

İzotropik Malzemeden Yapılmış Dairesel Kanatçıklardaki Isıl Gerilmelerin Sayısal Modellemesi

Ali YILDIRIM^{*1}, Durmuş YARIMPABUÇ², Kerimcan ÇELEBİ³

¹Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye Meslek Yüksek Okulu, Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojileri Bölümü, Osmaniye

²Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Osmaniye

³Çukurova Üniversitesi, Ceyhan Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Adana

Geliş tarihi: 25.06.2018

Kabul tarihi: 15.10.2018

Öz

Bu çalışmada, izotropik ve homojen malzemeden yapılmış, dikdörtgen profilli eksenel simetrik olan ince bir dairesel kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve ısıl gerilmeler Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Pseudospectral Chebysev Metodu kullanılarak elde edilmiştir. Her iki sayısal yöntem de, Bessel fonksiyonları ve termoelastik teori kullanılarak elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu sayısal yöntemlerin farklı bölüntü noktaları için hata analizleri Öklid normu kullanılarak gösterilmiştir. Pseudospectral Chebysev yönteminin nokta sayısının artması ile analitik sonuca daha hızlı bir şekilde yaklaştığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Dairesel kanatçık, ısıl gerilmeler, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, Pseudospectral Chebysev yöntemi

Numerical Simulation on Thermal Stresses in An Annular Fin Made of Isotropic Material

Abstract

In this study, temperature distribution and thermal stresses of an axisymmetric thin annular fin with rectangular profile made of isotropic and homogeneous material are determined by using Complementary Function Method and Pseudospectral Chebyshev Method. Both of the methods are compared with analytical results obtained using Bessel functions and thermoelastic theory. Error analysis of these numerical methods at different partition points is shown using Euclidean norm. It is observed that pseudospectral Chebysev method approximates to the analytical results more rapidly with increasing the number of points.

Keywords: Annular fin, Thermal stresses, Complementary function method, Pseudospectral Chebysev method

* Sorumlu yazar (Corresponding author): Kerimcan ÇELEBİ, kcelebi@cu.edu.tr

1. GİRİŞ

Çeşitli uygulamalarda transfer edilen ısı miktarını artırmak için tasarlanan genişletilmiş yüzeylere kanatçık adı verilir. Birçok endüstriyel uygulamada ısı transfer elamanı olarak kullanılan kanatçıklar; ısının transfer edildiği yüzey boyunca paralel uzanan uzunlamasına kanatçıklar, belirli mesafelerle yerleştirilmiş dairesel ve düz kanatçıklar ile iğne tipi kanatçıklar gibi farklı kesitlerde ve dikdörtgen, üçgen, konkav, konveks gibi farklı profillerde olabilirler. Kompakt bir yapıya sahip olması, ısı performansının iyi olması ve birçok kanatçık profiline göre üretim maliyetlerinin düşük olması sebebi ile içten yanmalı motorlarda, kompresörlerde, ısı eşanjörü vs. gibi bazı uygulamalarda dairesel kanatçıklar yoğun bir şekilde kullanılmaktadır [1-3].

Isı transferi esnasında kanatçıkta oluşan sıcaklık farkları, kanatçık üzerinde ısıl gerilmelerin oluşmasına sebep olmaktadır. Isıl gerilmeler ise sünme, yorulma, çatlak ve çatlak ilerlemesi gibi kanatçık ömrünü azaltan mekanik kusurlara yol açmaktadır. Bu nedenle uygun malzeme seçimi ve doğru kanatçık tasarımının yapılabilmesi için ısıl gerilmelerin de belirlenmesi gerekir [4]. Kanatçıklarda ısıl gerilmeler, analitik yöntem, Pertürasyon yöntemi gibi yaklaşım yöntemleri ya da sayısal yöntemlerden birisi kullanılarak belirlenebilir [5].

Bu çalışmada homojen ve izotropik malzemeden yapılmış, kalınlığı ihmal edilen, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıkta sıcaklık dağılımları ve ısıl gerilmeler Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Pseudospectral Chebysev Metodu gibi farklı iki sayısal yöntem kullanılarak belirlenmiştir. Her iki sayısal yöntem'de, Bessel fonksiyonları ve termoelastik teori kullanılarak elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu sayısal yöntemler için analitik sonuçlara göre farklı bölüntü sayılarındaki maksimum hata miktarları Öklid normu kullanılarak gösterilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kanatçıklarda ısı transferi ile ilgili analizler yapılırken, birçok mühendislik probleminde

olduğu gibi bazı kabuller ve varsayımlar yapılır. Gardner [6] çalışmasında bu kabul ve varsayımlardan bahsetmiş, değişik türdeki kanatçıkların verimlerini bulmuştur.

Literatürde, kanatçık verimi ve etkinliğinin incelenmesi, kanatçık boyutlarının ve profilinin optimizasyonu ile ilgili oldukça fazla çalışma mevcuttur [7-35].

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği dairesel bir kanatçıkta ısıl gerilmeler, Mallick ve arkadaşları [4] tarafından analitik bir yaklaşım ile çözülmüştür. Kanatçıkta sıcaklık dağılımları homotopi pertürasyon yöntemi kullanılarak bulunmuş, ısıl gerilmeler ise direk integrasyon ile elde edilmiştir.

Tabanında zamanın üstel fonksiyonuna bağlı olarak azalan ısı akısına maruz kalan dairesel bir kanatçıkta geçici ısıl gerilmeler Wu [5] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımını idare eden denklem Laplace uzayında Keller ve Keller'in üstel benzeri çözüm tekniği ile çözülmüş, kompleks kontur integrasyonu ve rezidü teoremi kullanılarak ters Laplace dönüşümü yapılmıştır. Elde edilen sıcaklık dağılımına, elastik teori entegre edilerek kanatçıkta ısıl gerilmeler belirlenmiştir.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla, ısı transfer katsayısının ise yarıçap ile değiştiği, yüzeyinde ve kanatçık ucunda konveksiyon ve ısıma ile ısı transfer durumunun olduğu dairesel bir kanatçıkta ısıl gerilmeler Yu ve Chen [35] tarafından Taylor dönüşüm metodu ve termoelastik teori kullanılarak çözülmüştür.

Yüzeyinde ve kanatçık ucunda konveksiyon ve ısıma ile ısı transfer durumunun olduğu dairesel bir kanatçıkta geçici ısıl gerilmeler Yu ve Chen [36] tarafından Taylor dönüşümü ve sonlu farklar yaklaşımının birleşimi olan hibrid bir yöntem ile termoelastik teori kullanılarak çözülmüştür.

Tabanında zamanın üstel fonksiyonuna bağlı olarak azalan ısı akısına aniden maruz kalan, termomekanik birleştirme etkisinin göz önünde bulundurulduğu dairesel bir kanatçığın termoelastik davranışı, Yang ve Chu [37]

tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler Laplace uzayında Bessel fonksiyonları kullanılarak elde edilmiş ve Fourier dönüşümü uygulanarak zaman uzayındaki sıcaklık dağılımı ve gerilmeler bulunmuştur.

Isı transfer katsayısı kanatçık yarıçapına bağlı olarak değişen, tabanında zamanın üstel fonksiyonuna bağlı olarak azalan ısı akısına aniden maruz kalan, termomekanik davranışın dikkate alındığı dairesel bir kanatçıktaki geçici ısı gerilmeler Lee ve arkadaşları [38] tarafından Laplace dönüşümü ve sonlu farklar yönteminin birleşimi olan hibrid bir yöntem kullanılarak Laplace uzayında bulunmuştur. Daha sonra matris benzerlik dönüşümü yöntemi ve Fourier serileri kullanılarak gerçek uzaya dönülmüştür.

Isıl olarak dengeye ulaşmış, ısı iletkenliğinin sıcaklıkla değiştiği, yüzeyinde ve ucunda konveksiyon ve ışımayla ısı yayımının olduğu, doğrusal olmayan sınır koşulları altındaki dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı Chiu ve Chen [39] tarafından Adomian çift bozunma yöntemi ile çözülmüş, ısı gerilmeler ise doğrudan integrasyonla elde edilmiştir.

Isıl iletkenliğinin sıcaklıkla değiştiği, periyodik ısı transferi sınır koşulu altındaki bir dairesel kanatçıktaki geçici ısı gerilmeler Chiu ve Chen [40] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı Adomian bozunma yöntemi ile yaklaşık olarak çözülmüş, geçici ısı gerilmeler ise direk integrasyonla elde edilmiştir.

Kanatçık yüzeyinde ve ucunda konveksiyon ve ışıma ile ısı yayımının olduğu, ısı iletkenliğinin sıcaklıkla değiştiği, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmeler ve sıcaklık dağılımları Wang ve arkadaşları [41] tarafından hibrid ara değer fark yöntemi kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir.

Üniform olmayan sıcaklık değişimine maruz kalan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzmeden (FDM) yapılmış dönen bir diskteki termoelastik analiz, Tütüncü ve Temel [42] tarafından incelenmiştir. Termomekaniksel özelliklerin, kalınlığın ve sıcaklığın konuma bağlı

değişmesinden dolayı olayı yöneten diferansiyel denklemler değişken katsayılı olarak elde edilmiş ve bu diferansiyel denklemler sayısal bir yöntem olan Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) ile çözülmüştür. Yöntemin doğruluğu, homojen malzmeden yapılmış dönen diskteki analitik çözüm ile TFM çözümünü karşılaştırılması ile test edilmiştir. TFM'nin dönen disklerin ısı iletimi ve termoelastik analizinde verimli bir şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir.

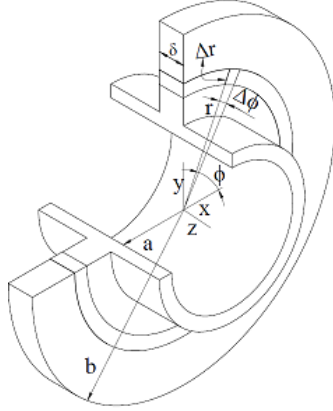
Tabanında zamanın üstel bir fonksiyonu olarak azalan ısı akısına maruz kalan dairesel bir kanatçıktaki geçici ısı gerilmeler Baş ve Keleş [43] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı Laplace uzayında analitik olarak çözülmüş, Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu kullanılarak gerçek uzaydaki sıcaklık dağılımları elde edilmiştir. Sıcaklığa bağlı gerilmeler elastik teori ve sıcaklık dağılımlarının birleştirilmesi ile bulunmuştur.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Materyal

Dairesel kanatçıktaki (Şekil 1) sıcaklık dağılımını ve ısı gerilmeleri idare eden denklemler ile ilgili sınır koşullarını belirlemek için aşağıdaki kabuller yapılmıştır;

- Kanatçığın ekstenel olarak simetrik bir yapıya sahip olduğu,
- Kanatçığın her yerinde kalınlığın aynı ve bu kalınlığın kanatçık çapına göre çok küçük olduğu,
- Kanatçık yüzeyinde sadece taşıma ile ısı yayımını olduğu, ışıma ile ısı yayımının ihmal edildiği,
- Çevre sıcaklığı ve ısı transfer katsayısının sabit olduğu,
- Kanatçığın herhangi bir noktasında zamana bağlı sıcaklık değişimi olmadığı, yani kanatçığın kararlı duruma ulaştığı,
- Kanatçık içerisinde herhangi bir ısı kaybı ya da üretimi olmadığı,
- Kanatçıkta iç kuvvetlerin, yüzeylerinde ise traksiyonun olmadığı varsayılmıştır.



Şekil 1. Dairesel kanatçık

3.2. Isıl Gerilmelerin Formülasyonu

Kanatçık üzerindeki sıcaklık farkları, kanatçıkta farklı ısıl genleşmelere ve neticesinde ise kanatçık üzerinde gerilme, gerilme ve deplasmana sebep olmaktadır. Kanatçıkta iç kuvvetlerin olmadığı, yüzeylerinde ise traksiyon olmadığı varsayılan, eksenel simetriye sahip, kalınlığı ince olan dairesel bir kanatçık için gerilme-gerilme sıcaklık ilişkisi, gerilme denge denklemi, gerilme ve sınır koşullarını modelleyen denklemler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Sıcaklık-gerilme-gerilme ilişkisi:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\phi) + \alpha T \quad (1)$$

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_r) + \alpha T \quad (2)$$

ya da

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_r + \nu \epsilon_\phi - (1+\nu)\alpha T] \quad (3)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_\phi + \nu \epsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \quad (4)$$

Gerilme denge denklemi:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (5)$$

Gerilme yer değiştirme denklemleri:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (6)$$

$$\epsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (7)$$

ve traksiyonun olmadığı sınır koşulları;

$$\sigma_r(a) = 0 \quad (8)$$

$$\sigma_r(b) = 0 \quad (9)$$

şeklinde [44]. Burada, a ve b kanatçık iç ve dış yarı çapı, r ve φ polar koordinatları, σ_r ve σ_φ radyal ve teğetsel gerilmeleri, ε_r ve ε_φ radyal ve teğetsel gerilmeleri, E elastisite modülünü, α lineer ısıl genleşme katsayısını, T sıcaklık, ν Poisson oranını, u radyal deplasmanı göstermektedir. Boyutsuz parametreler

$$\epsilon_\phi = \frac{u}{r}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{E}, \quad S_\phi = \frac{\sigma_\phi}{E}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a}$$

$$R = \frac{b}{a}, \quad N^2 = \frac{2ha^2}{\delta k}, \quad \theta = \frac{(T - T_\infty)}{(T_b - T_\infty)}$$

$$\chi = \alpha(T_b - T_\infty)$$

kullanılarak boyutsuz gerilmeler, boyutsuz denge denklemi ve boyutsuz sınır koşulları

$$S_r = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\epsilon_r + \nu \epsilon_\phi - (1+\nu)\chi \left(\theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (10)$$

$$S_\phi = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\epsilon_\phi + \nu \epsilon_r - (1+\nu)\chi \left(\theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (11)$$

$$\frac{dS_r}{d\xi} + \frac{S_r - S_\phi}{\xi} = 0 \quad (12)$$

$$\epsilon_r = \frac{d\bar{u}}{d\xi} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{\bar{u}}{\xi} \quad (14)$$

$$S_r(1)=0 \quad (15)$$

$$S_r(R)=0 \quad (16)$$

şeklinde elde edilir. Burada, S_r ve S_{ϕ} boyutsuz gerilmeleri, ξ boyutsuz yarıçapı, \bar{u} boyutsuz deplasmanı, R boyutsuz dış yarıçapı, N boyutsuz parametreyi, θ boyutsuz sıcaklığı, χ boyutsuz ısı genişleme katsayısını, T_b ve T_{∞} ise sırası ile kanatçık taban ve çevre sıcaklığını ifade etmektedir.

Eşitlik 13-14 denklemleri, Eşitlik 10-11 denklemleri içerisinde yerine konulursa, deplasmana ve türevine bağlı boyutsuz gerilme denklemleri

$$S_r = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{d\bar{u}}{d\xi} + \nu \frac{\bar{u}}{\xi} - (1+\nu)\chi \left(\theta + \frac{T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} \right) \right] \quad (17)$$

$$S_{\phi} = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{\bar{u}}{\xi} + \nu \frac{d\bar{u}}{d\xi} - (1+\nu)\chi \left(\theta + \frac{T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} \right) \right] \quad (18)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik 17 ve 18 denge denklemi 12'de yerine yazılırsa, deplasmana bağlı ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklem

$$\bar{u}'' + \frac{1}{\xi} \bar{u}' - \frac{1}{\xi^2} \bar{u} = (1+\nu)\chi \theta' \quad (19)$$

elde edilir. Buradaki ()' ifadesi ξ 'ye göre türevi göstermektedir. Boyutsuz radyal gerilme için tanımlanmış sınır koşulları (15-16) kullanılarak sınır koşullarındaki deplasman değerleri, gerilmelerin deplasmana bağlı denklemlerinden (17-18)

$$\left[\bar{u}' + \nu \frac{\bar{u}}{\xi} \right]_{\xi=1} = (1+\nu)\chi \left(\theta(1) + \frac{T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} \right) \quad (20)$$

$$\left[\bar{u}' + \nu \frac{\bar{u}}{\xi} \right]_{\xi=R} = (1+\nu)\chi \left(\theta(R) + \frac{T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} \right) \quad (21)$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Sıcaklık Dağılımının Formülasyonu

Isıl olarak kararlı bir duruma ulaşmış, sadece konveksiyonla ısı iletimin olduğu, çevre sıcaklığının sabit varsayıldığı ve iç ısı üretiminin ve tüketimin olmadığı düşünülen eksenel simetriye sahip ince dairesel bir kanatçıktaki enerji denge denklemi ve sınır koşulları [45]

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{k\delta} (T - T_{\infty}) = 0 \quad (22)$$

$$T(a) = T_b \quad (23)$$

$$T'(R) = 0 \quad (24)$$

şeklinde ele alınmıştır. Boyutsuz parametreler için boyutsuz enerji denge denklemi ve sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - N^2 \theta = 0 \quad (25)$$

$$\theta(1) = 1 \quad (26)$$

$$\theta'(1) = 0 \quad (27)$$

3.3. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM)

Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM), sınır değer problemini, birinci mertebeden başlangıç değer problem sistemine dönüştüren bir yöntemdir [46-48]. Bu dönüşümden sonra elde edilen sistemlerin çözümü için, birinci mertebeden başlangıç değer problemlerinin çözümünde hassas sonuçlar veren Runge-Kutta tipi yöntemler kolaylıkla uygulanabilir.

3.3.1. Sıcaklık Dağılımının TFM ile Elde Edilmesi

Isıl iletkenliğin radyal yönde değiştiği dairesel bir kanatçıktaki boyutsuz enerji denge denklemi

$$\theta'' + \frac{1}{\xi} \theta' - N^2 \theta = 0 \quad (28) \quad \bar{u} = b_i \bar{u}_i + \bar{u}_p, \quad i=1,2 \quad (34)$$

şeklinde ele alınmıştır. Bu ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\theta = a_i \theta_i \quad i=1,2 \quad (29)$$

şeklinde dir. Burada, θ_i ($i = 1,2$) homojen çözümleri, a_i ($i = 1,2$) ise sınır koşulları (26-27) kullanılarak belirlenecek olan sabitleri ifade etmektedir. TFM yönteminde öncelikle ikinci mertebeden sınır problemi (28),

$$\begin{aligned} \theta_i &= Z_1^{(i)} \\ \theta_i' &= Z_2^{(i)} \end{aligned} \quad (30)$$

dönüşümleri kullanılarak birinci mertebeden denklem sistemine

$$\begin{aligned} (Z_1^{(i)})' &= Z_2^{(i)} \\ (Z_2^{(i)})' &= -\frac{1}{\xi} Z_2^{(i)} + N^2 Z_1^{(i)} \end{aligned} \quad (31)$$

dönüştürülür. Doğrusal bağımsızlığı da sağlayacak şekilde Kronerker delta başlangıç koşulları [47] altında

$$Z_j^{(i)} = \delta_{ji}, \quad j,i=1,0 \quad (32)$$

denkleminin çözümü eşit mesafelerde bölünmüş noktalarındaki θ_1 ve θ_2 değerleri için beşinci derece Runge-Kutta yöntemi kullanılarak elde edilir. TFM ile elde edilen sonuçlar ve sınır koşulları (26-27) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \theta_1(1) & \theta_2(1) \\ \theta_1'(1) & \theta_2'(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözümlerse, aranan a_1 ve a_2 sabitleri bulunacaktır.

3.3.2. Isıl Gerilmelerin TFM ile Elde Edilmesi

Deplasman için ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel deklemin (19) genel çözümü

şeklinde yazılabilir. Burada, \bar{u}_i ($i = 1,2$) homojen çözümleri, \bar{u}_p özel çözümü, b_i ($i = 1,2$) ise sınır koşulları (20-21) kullanılarak belirlenecek olan sabitleri ifade etmektedir. TFM yönteminde homojen ve özel çözüm ayrı ayrı ele alınmalıdır. İkinci mertebeden sınır probleminin (19) homojen çözümü için

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= Z_1^{(i)} \\ \bar{u}_i' &= Z_2^{(i)} \end{aligned} \quad (35)$$

dönüşümleri, özel çözüm için ise

$$\begin{aligned} \bar{u}_p &= Z_1^{(p)} \\ \bar{u}_p' &= Z_2^{(p)} \end{aligned} \quad (36)$$

dönüşümleri kullanılırsa, homojen kısım için birinci mertebeden denklem sistemi

$$\begin{aligned} (Z_1^{(i)})' &= Z_2^{(i)} \\ (Z_2^{(i)})' &= -\frac{1}{\xi} Z_2^{(i)} + \frac{1}{\xi^2} Z_1^{(i)} \end{aligned} \quad (37)$$

ve özel kısım için birinci mertebeden denklem sistemi

$$\begin{aligned} (Z_1^{(p)})' &= Z_2^{(p)} \\ (Z_2^{(p)})' &= -\frac{1}{\xi} Z_2^{(p)} + \frac{1}{\xi^2} Z_1^{(p)} + (1+\nu)\chi\theta' \end{aligned} \quad (38)$$

elde edilir. Sıcaklık denkleminin çözümünde de olduğu gibi, homojen çözüm için doğrusal bağımsızlığı da sağlayacak şekilde Kronerker delta başlangıç koşulları [47] altında

$$Z_j^{(i)} = \delta_{ji}, \quad j,i=1,0 \quad (39)$$

özel çözüm için de

$$Z_j^{(p)}=0 \quad (40) \quad \text{Chebyshev noktaları}$$

alınarak denklem sistemlerinin çözümü, eşit mesafelerde bölünmüş noktadaki \bar{u}_1, \bar{u}_2 ve \bar{u}_p değerleri için beşinci derece Runge-Kutta yöntemi kullanılarak elde edilir. TFM ile elde edilen sonuçlar ve sınır koşulları (20)-(21) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}_1 \\ \text{RHS}_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözümlerse, aranan b_1 ve b_2 sabitleri bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\bar{u}'_1 + v \frac{\bar{u}_1}{\xi} \right]_{\xi=1}, & A_{12} &= \left[\bar{u}'_2 + v \frac{\bar{u}_2}{\xi} \right]_{\xi=1}, \\ A_{13} &= \left[\bar{u}'_p + v \frac{\bar{u}_p}{\xi} \right]_{\xi=1}, & A_{21} &= \left[\bar{u}'_1 + v \frac{\bar{u}_1}{\xi} \right]_{\xi=R}, \\ A_{22} &= \left[\bar{u}'_2 + v \frac{\bar{u}_2}{\xi} \right]_{\xi=R}, & A_{23} &= \left[\bar{u}'_p + v \frac{\bar{u}_p}{\xi} \right]_{\xi=R}, \end{aligned}$$

ve

$$\text{RHS}_1 = (1+v) \frac{\chi T_b}{T_b - T_\infty},$$

$$\text{RHS}_2 = (1+v) \chi \left(\theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right)$$

değerlerini almaktadır.

3.4. Pseudospectral Chebyshev Yöntemi (PCY)

Pseudospectral Chebyshev yöntemi, bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre elde edilmiş diferansiyel denklemi doğrusal veya doğrusal olmayan denklem sistemine dönüştüren bir yöntemdir [49,50,51]. Daha az sayıda nokta kullanarak yüksek hassasiyet elde etme prensibine dayanan bu yöntemdeki örgü noktaları, sınıra yakın bölgelerde orta noktalara göre daha sık olacak şekilde seçilir. Bu tanıma uyan, yani sınır noktalarında daha fazla örgü noktalarına sahip olan

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j=0,1,2,3 \dots N$$

kullanılarak birinci dereceden Chebyshev diferansiyel matrisi D hesaplanabilir. Elde edilen Chebyshev diferansiyel matrisi ile vektörün sonlu sayıda çarpımı ile vektörün türevleri $V'(x_j) = (DV)_j, V''(x_j) = (D^2V)_j$ yüksek hassasiyetle elde edilir. Burada $V = [V_0 \dots V_n]^T$, x_j noktalarındaki vektör verileridir.

Chebyshev türev matrisinin hesaplama prosedürü ve m-dosyası Trefethen [50] tarafından verilmiş, bölüntüleme noktaları x_j sağdan sola numaralanmış ve $[-1,1]$ aralığında tanımlanmıştır. Matlab m-dosyasında küçük bir revizyonla herhangi bir aralıktaki D türev matrisi hesaplanabilir.

3.4.1. Sıcaklık Dağılımının PCY ile Elde Edilmesi

Homojen bir dairesel kanatçıga ait enerji denge denklemindeki (25) birinci ve ikinci mertebeden türevler, Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_0) \\ \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_1) \\ \vdots \\ \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_n) \end{bmatrix} \approx D \begin{bmatrix} \theta(\xi_0) \\ \theta(\xi_1) \\ \vdots \\ \theta(\xi_n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{d^2\theta}{d\xi^2}(\xi_0) \\ \frac{d^2\theta}{d\xi^2}(\xi_1) \\ \vdots \\ \frac{d^2\theta}{d\xi^2}(\xi_n) \end{bmatrix} \approx D^2 \begin{bmatrix} \theta(\xi_0) \\ \theta(\xi_1) \\ \vdots \\ \theta(\xi_n) \end{bmatrix}$$

ayrıklaştırılırsa, sistemi modelleyen diferansiyel denklem (25),

$$L_1 \theta = 0 \quad (42)$$

şeklinde lineer denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistem matrisine sınır koşulları (26-27) entegre edilirse aşikar olmayan çözüm elde edilir.

Burada geçen L_1 lineer operatörü aşağıdaki ifadeye eşittir.

$$L_1 = \xi D^2 + D - \xi N^2$$

3.4.1. Deplasmanın PCY ile Elde Edilmesi

Sıcaklık dağılımına benzer şekilde, deplasman denklemindeki (19) birinci ve ikinci mertebeden türevler, Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak ayrıklaştırılırsa, sistemi modelleyen diferansiyel denklem (19),

$$L_2 \theta = RHS(\xi) \quad (43)$$

şeklinde lineer denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistem matrisine sınır koşulları (20-21) entegre edilirse aşıkır olmayan çözüm elde edilir. Burada geçen L_2 lineer operatörü ve $RHS(\xi)$ sağ taraf fonksiyonu olup aşağıdaki verilen ifadelere eşittir.

$$L_2 = D^2 + \frac{1}{\xi} D - \frac{1}{\xi^2}$$

$$RHS(\xi) = (1 + \nu) \chi D \theta$$

4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

Homojen ve izotropik malzemeden yapılmış, kalınlığı ihmal edilen, eksenel simetriye sahip, ısıl olarak kararlı duruma ulaşmış, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımları Bessel fonksiyonları kullanılarak [2], ısıl gerilme dağılımları ise termoelastik teori kullanılarak elde edilmiştir [44]. Bu çalışmada kullanılan sayısal yöntemlerle analitik sonuçların karşılaştırılması, her iki sayısal yöntem için farklı bölüntü noktaları kullanması sebebi ile, Çizelge 1 ve Çizelge 2'de ayrı ayrı verilmiştir. Çizelge 1 ve Çizelge 2 oluşturulurken boyutsuz dış yarıçapı $R=2$, boyutsuz parametre $N^2=0,6$, Poisson oranı $\nu=0,30$ ve boyutsuz ısıl genleşme parametresi $\chi=11,3 \times 10^{-4}$, ortam sıcaklığı $T_\infty=273^\circ\text{K}$ ve taban sıcaklığı $T_b=373^\circ\text{K}$ olarak alınarak parametrelerin tek seviyesi üzerinden hesaplamalar yapılmış, kullanılan metodolojilerin doğruluğu gösterilmiştir. Parametrelerin farklı seviyelerinin

karşılaştırılması ileriki bir çalışma konusu olarak ele alınabilir.

Çizelge 1'de TFM ve analitik çözümle elde edilen sonuçlar, Çizelge 2'de ise PCY ile analitik çözümle elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Her iki tablo oluşturulurken 10 adet bölüntü noktası kullanılmıştır.

Çizelge 1 ve Çizelge 2 incelendiğinde TFM ve PCY ile elde edilen boyutsuz sıcaklıkların virgülden sonra 7 basamağa kadar aynı sonuçları verdiği görülürken, PCY ile elde edilen boyutsuz radyal ve teğetsel gerilme değerlerinin, TFM'ye göre analitik sonuca daha yakın değerler aldığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 3 dairesel kanatçıktaki farklı bölüntü sayılarına göre PCY ve TFM'nin hata miktarını göstermektedir. Bu çalışmada hata analizi Öklid normuna göre yapılmıştır.

Çizelge 3 incelendiğinde küçük bölüntü sayılarında boyutsuz sıcaklık dağılımında TFM ile daha düşük hatalar elde edilirken, ısıl gerilmelerde PCY ile daha düşük hatalar elde edilmiştir. Daha büyük bölüntü sayılarında ise hem sıcaklık dağılımında hem de ısıl gerilme dağılımında PCY ile daha düşük hatalar elde edilmiştir.

Bölüntü sayısının artması ile birlikte hem TFM hem de PCY çözümlerde hata miktarı düşerken PCY deki azalma TFM'ye göre çok daha hızlıdır.

5. SONUÇLAR

Homojen ve izotropik malzemeden yapılmış, kalınlığı ihmal edilen, eksenel simetriye sahip, ısıl olarak kararlı duruma ulaşmış, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımları ve ısıl gerilmeler Tamamlayıcı fonksiyonlar metodu (TFM) ile Pseudospectral Chebyshev yöntemi (PCY) kullanılarak çözülmüştür. Sayısal sonuçlar, Bessel fonksiyonları [2] ve termoelastik teori [44] kullanılarak elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak:

- Dairesel bir kanatçık için sıcaklık dağılımı belirlenirken hem TFM hem PCY geçerli bir yöntemdir.

- Dairesel bir kanatçıkta ısı gerilmelerin belirlenmesinde TFM kullanılarak hassas sonuçların elde edilebilmesi için PCY'ye göre daha fazla bölüntü noktası kullanılmalıdır.
- PCY yöntemi ile daha fazla bölüntü noktası kullanılarak analitik sonuçlara daha hızlı yaklaşıldığı görülmüştür.

Çizelge 1. Homojen dairesel kanatçıkta analitik ve TFM çözümünün karşılaştırması

	θ		$S_r \times 10^{-4}$		$S_\phi \times 10^{-3}$	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
1,0	1,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-0,1134925	-0,2429288
1,1	0,9355022	0,9355022	-0,1626467	-0,1777055	-0,0372610	-0,1522757
1,2	0,8819954	0,8819954	-0,2363053	-0,2598703	0,0196789	-0,0835966
1,3	0,8378596	0,8378596	-0,2555317	-0,2831857	0,0621365	-0,0313915
1,4	0,8018418	0,8018418	-0,2419763	-0,2706208	0,0933483	0,0080521
1,5	0,7729594	0,7729594	-0,2095792	-0,2369470	0,1155629	0,0373218
1,6	0,7504337	0,7504337	-0,1675180	-0,1918715	0,1303829	0,0582683
1,7	0,7336438	0,7336438	-0,1219466	-0,1418849	0,1389733	0,0722422
1,8	0,7220933	0,7220933	-0,0770544	-0,0913877	0,1421931	0,0802445
1,9	0,7153861	0,7153861	-0,0357323	-0,0433968	0,1406811	0,0830246
2,0	0,7132083	0,7132083	0,0000000	0,0000000	0,1349131	0,0811458

Çizelge 2. Homojen dairesel kanatçıkta analitik ve PCY çözümünün karşılaştırması

	θ		$S_r \times 10^{-4}$		$S_\phi \times 10^{-3}$	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
1,0000000	1,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-0,2429289	-0,2429288
1,0244717	0,9830955	0,9830955	-0,0550517	-0,0550555	-0,2183212	-0,2183212
1,0954915	0,9381596	0,9381596	-0,1720968	-0,1720967	-0,1558396	-0,1558395
1,2061074	0,8790455	0,8790455	-0,2626926	-0,2626957	-0,0799806	-0,0799806
1,3454915	0,8205325	0,8205325	-0,2808836	-0,2808836	-0,0120422	-0,0120422
1,5000000	0,7729594	0,7729594	-0,2369446	-0,2369470	0,0373218	0,0373218
1,6545085	0,7406049	0,7406049	-0,1649139	-0,1649138	0,0666790	0,0666790
1,7938926	0,7226563	0,7226563	-0,0944231	-0,0944252	0,0799122	0,0799121
1,9045085	0,7151925	0,7151925	-0,0413285	-0,0413285	0,0830366	0,0830366
1,9755283	0,7133370	0,7133370	-0,0101062	-0,0101081	0,0820113	0,0820112
2,0000000	0,7132083	0,7132083	0,0000000	0,0000000	0,0811458	0,0811458

Çizelge 3. TFM ve PCY yöntemlerinin hata analizi

n	θ hata		S_r hata		S_ϕ hata	
	TFM	PCM	TFM	PCM	TFM	PCM
4	$3,8221 \times 10^{-6}$	$1,7699 \times 10^{-3}$	$9,9384 \times 10^{-6}$	$8,0890 \times 10^{-6}$	$5,1769 \times 10^{-4}$	$3,6894 \times 10^{-6}$
8	$1,4837 \times 10^{-7}$	$1,8362 \times 10^{-6}$	$7,2785 \times 10^{-6}$	$1,5432 \times 10^{-8}$	$3,2844 \times 10^{-4}$	$5,9158 \times 10^{-9}$
10	$5,2865 \times 10^{-8}$	$5,8971 \times 10^{-8}$	$6,6115 \times 10^{-6}$	$6,098 \times 10^{-10}$	$2,8723 \times 10^{-4}$	$2,225 \times 10^{-10}$
16	$6,1090 \times 10^{-9}$	$1,750 \times 10^{-12}$	$5,3425 \times 10^{-6}$	$2,967 \times 10^{-14}$	$2,1941 \times 10^{-4}$	$1,175 \times 10^{-14}$
20	$2,2055 \times 10^{-9}$	$3,055 \times 10^{-13}$	$4,8120 \times 10^{-6}$	$5,402 \times 10^{-15}$	$1,9399 \times 10^{-4}$	$1,529 \times 10^{-14}$

6. EKLER

6.1. Ek 1

Enerji denge denklemi (25) aşağıdaki formda yazılırsa

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) + N^2 i^2 \xi \theta = 0 \quad (44)$$

elde edilen Bessel diferansiyel denklemin (43) genel çözümü [2]

$$\theta = C_1 J_0(Ni\xi) + C_2 Y_0(Ni\xi) \quad (45)$$

şeklinde bulunur. Burada J_0 birinci tip Bessel fonksiyonunu, Y_0 ise ikinci tip Bessel fonksiyonunu ifade etmektedir. C_1 ve C_2 sabitleri ise sınır şartları (26-27) kullanılarak

$$C_1 = \frac{Y_1(NRi)}{J_0(Ni)Y_1(NRi) - Y_0(Ni)J_1(NRi)} \quad (46)$$

$$C_2 = \frac{J_1(NRi)}{J_0(Ni)Y_1(NRi) - Y_0(Ni)J_1(NRi)} \quad (47)$$

olarak elde edilirler.

6. 2. Ek 2

Eşitlik 19'da verilen ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklemin sol tarafındaki $\frac{1}{\xi} \bar{u}' - \frac{1}{\xi^2} \bar{u}$ ifadesini bölümün türevi şeklinde yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\bar{u}'' + \left(\frac{\bar{u}}{\xi} \right)' = (1+\nu)\chi\theta' \quad (48)$$

Eşitlik 48'deki diferansiyel denklemin 1 ile ξ arasındaki belirli integrali alınrsa

$$\bar{u}'(\xi) - \bar{u}'(1) + \frac{\bar{u}(\xi)}{\xi} - \bar{u}(1) = (1+\nu)\chi(\theta(\xi) - \theta(1)) \quad (48)$$

elde edilir. Bu ifadede geçen $\bar{u}'(1) + \bar{u}(1)$ sabitlerini d_1 olarak tanımlanıp, boyutsuz sıcaklığın sınırdaki değeri (26) yazılırsa birinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{u}' + \frac{\bar{u}}{\xi} = (1+\nu)\chi(\theta-1) + d_1 \quad (49)$$

Eşitlik 49'un her iki tarafı ξ ile çarpılırsa

$$\bar{u}'\xi + \bar{u} = (1+\nu)\chi(\theta-1)\xi + d_1\xi \quad (50)$$

elde edilir. Eşitlik 50'de verilen ifadenin sol tarafı çarpımın türevi şeklinde düzenlenirse

$$(\bar{u}\xi)' = (1+\nu)\chi(\theta-1)\xi + d_1\xi \quad (51)$$

elde edilir. Eşitlik 51'deki diferansiyel denklem 1 ile ξ arasındaki belirli integrali alınrsa

$$\bar{u}(\xi)\xi - \bar{u}(1) = (1+\nu)\chi \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta + \frac{d_1\xi^2}{2} - \frac{d_1}{2} \quad (52)$$

elde edilir. Bu eşitlikte geçen $\frac{d_1}{2}$ sabitini D_1 $\bar{u}(1) - \frac{d_1}{2}$ sabitini ise D_2 olarak tanımlarsak

$$\bar{u}\xi = (1+\nu)\chi \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta + D_1\xi^2 + D_2 \quad (53)$$

elde ederiz. Eşitlik 53'te elde edilen ifadenin her iki tarafı da ξ ile sadeleştirilirse boyutsuz deplasman denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir

$$\bar{u} = \frac{(1+\nu)\chi}{\xi} \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta + D_1\xi + \frac{D_2}{\xi} \quad (54)$$

Elde edilen boyutsuz deplasman denklemi radyal ve teğetsel gerinme denklemlerinde (13-14) yerine yazılırsa, radyal gerinme ve teğetsel gerinme

$$\varepsilon_r = -\frac{(1+\nu)\chi}{\xi^2} \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta$$

$$+(1+\nu)\chi(\theta-1) + D_1 - \frac{D_2}{\xi^2} \quad (55)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{(1+\nu)\chi}{\xi^2} \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta + D_1 + \frac{D_2}{\xi^2} \quad (56)$$

şeklinde elde edilir. Bu gerilme denklemleri de gerilme denklemlerinde (10-11) yerine yazılırsa boyutsuz radyal ve teğetsel gerilme

$$S_r = -\frac{\chi}{\xi^2} \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta + \frac{D_1}{(1-\nu)} - \frac{D_2}{(1+\nu)\xi^2} - \frac{\chi T_b}{(1-\nu)(T_b-T_\infty)} \quad (57)$$

$$S_\phi = -\chi\theta + \frac{\chi}{\xi^2} \int_1^\xi (\theta-1)\eta d\eta + \frac{D_1}{(1-\nu)} + \frac{D_2}{(1+\nu)\xi^2} - \frac{\chi}{(1-\nu)} \left(\nu + \frac{T_\infty}{(T_b-T_\infty)} \right) \quad (58)$$

denklemleri oluşur. Bu denklemlerdeki D_1 ve D_2 sabitleri sınır koşulları (15-16) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$D_1 = \frac{D_2(1-\nu)}{(1+\nu)} + \frac{\chi T_b}{(T_b-T_\infty)} \quad (59)$$

$$D_2 = \frac{(1+\nu)\chi}{R^2-1} \int_1^R (\theta-1)\eta d\eta \quad (60)$$

7. KAYNAKLAR

1. Biswas, G., Mitra, K., Fiebig, M., 1994. Heat Transfer Enhancement in Fin-Tube Heat Exchangers by Winglet Type Vortex Generators, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37(2), 283-291.
2. Kraus, A.D., Aziz, A., Welty, J.R., 2001. *Extended Surface Heat Transfer*, John Wiley and Sons, New York.
3. Incropera, F., Dewitt, D.P., Bergman, T.L., Lavine, A.S., 2007. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley and Sons, New York.
4. Mallick, A., Ghosal, S., Sarkar, P.K., Ranjan, R., 2015. Homotopy Perturbation Method for Thermal Stresses in an Annular Fin with Variable Thermal Conductivity, *Journal of Thermal Stresses*, 38(1), 110-132.
5. Wu, S.S., 1997. Analysis on Transient Thermal Stresses in an Annular Fin, *Journal of Thermal Stresses*, 20, 591-615.
6. Gardner, K.A., 1945. Efficiency of Extended Surface, *Trans. ASME*, 67, 621-631.
7. Brown, A., 1965. Optimum Dimensions of Uniform Annular Fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8, 665-662.
8. Yang, J.W., 1972. Periodic Heat Transfer in Straight Fins, *Journal of Heat Transfer*, *Trans. ASME*, 94, 310-314.
9. Aziz, A., 1975. Periodic Heat Transfer in Annular Fins, *Journal of Heat Transfer*, *Trans. ASME*, 97, 302-303.
10. Aziz, A., Enamul Huq, S.M., 1975. Perturbation Solution for Convecting Fin with Variable Thermal Conductivity, *Journal of Heat Transfer*, 97, 300-301.
11. Krane, R.J., 1976. Discussion on a Previously Published Paper by Aziz A. and Enamul Hug S.M., *Journal of Heat Transfer*, 98, 685-686.
12. Muzzio, A., 1976. Approximate Solution for Convective Fins with Variable Thermal Conductivity, *Journal of Heat Transfer*, 98, 680-682.
13. Razelos, P., Imre, K., 1980. Optimum Dimension of Circular Fins with Variable Thermal Parameters, *Journal of Heat Transfer*, *Trans. ASME*, 102, 420-425.
14. Ullmann, A., Kalman, H., 1989. Efficiency and Optimized Dimensions of Annular Fins of Different Cross-section Shapes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32(6), 1105-1110.
15. Campo, A., Harrison L., 1994. Prediction of Safe Tip Temperature in Uniform Annular Fins for the Design of Thermal Exchnage Equipment Via Sympolic Mathematics, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 21(4), 531-538.
16. Zubair, S.M., Al-Garni, A.Z., Nizami, J.S., 1996. The Optimal Dimensions of Circular Fins with Variable Profile and Temperature-dependent Thermal Conductivity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39(16), 3431-3439.

17. Campo, A., Stuffle, R.E., 1996. Symbolic Mathematics for Calculation of Thermal Efficiencies and Tip Temperatures in Annular Fins of Uniform Thickness, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40(2), 490-492.
18. Kundu, B., Das, P.K., 2001. Performance Analysis and Optimization of Annular Fin with a Step Change in Thickness, *Journal of Heat Transfer*, *Trans. ASME*, 123(3), 601-604.
19. Chiu, C.H., Chen, C.K., 2002. A Decomposition Method for Solving the Convective Longitudinal Fins with Variable Thermal Conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 2067-2075.
20. Mokheimer, E.M.A., 2002. Performance of Annular Fins with Different Profiles Subject to Variable Heat Transfer Coefficient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45(17), 3631-3642.
21. Bertola, V., Cafaro, E., 2003. Cooling Fin Design, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 17(4).
22. Arslantürk, C., 2004. Performance Analysis and Optimization of a Thermally Non-symmetric Annular Fin, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 31(8), 1143-1153.
23. Kang, H.S., Look, D.C., 2007. Optimization of a Thermally Asymmetric Convective and Radiating Annular Fin, *Heat Transfer Engineering*, 28(4), 310-320.
24. Soliman, H.M., Elazhary, A.M., 2008. Comment on Cooling, *Fin Design*, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 22(2), 319-320.
25. Iborra, A.A., Campo, A., 2009. Approximate Analytic Temperature Distribution and Efficiency for Annular Fins of Uniform Thickness, *International Journal of Thermal Sciences*, 48, 773-780.
26. Kang, H.S., Look, D.C., 2009. Optimization of a Trapezoidal Profile Annular Fin, *Heat Transfer Engineering*, 30(5), 359-367.
27. Arslantürk, C., 2009. Correlation Equations for Optimum Design of Annular Fins with Temperature Dependent Thermal Conductivity, *Heat Mass Transfer*, 45(4), 519-525.
28. Aziz, A., Fang, T., 2010. Alternative Solutions for Longitudinal Fins of Rectangular, Trapezoidal and Concave Parabolic Profiles, *Energy Conversion and Management* 51, 2188-2194.
29. Ganji, D.D., Ganji, Z.Z., Ganji, H.D., 2011. Determination of Temperature Distribution for Annular Fins with Temperature Dependent Thermal Conductivity by HPM, *Thermal science*, 15, 111-115.
30. Qian, J., Heat Transfer Analysis of Uniform Annular Fin on Regular Perturbation Method, *Proc. Second Int. Conf. on Mechanic Automation and Control Engg*, IEEE 2211, 2011.
31. Peng, H. S., Chen, C. L., 2011. Hybrid Differential Transformation and Finite Difference Method to Annular Fin with Temperature-dependent Thermal Conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, 2427-2433.
32. Darvishi, M.T., Khani, F., Aziz, A., 2016. Numerical Investigation for a Hyperbolic Annular Fin with Temperature Dependent Thermal Conductivity, *Propulsion and Power Research*, 5(1), 55-62.
33. Roy, R., Ghosal, S., 2016. Homotopy Perturbation Method for the Analysis of Heat Transfer in an Annular Fin with Temperature-dependent Thermal Conductivity, *Journal of Heat Transfer*, 139(2), 1223-1231.
34. Kundu, B., 2017. Exact Method for Annular Disc Fins with Heat Generation and Nonlinear Heating, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 31(2), 337-345.
35. Yu, L.T., Chen, C.K., 1998. Application of Taylor Transformation to the Thermal Stresses in Isotropic Annular Fins, *Journal of Thermal Stresses*, 21(8), 781-809.
36. Yu, L.T., Chen, C.K., 1999. Application of the Hybrid Method to the Transient Thermal Stresses Response in Isotropic Annular Fins, *Journal of Applied Mechanics*, 66, 340-346.
37. Yang, Y.C., Chu, S.S., 2001. Transient Coupled Thermoelastic Analysis of an Annular Fin, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 28(8), 1103-1114.
38. Lee, H.L., Yang, Y.C., Chu, S.S., 2002.. Transient Thermoplastic Analysis of an Annular Fin with Coupling Effect and Variable Heat Transfer Coefficient, *Journal of Thermal Stresses*, 25, 1105-1120.

39. Chiu, C.H., Chen, C.K., 2002. Application of the Decomposition Method to Thermal Stresses in Isotropic Circular Fins with Temperature-dependent Thermal Conductivity, *Acta Mechanica*, 157, 147-158.
40. Chiu, C.H., Chen, C.K., 2002. Thermal Stresses in Annular Fins with Temperature Dependent Conductivity under Periodic Boundary Condition, *Journal of Thermal Stresses*, 25, 475-492.
41. Wang, C.C., Liao, W.J., Yang, Y.C., 2013. Hybrid Spline Difference Method for Heat Transfer and Thermal Stresses in Annular Fins, *Numerical Heat Transfer Part B, Fundamentals*, 64(1), 71-88.
42. Tütüncü, N., Temel, B., 2013. An Efficient Unified Method for Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks of Variable Thickness, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20, 38-46.
43. Baş, H., Keleş, I., 2014. Novel Approach to Transient Thermal Stress in an Annular Fin, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 29(4), 705-710.
44. Timoshenko, S.P. Goodier, J.N., 2003. *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
45. Cengel, Y.A., *Heat Transfer a Practical Appraoch*, McGraw-Hill.
46. Aktaş, Z., 1972. Numerical Solutions of Two-point Boundary Value Problems, Metu, Depart. of Compt. Eng.
47. Agarwal, R.P., 1982. On the Method of Complementary Functions for Nonlinear Boundary-value Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, B36(1), 139-144.
48. Roberts, S.M., Shipman, J.S., 1979. Fundamental Matrix and Two-point Boundary-value Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 28(1), 77-88.
49. Gottlieb, D., 1981. The Stability of Pseudospectral-Chebyshev Methods, *Mathematics of Computation*, 36(153), 107-118.
50. Trefethen, L.N., 2000. *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, Philadelphia, PA.
51. Bazan, F.S.V., 2008. Chebyshev Pseudospectral Method for Computing Numerical Solution of Convection-Diffusion Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 200, 537-546.

