme şiddeti faktörleri üzerinde çatlak sayısına göre daha etkili bir parametre olduğu söylenebilir.



Şekil 7. Açıklık ortasındaki çatlakta boyutsuz gerilme şiddeti faktörlerinin ele alınan hasar durumları için karşılaştırması (Comparison of dimensionless stress intensity factors at the crack on the midspan for damage cases considered)

4. SİMGELER (SYMBOLS)

a	: Çatlak derinliği
b	: Kesit genişliği
f_n	: Doğal frekans
h	: Kesit yüksekliği
$q_n(t)$: Genelleştirilmiş koordinatlar
t	: Zaman
v	: Yük hızı
v_{kr}	: Kritik hız
x	: Çatlağın bulunduğu kesitin sol mesnete uzaklığı
y	: Açıklık ortasındaki dinamik yer değiştirme
y_0	: Açıklık ortasındaki statik yer değiştirme
A	: Kesit alanı
EI	: Kirişin eğilme rijitliği
I	: Kesit atalet momenti
K_I	: Gerilme şiddeti faktörü
K_{IC}	: Kırılma tokluğu
L	: Kiriş uzunluğu
M	: Eğilme momenti
N	: Çatlak sayısı
P	: Yükün şiddeti
$X_n(x)$: Mod şekil fonksiyonu
$[T]$: Transfer matrisi
$Y(x,t)$: Düşey yer değiştirme
λ	: Boyutsuz gerilme şiddeti faktörü
ρ	: Malzeme yoğunluğu
σ	: Normal gerilme
$\delta(\cdot)$: Dirac delta fonksiyonu
ω_n	: Doğal açılma frekans

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada hareketli yük etkisindeki basit kirişin hasar durumunda dinamik davranışı analitik olarak incelenmiştir. Çatlaklı kiriş, kütsüz dönel yaylarla uç uca bağlanmış çubuk elemanlar topluluğu olarak modellenmiştir. Kirişin doğal frekansları ve mod şekilleri transfer matrisi metodu kullanılarak elde edilmiştir. Ardından, zorlanmış titreşime ait hareket denklemi Newmark metoduyla sayısal olarak çözülmüş; kirişin yer değiştirmeleri ve çatlak ucundaki gerilme şiddeti faktörleri elde edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre, elastik kirişte çatlak sebebiyle doğal frekanslar azalmaktadır. Mod şekillerinde ise çatlaklı kesitte, fonksiyonun eğimindeki süreksizlikten dolayı kırıklıklar ortaya çıkmaktadır. Çatlak sebebiyle kritik hız azalmaktadır.

Hasar şiddetinin artması (çatlak sayısı veya çatlak derinliğinde artma) kirişte rezonans hızının azalmasına sebep olmaktadır. Bu durum, hasarlı kirişlerin rezonansa karşı daha hassas oldukları anlamına gelmektedir. Hareketli yük altında yer değiştirmeler ve açıklık ortasındaki çatlak ucunda gerilme şiddeti faktörleri en büyük değerlerine yük $v = 0,5v_{kr}$ hızında ve kiriş ortasını geçtikten hemen sonra ulaşmaktadırlar. Çatlak derinliğinin değişmesi, kiriş titreşimleri ve gerilme şiddeti faktörleri üzerinde son derece etkilidir. Çatlak sayısının artmasına göre derinlikteki değişimin dinamik davranış üzerinde daha etkili olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Mahmoud M.A., Abou Zaid M.A., Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass, J. Sound Vib., 256 (4), 591-603, 2002.
2. Mahmoud M.A., Effect of cracks on the dynamic response of a simple beam subject to a moving load, Proc. Instn. Mech. Engrs. Part F, 215, 207-215, 2000.
3. Mahmoud M.A., Stress intensity factors for single and double edge cracks in a simple beam subject to a moving load, Int. J. Fract., 111, 151-161, 2001.
4. Bilello C., Bergman L.A., Vibration of damaged beams under a moving mass: Theory and experimental validation, J. Sound Vib., 274, 567-582, 2004.
5. Lin H.P., Chang S.C., Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load, Int. J. Mech. Sci., 48, 1456-1463, 2006.
6. Etefagh M.M., Sadeghi M.H., Rezaee M., Dynamic simulation of beam-like structure with a crack subjected to a random moving mass oscillator, Earthq. Eng. Eng Vib., 8, 447-458, 2009.
7. Ariaei A., Ziaei-Rad S., Ghayour, M., Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving mass, J. Sound Vib., 326, 709-724, 2009.
8. Ariaei A., Ziaei-Rad S., Ghayour M., Repair of a cracked Timoshenko beam subjected to moving mass using piezoelectric patches, Int. J. Mech. Sci., 52, 1074-1091, 2009.
9. Reis M., Pala Y., Vibration of a cracked cantilever beam under moving mass load, J. Civ. Eng. Manag. 18 (1), 106-113, 2012.
10. Pala Y., Reis M., Dynamic response of a cracked beam under a moving mass load, J. Eng. Mech., 139 (9), 1229-1238, 2013.
11. Shahravi M., Azimi M., Ghafari H., Tamsal M., Finite element analysis of a cracked beam subjected to a moving load with piezoelectric patches, International Conference on Advances in Software, Control and Mechanical Engineering (ICSCME'15), Antalya-Turkey, 1-11, 7-8 September, 2015.
12. Öztürk H., Kırıl Z., Gören Kırıl B., Dynamic analysis of elastically supported cracked beam subject to a concentrated moving load, Lat. Am. J. Solids Struct., 13 (1), 175-200, 2016.
13. Pekediş M., Yıldız H., Damage diagnosis of a laminated composite beam and plate via model based structural health monitoring techniques, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 31 (4), 813-831, 2016.
14. Bakhtiari-Nejad F., Khorram A., Rezaeian M., Analytical estimation of natural frequencies and mode shapes of a beam having two cracks, Int. J. Mech. Sci., 78, 193-202, 2014.
15. Chopra A.K., Dynamics of Structures, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
16. Tada H., Paris P., Irwin G., The Stress Analysis of Cracks Handbook. Second Ed., St Louis, Missouri: Research Corporation, 1985.

17. ANSYS Finite Element Software, Swanson Analysis System, USA, 2013.
18. Fryba L., Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.

