İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 11, 2018, 2, 109-120

Geliş/Received:13.07.2018, Kabul/Accepted: 31.10.2018

www.istatistikciler.org

Araştırma Makalesi / Research Article

Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini İçin alternatif tahmin yöntemi

Arzu Altın Yavuz
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Meşelik Kampüsü Eskişehir, Türkiye
aaltin@ogu.edu.tr
0000-0002-3277-740X

Ebru Gündoğan Aşık
Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü Trabzon, Türkiye
ebrugundogan@ktu.edu.tr
0000-0002-0545-7339

Y. Murat Bulut
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Meşelik Kampüsü Eskişehir, Türkiye
ymbulut@ogu.edu.tr
0000-0002-9910-6555

Öz

Bu çalışmada Frechet dağılımının şekil parametresi basit doğrusal regresyon modeli kullanılarak tahmin edilmiştir. Tahmin yöntemi olarak En Küçük Kareler (EKK) ve sağlam (robust) tahmin yöntemi olan M tahmin edicisi ele alınmıştır. Bu tahmin yöntemlerinin etkinlikleri veri setinin aykırı değer içerip içermeme durumuna göre simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmininde yapılan simülasyon çalışması ile sağlam yöntemin parametre tahminin EKK'dan daha etkin olduğu görülmüştür.

Anahtar sözcükler: *Basit Doğrusal Regresyon, En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, Frechet Dağılımı, Sağlam M Tahmin Edicisi.*

Abstract

Alternative estimation methods for the estimation of Frechet distribution parameters

In this study, the shape parameter of the Frechet distribution is estimated using simple linear regression model. The ordinary least squares (OLS) and robust estimation method M estimator are considered as the estimation method. Simulation study is conducted to compare effectiveness of estimator based on data set with and without outliers. As a result, it is seen from the simulation result that robust estimation method is more effective than the OLS.

Keywords: *Simple Linear Regression, Ordinary Least Squares Estimator, Frechet distribution, Robust M Estimator.*

1. Giriş

Uç değer teorisi, istatistikte yaygın olarak kullanılan bir alandır ve rasgele değişkenlerin olağan dışı büyüklükteki davranışlarını inceler. Uç değer dağılımları, Gumbel (tip I), Frechet (tip II) ve Weibull (tip III) dağılımlarıdır [1]. Son zamanlarda birçok farklı alanlara uygulanan Frechet dağılımı 1920'li yıllarda Maurice Frechet [2] tarafından uç değer teorisi için geliştirilmiştir. Frechet dağılımı uygulamada depremler, hızlandırılmış ömür testleri, sel, yağış, süpermarketlerde oluşan kuyruklar, rüzgar hızı, deniz akıntıları, yarış pisti kayıtları gibi uç olayların analizi ve modellemesi için kullanılmaktadır [3,4]. Harlow [5] Frechet dağılımını mühendislik alanındaki çalışmalar için önermiştir. Zaharim ve ark. [6] Frechet dağılımını rüzgar hızı verilerine uygulamışlardır. Nadarajah ve Kotz [7] Frechet rasgele değişkenlerine dayanan sosyolojik modeller üzerine çalışmışlardır ve Frechet dağılımının şekil parametresi için tahmin yöntemlerini karşılaştırmışlardır. Akgül ve Şenoğlu [8] inverse Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini için farklı tahmin yöntemlerini karşılaştırmışlardır.

Mubarak [9] birbirini izleyen uç değerler olarak bilinen rekor değerlere dayalı Frechet dağılımının konum ve şekil parametresinin en iyi yansız doğrusal tahmin edicileri ile en iyi doğrusal değişmez tahmin edicilerini elde etmiştir. Chatterjee ve Chatterjee [10] ultrasonik dalga hızı ölçümlerinin sonuçlarının Frechet dağılımına oldukça iyi uyduğunu simülasyon sonucuyla doğrulayarak bir model sunmuşlardır. Silva ve ark. [11] çalışmalarında dört parametreli Gamma genişletilmiş Frechet dağılımını tanımlamışlardır. Ayrıca yaptıkları gerçek veri uygulamasıyla bu yeni dağılımın diğer klasik yaşam modellerinden daha iyi uyum sağlayabileceğini göstermişlerdir. Frechet ve ters gamma dağılımları arasında bir ayırım yapmak için olabilirlik oran testi önermişlerdir. Doğru seçimin ampirik ve asimtotik olasılıklarını karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması sunmuşlardır. Abbas ve Tang [12] iki parametreli Frechet dağılımı için Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Ayrıca elde ettikleri tahmin edicileri, en çok olabilirlik yöntemi ile karşılaştırmışlardır. Afify ve ark. [13] dört parametreli Weibull Frechet dağılımını önererek matematiksel ve istatistiksel özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca tahmin edicilerin performansını simülasyon yardımıyla göstermişlerdir. Pindado ve ark. [14] İspanya'da 1999'dan 2014'e kadar ödenen maaşlarla ilgili resmi verileri Frechet dağılımıyla analiz etmişlerdir ve 2002'den 2014'e kadar daha dengeli bir maaş dağılım eğilimi ortaya koymuşlardır. Maleki ve Deiri [15] Frechet dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu tahmin etmek için farklı yöntemleri kullanmışlar ve yaptıkları simülasyon sonucunda en çok olabilirlik yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performansa sahip olduğunu göstermişlerdir. Zayed ve Butt [16] çalışmalarında Burr X üstelleştirilmiş Frechet dağılımının momentlerini, üreten fonksiyonlarını ve sıra istatistiklerini araştırmışlardır. Önerdikleri yeni dağılımın performansını simülasyon çalışması yardımıyla diğer Frechet dağılımlarıyla karşılaştırmışlardır. Haq ve ark. [17] uç değerleri modellemek için yeni beş parametreli Frechet dağılımını önermişlerdir. Yaptıkları çalışmada modelin matematiksel özelliklerini incelemişlerdir. Tablada ve Corderio [18] yeni üç parametreli bir dağılım olan modified Frechet dağılımını önermişlerdir. Önerilen dağılımın yeterliliğini uygunluk testleri ile ele almışlardır ve simülasyon çalışmasıyla yaşam analizi uygulamaları için uygun bir model olduğunu göstermişlerdir. Ramos ve ark [19] Frechet dağılımının parametrelerini tahmin etmek için klasik ve bayesci yaklaşımı kullanmışlardır.

Tüm uç değer dağılımlarında şekil parametresinin tahmini verinin modellenmesi için büyük önem taşımaktadır. Güvenilirlik analizinde, şekil parametresinin tahmini için yaygın olarak rank regresyon yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemin uygulanabilmesi için olasılık kağıtlarından yararlanılmaktadır. Olasılık kağıdı yardımıyla, arıza verilerinin uygun olduğu dağılım şeklinin belirlenmesine ve bu dağılımın parametrelerinin tahmin edilmesine çalışılır. Güvenilirlik analizinde olasılık kağıdı kullanımı, ürünün arızalanmasına ait maliyetler nedeniyle önemlidir. Bu yöntem büyük numuneler gerektirmez. Diğer parametre tahmin yöntemleri daha güçlü olabilir ancak küçük örneklemlerde iyi sonuçlar vermeyebilirler. Arıza verilerinin azlığı nedeniyle olasılık kağıtları genellikle güvenilirlik analizde yaygın olarak kullanılır ve küçük örneklemlerde iyi sonuçlar verirler [20].

Bu çalışmanın amacı, olasılık kağıdı aracılığıyla Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edilmesinde sağlam M tahmin edicisinin kullanımını tanıtmak ve bu tahmin edicinin EKK tahmin edicisine etkinliğini bir simülasyon çalışması ile ortaya koymaktır. Bu çalışmada, Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için rank regresyon modeli ele alınmıştır. Parametre tahmini için öncelikle klasik EKK yöntemi kullanılmıştır. Ancak, veri setinde aykırı değer bulunması durumunda EKK tahmin edicisi etkinliğini kaybetmektedir. Bu nedenle çalışmada

EKK tahmin edicisine alternatif olarak sağlam tahmin yöntemi ele alınmıştır. Sağlam tahmin yöntemleri içerisinde ise yaygın olarak kullanılan ve hesaplama kolaylığı bulunan M tahmin edicisi tercih edilmiştir. Tahmin edicilerin karşılaştırılmasında hata kareler ortalaması (Mean Square Error) kriteri kullanılmıştır.

2. Frechet dağılımı

Frechet dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x) = \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}\right\}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0$$

(1)

$$f(x) = \frac{\beta}{x}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta} \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}\right]$$

(2)

Burada α dağılımın ölçek parametresini, β ise şekil parametresini göstermektedir. β şekil parametresinin değerine göre dağılımın çarpıklığı değişmektedir. Dolayısıyla kuyruk davranışları bundan etkilenmektedir. Bu nedenle şekil parametresinin doğru tahmini büyük önem taşımaktadır. Frechet dağılımı, β =1 olduğunda ters üstel dağılıma, β =2 olduğunda ters Rayleigh dağılımına dönüşmektedir [15]. Dağılımın parametrelerini tahmin etmek için rank regresyon yönteminde yaygın olarak EKK tahmin edicisi kullanılmaktadır.

$T_1, T_2, ..., T_n$ Frechet dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Eşitlik (1)'de iki kez logaritma alındığında sırasıyla,

$$\ln\left[F(t_{(i)})\right] = \ln\left\{\exp - \left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\right\} = -\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}$$

(3)

$$\ln\left\{-\ln\left[F(t_{(i)})\right]\right\} = \ln\left[\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^{\beta}\right] = \beta \ln \alpha - \beta \ln t_i$$

(4)

eşitlikleri elde edilir. Burada, $Y = \ln\left\{-\ln\left[F(t_{(i)})\right]\right\}$ ve X= $\ln t$ olarak alınırsa, Eşitlik (1)

$$\hat{Y} = \beta\left(\ln \alpha - X\right) \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle α ve β parametrelerinin tahmini için basit doğrusal regresyon modeli kullanılabilir. Literatürde $\widehat{F}(t_{(i)})$ birikimli dağılım fonksiyonunun parametrik olmayan tahmin değeri için birçok yaklaşım söz konusudur. Weibull ortalama rank tahmin edicisi, Bernard'ın medyan rank tahmin edicisi, Blom, Filliben ve Drapella ve Kosznik tahmin edicileri en yaygın kullanıma sahip olanlarıdır [21]. Bu çalışmada etkili bir yaklaşım olarak literatürde kabul edilen Bernard'ın medyan rank tahmin edicisi kullanılmıştır [22].

$$\widehat{F}(t_{(i)}) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}$$

(6)

Eşitlik (6) da *i* gözlem sırasını ve *n* örneklem hacmini göstermektedir.

3. Tahmin yöntemleri

Literatürde istatistiksel parametre tahminleri için birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları, en çok olabilirlik yöntemi, EKK, ağırlıklandırılmış EKK, momentler yöntemi, Bayes yöntemi ve sağlam yöntemlerdir. Yapılan çalışmalar incelendiğinde Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için en çok olabilirlik yönteminin sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Fakat bu yöntem büyük örneklemler için etkin sonuçlar vermektedir. Güvenilirlik analizinde zaman ve maddi kaynakların sınırlı olması nedeniyle küçük hacimli örneklemler söz konusudur. Küçük örneklemlerde şekil parametresinin tahmini için olasılık kağıdı kullanımı oldukça yaygın bir yöntemdir. Bu yöntem aykırı değer olmadığı durumlarda etkin sonuçlar vermektedir. Ancak aykırı değer olması durumunda etkinliği hızla azalmaktadır. Bu çalışmada veri setinin aykırı değer içerip içermemesi durumunda Frechet dağımının şekil parametresinin tahmini için EKK ve sağlam M tahmin edicileri kullanılmıştır.

3.1. En küçük kareler tahmin edicisi

Parametre tahmini alanında en yaygın kullanıma sahip olan yöntem EKK yöntemidir. Bu yöntemin amacı hata kareler toplamını en küçük yapmaktır. Eşitlik (5) yardımıyla Frechet dağılımının şekil parametresinin EKK tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{EKK} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

(7)

şeklinde hesaplanır. Burada x ve y eşitlik 5’te tanımlandığı gibidir.

3.2. Sağlam M tahmin edicisi

EKK tahmin edicileri hata terimlerinin normal dağılıma uymamasından veya hata terimleri içerisinde aykırı gözlemlerin bulunmasından çok fazla etkilenen tahmin edicilerdir. Bu nedenle model varsayımlarından sapmalardan ve aykırı değerlerden daha az etkilenen tahmin edicilere gereksinim duyulmuş ve sağlam tahmin ediciler geliştirilmiştir. Sağlam tahmin ediciler geniş bir aileye sahiptir. Bu çalışmada hesaplama kolaylığı ve yaygın kullanımı nedeniyle M tahmin edicileri ele alınmıştır.

M tahmin edicileri Huber tarafından 1964 yılında önerilmiştir. M tahmin edicileri hata kareler toplamının en küçüklenmesi yerine hataların bir fonksiyonu olan ρ ’yu küçükler. Basit doğrusal regresyon modeli için hataların fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{n}\rho\left[\left(y_i - \sum_{j=1}^{p}x_{ij}\,\hat{\beta}_j\right)/\,d\right]$$

(8)

şeklinde yazılabilir. Burada, β regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri, d mutlak medyan sapma ve ρ sıfırda sabit, tek minimumlu, türevlenebilir ve simetrik bir fonksiyondur [23]. Burada Eşitlik (8) in $\hat{\beta}_j$ 'lere göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\psi\left[\left(y_i - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\,\hat{\beta}_j\right)/d\right] = 0 \qquad j=1,2,\ldots,p \tag{9}$$

elde edilir. Burada ψ, ρ 'nun türevidir ve etki fonksiyonu olarak adlandırılır. Mutlak medyan sapma değeri d ise

$$d = \frac{medyan\left|r_i - medyan\left(r_i\right)\right|}{0.6745} \tag{10}$$

şeklindedir. M tahminciler, ρ 'nun uygun seçimi ile aykırı değerlerin etkilerini azaltmada ya da tamamen ortadan kaldırmada etkilidir. ρ 'nun seçimi araştırmacıya bırakılır. M tahmincileri için ağırlık fonksiyonları Çizelge 1'de verilmiştir. Çizelge 1'de yer alan k değeri, uzun kuyruklu simetrik dağılımların kuyruklarını normale çekmek için kullanılan bir ayar sabitidir. M tahmincileri, ağırlıklandırılmış EKK yöntemi kullanılarak da hesaplanmaktadır [24].

Çizelge 1. M tahmin edicileri için ağırlık fonksiyonları

Tahmin Edici	Ağırlık Fonksiyonu	(k)
Huber	$w = \begin{cases} 1 & , \ \lvert r\rvert \le k \\ \dfrac{k}{r} & , \ \lvert r\rvert > k \end{cases}$	1.345
Andrew	$w = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\dfrac{r}{k}\right)}{r} & , \ \lvert r\rvert \le k\pi \\ 0 & , \ \lvert r\rvert > k\pi \end{cases}$	1.339
Tukey	$w = \begin{cases} \left(1-\left(\dfrac{r}{k}\right)^2\right)^2 & , \ \lvert r\rvert \le k \\ 0 & , \ \lvert r\rvert > k \end{cases}$	4.685

Cauchy	$\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{r}{k}\right)^2}$	2.385
Welsch	$\exp\left[-\left(\dfrac{r}{k}\right)^2\right]$	2.985

4. Simülasyon çalışması

Simülasyon çalışmasında EKK ve M tahmin yöntemleri kullanılarak Frechet dağılımının şekil parametresinin tahminleri yapılmıştır. Aykırı değer içeren ve içermeyen küçük hacimli tam örneklemler kullanılarak tahmin edicilerin performansları hata kareler ortalaması (MSE) kriterine ve yanlılık değerine göre karşılaştırılmıştır. Eşitlik 5 göz önünde bulundurulduğunda, modelde aykırı değerlerin x yönünden kaynaklanabileceği görülmektedir. Bu nedenle çalışmada x yönünde pozitif bir ya da iki aykırı değerin var olduğu veri setleri ile çalışılmıştır. Güvenilirlik analizinde küçük veri setleri ile çalışıldığından örneklem büyüklüğü için n=10, 15, 20, 25, 30, şekil parametresi için $\beta = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ ve genelliği bozmamak için ölçek parametresi α=1 değeri ele alınmıştır. Ele alınan tahmin ediciler n ve β 'nın tüm kombinasyonları, aykırı değerli ve aykırı değersiz veri setleri için karşılaştırılmıştır. Hesaplamalar R paket programı ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca 100000/n Monte Carlo denemesinden sonra MSE ve yan (Bias) değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{(100000/n)}\sum(\hat{\beta}-\beta)^2$$

$$Bias(\hat{\beta}) = \mathrm{E}(\hat{\beta}) - \beta$$

(11)

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \frac{1}{(100000/n)}\sum\hat{\beta}$$

Aykırı değersiz, bir aykırı değerli ve iki aykırı değerli veri setleri için simülasyon sonuçları Çizelge 2-4'de verilmiştir.

Çizelge 2. Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edicilerine ilişkin MSE ve yan değerleri (aykırı değersiz veri)

n	10		15		20		25		30	
Tahminciler	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**
					β=0.5					
EKK	0.02472	-0.06613	0.01743	-0.05926	0.01335	-0.05555	0.01082	-0.05210	0.00915	-0.04407
Huber	0.02329	-0.05111	0.01539	-0.04647	0.01131	-0.04245	0.00889	-0.03882	0.00752	-0.03134
Andrews	0.02437	-0.03722	0.01607	-0.03714	0.01178	-0.03313	0.00910	-0.02892	0.00765	-0.02272
Tukey	0.02435	-0.03719	0.01607	-0.03710	0.01177	-0.03308	0.00910	-0.02893	0.00764	-0.02270
Cauchy	0.02486	-0.04189	0.01559	-0.04207	0.01130	-0.03779	0.00913	-0.03415	0.00787	-0.02746
Welsch	0.02408	-0.03679	0.01592	-0.03742	0.01162	-0.03331	0.00898	-0.02928	0.00763	-0.02320
					β=0.8					
EKK	0.06408	-0.10613	0.04357	-0.09531	0.03424	-0.08813	0.02877	-0.07870	0.02469	-0.07541
Huber	0.06412	-0.08264	0.04381	-0.07685	0.03284	-0.06688	0.02711	-0.05650	0.02082	-0.05286
Andrews	0.06484	-0.06047	0.04396	-0.06303	0.03292	-0.05103	0.02776	-0.04185	0.02091	-0.03843
Tukey	0.06487	-0.06039	0.04396	-0.06300	0.03292	-0.05094	0.02776	-0.04180	0.02089	-0.03848
Cauchy	0.06408	-0.06718	0.04385	-0.07012	0.03284	-0.05916	0.02707	-0.04948	0.02056	-0.04620
Welsch	0.06454	-0.05906	0.04393	-0.06345	0.03290	-0.05162	0.02758	-0.04259	0.02084	-0.03926
					β=1					
EKK	0.09942	-0.13239	0.06820	-0.11960	0.05470	-0.10747	0.04391	-0.09901	0.03840	-0.09086
Huber	0.09834	-0.10672	0.06602	-0.09233	0.05246	-0.08117	0.04255	-0.07187	0.03604	-0.06365
Andrews	0.09834	-0.08058	0.06622	-0.07092	0.05258	-0.06193	0.04265	-0.05288	0.03688	-0.04547
Tukey	0.09835	-0.08050	0.06622	-0.07082	0.05282	-0.06188	0.04276	-0.05283	0.03682	-0.04558
Cauchy	0.09904	-0.08982	0.06658	-0.08235	0.05262	-0.07130	0.04282	-0.06280	0.03656	-0.05541
Welsch	0.09876	-0.07921	0.06672	-0.07141	0.05274	-0.06233	0.04285	-0.05392	0.03629	-0.04681
					β=1.5					
EKK	0.23058	-0.19039	0.15709	-0.17951	0.11848	-0.16320	0.10028	-0.14918	0.08166	-0.13146
Huber	0.22255	-0.14869	0.13802	-0.13955	0.09919	-0.11455	0.08015	-0.10102	0.06363	-0.09527
Andrews	0.22513	-0.14977	0.14565	-0.11181	0.10226	-0.09711	0.08737	-0.08281	0.06615	-0.07105
Tukey	0.25298	-0.14974	0.14555	-0.11161	0.10225	-0.09697	0.08729	-0.08265	0.06602	-0.07118
Cauchy	0.22372	-0.15234	0.14116	-0.12558	0.10928	-0.11056	0.08365	-0.09832	0.06402	-0.08403
Welsch	0.25120	-0.14823	0.14484	-0.11218	0.10128	-0.09778	0.08636	-0.08469	0.06527	-0.07250

Çizelge 3. Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edicilerine ilişkin MSE ve yan değerleri (bir aykırı değerli veri)

n	10		15		20		25		30	
Tahminciler	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**
					β=0.5					
EKK	0.02564	-0.08434	0.01876	-0.06867	0.01430	-0.05983	0.01195	-0.05798	0.00990	-0.05064
Huber	0.02314	-0.07225	0.01481	-0.05754	0.01054	-0.04805	0.00875	-0.04649	0.00736	-0.03844
Andrews	0.02368	-0.06038	0.01548	-0.04945	0.01087	-0.03937	0.00892	-0.03862	0.00752	-0.03058
Tukey	0.02368	-0.06039	0.01548	-0.04940	0.01092	-0.03933	0.00891	-0.03850	0.00751	-0.03052
Cauchy	0.02441	-0.06451	0.01492	-0.05364	0.01059	-0.04380	0.00883	-0.04265	0.00764	-0.03481
Welsch	0.02351	-0.06005	0.01503	-0.04955	0.01098	-0.03951	0.00883	-0.03871	0.00753	-0.03112
					β=0.8					
EKK	0.06594	-0.16829	0.04732	-0.13963	0.03635	-0.11995	0.03001	-0.10681	0.02729	-0.09490
Huber	0.06051	-0.14955	0.04182	-0.12131	0.02931	-0.10185	0.02315	-0.08830	0.01918	-0.07581
Andrews	0.06295	-0.13154	0.04195	-0.10899	0.02996	-0.08839	0.02376	-0.07473	0.01928	-0.06292
Tukey	0.06291	-0.13143	0.04192	-0.10889	0.02992	-0.08835	0.02376	-0.07477	0.01935	-0.06292
Cauchy	0.06234	-0.13775	0.04258	-0.11502	0.02976	-0.09534	0.02370	-0.08197	0.01989	-0.06937
Welsch	0.06243	-0.13091	0.04168	-0.10907	0.02972	-0.08895	0.02368	-0.07550	0.02000	-0.06343
					β=1					
EKK	0.10983	-0.24907	0.07777	-0.20346	0.05945	-0.16772	0.04805	-0.14199	0.04076	-0.13005
Huber	0.09657	-0.12438	0.06424	-0.10902	0.05017	-0.10513	0.03847	-0.09993	0.03256	-0.09053
Andrews	0.09632	-0.10144	0.06457	-0.10148	0.05071	-0.10759	0.03897	-0.09409	0.03307	-0.09360
Tukey	0.09686	-0.10144	0.06454	-0.10148	0.05065	-0.10745	0.03891	-0.09401	0.03306	-0.09354
Cauchy	0.09689	-0.10917	0.06472	-0.10053	0.05038	-0.10661	0.03869	-0.09121	0.03478	-0.09086
Welsch	0.09654	-0.08063	0.06483	-0.10220	0.05038	-0.10849	0.03876	-0.09491	0.03288	-0.09059
					β=1.5					
EKK	0.26646	-0.32399	0.21084	-0.31550	0.17368	-0.34569	0.13496	-0.29343	0.11764	-0.26533
Huber	0.20095	-0.13628	0.11136	-0.12411	0.09304	-0.10604	0.07825	-0.09449	0.05792	-0.08464
Andrews	0.20657	-0.13247	0.12704	-0.12165	0.10006	-0.10831	0.08236	-0.09761	0.05830	-0.08673
Tukey	0.20656	-0.13245	0.13694	-0.12506	0.10194	-0.10025	0.08326	-0.09756	0.05825	-0.08686
Cauchy	0.20744	-0.13779	0.13912	-0.13413	0.10258	-0.10037	0.08564	-0.09797	0.05978	-0.09860
Welsch	0.20773	-0.13095	0.13726	-0.13411	0.10100	-0.10027	0.08368	-0.09007	0.05844	-0.08004

Çizelge 4. Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edicilerine ilişkin MSE ve yan değerleri (iki aykırı değerli veri)

n	10		15		20		25		30	
Tahminciler	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**	**MSE**	**Yan**
					β=0.5					
EKK	0.02780	-0.09330	0.01974	-0.07839	0.01563	-0.07026	0.01142	-0.05973	0.01005	-0.05396
Huber	0.02220	-0.08236	0.01348	-0.06895	0.01004	-0.05997	0.00852	-0.04870	0.00728	-0.04420
Andrews	0.02265	-0.07135	0.01376	-0.06161	0.01014	-0.05262	0.00866	-0.04095	0.00732	-0.03712
Tukey	0.02264	-0.07134	0.01375	-0.06155	0.01023	-0.05256	0.00865	-0.04087	0.00731	-0.03710
Cauchy	0.02374	-0.07548	0.01414	-0.06529	0.01048	-0.05621	0.00843	-0.04504	0.00748	-0.04104
Welsch	0.02346	-0.07095	0.01364	-0.06176	0.01076	-0.05262	0.00856	-0.04119	0.00737	-0.03750
					β=0.8					
EKK	0.06988	-0.20793	0.05077	-0.16806	0.03990	-0.14212	0.03264	-0.12192	0.02914	-0.11106
Huber	0.05925	-0.19474	0.04031	-0.15392	0.02849	-0.12807	0.02271	-0.10587	0.01812	-0.09443
Andrews	0.06038	-0.18101	0.04051	-0.14326	0.02838	-0.11780	0.02270	-0.09479	0.01857	-0.08266
Tukey	0.06034	-0.18093	0.04048	-0.14316	0.02817	-0.11774	0.02270	-0.09475	0.01855	-0.08254
Cauchy	0.06181	-0.18593	0.04094	-0.14847	0.02898	-0.12286	0.02267	-0.10049	0.01855	-0.08908
Welsch	0.06195	-0.18031	0.04014	-0.14313	0.02890	-0.11786	0.02268	-0.09529	0.01892	-0.08346
					β=1					
EKK	0.12993	-0.30825	0.07939	-0.25129	0.06425	-0.20924	0.05241	-0.18686	0.04782	-0.16235
Huber	0.09210	-0.12971	0.05830	-0.11565	0.04811	-0.09315	0.03423	-0.08837	0.02807	-0.08280
Andrews	0.09304	-0.12849	0.05876	-0.11337	0.04967	-0.08167	0.03472	-0.08452	0.02934	-0.08219
Tukey	0.09302	-0.12848	0.05871	-0.11331	0.04961	-0.08156	0.03472	-0.08456	0.02933	-0.08228
Cauchy	0.09467	-0.12889	0.05863	-0.12008	0.04959	-0.08731	0.03479	-0.08508	0.02978	-0.08364
Welsch	0.09227	-0.12837	0.05857	-0.12373	0.04946	-0.08198	0.03470	-0.08491	0.02925	-0.08364
					β=1.5					
EKK	0.30251	-0.65178	0.28383	-0.53501	0.24468	-0.45554	0.19699	-0.40286	0.16350	-0.36019
Huber	0.18370	-0.16402	0.10297	-0.15124	0.08566	-0.12414	0.06575	-0.10472	0.05423	-0.09558
Andrews	0.18525	-0.16274	0.11536	-0.14871	0.09068	-0.13414	0.07276	-0.10258	0.05433	-0.09873
Tukey	0.18520	-0.16273	0.11525	-0.14852	0.09067	-0.13416	0.07269	-0.10257	0.05493	-0.10081
Cauchy	0.18893	-0.16323	0.12345	-0.15058	0.09834	-0.13141	0.07999	-0.10203	0.05637	-0.09086
Welsch	0.18406	-0.16266	0.11613	-0.14965	0.09126	-0.13618	0.07370	-0.10548	0.05595	-0.08240

Çizelge 2 MSE açısından incelendiğinde;

EKK tahmin edicisinin M tahmin edicilerine göre etkin olmadığı görülmektedir. Genellikle M tahmin edicilerinin MSE değeri EKK tahmin edicisinden küçüktür.

- Şekil parametresi β=0.5 ve β ≥1 olduğu durumlarda, *n*'in tüm değerlerinde Huber M tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi β=0.8 olduğunda Cauchy tahmin edicisi etkin sonuçlar vermektedir.

Çizelge 2 yanlılık açısından incelendiğinde;

- Şekil parametresi β=0.5 olduğu durumda, Tukey tahmin edicisi n=15, 20 ve 30 değerleri için en küçük yan değerine sahip tahmin edicidir.
- Şekil parametresi β=0.8 ve n=10 için Welsch tahmin edicisi en küçük yan değerine sahipken, n=15,20,25 değerleri için Tukey tahmincisinin yanlılık değeri en küçüktür.
- Şekil parametresinin β=1 ve 1.5 değerleri için n=15,20,25 değerlerinde Tukey tahmin edicisi en küçük yan değerine sahipken, n=30 olduğunda Andrews tahmin edicisinin yan değeri en küçüktür.

Genel olarak M tahmincilerinin yan değerleri, aykırı değer içermeyen veri setinde klasik olarak kullanılan EKK tahmin edicisinin yan değerinden daha küçüktür.

Çizelge 3 MSE açısından değerlendirildiğinde;

veri setinde bir tane aykırı değer olduğu durumda M tahmincileri EKK tahmin edicisinden daha küçük MSE değerlerine sahiplerdir. EKK tahmin edicisinin MSE değeri aykırı değerin varlığı durumunda artmaktadır. Bu da EKK tahmin edicisinin aykırı değerlerden oldukça etkilendiğini doğrulamaktadır.

- Şekil parametresi β=0.5 ve β=1.5 olduğu durumlarda, n'in tüm değerlerinde Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi β=0.8 ve n=15 değeri için Welsch tahmin edicisi, en küçük MSE değerine sahipken, n' in diğer değerleri için Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi β=1 ve n=10 için Andrews tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahipken, n' in diğer değerleri için Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerini vermektedir.

Çizelge 3 yanlılık açısından değerlendirildiğinde;

- Şekil parametresinin tüm değerlerinde ve n=10 için Welsch tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir. Ayrıca β=0.5 için n >10 değerlerinde ise Tukey tahmin edicisi en küçük yana sahip tahmin edicidir.
- Şekil parametresi β=0.8 olduğu durumda n=15,20,30 değerlerinde Tukey tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir.
- Şekil parametresi β=1 olduğu durumda n=15,25 değerlerinde Cauchy tahmin edicisi en küçük yana sahipken, n=30 değerinde Huber tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir.

- Şekil parametresi β=1.5 olduğu durumda n>20 değerlerinde Welsch tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir.

Çizelge 4'e MSE açısından bakılırsa;

veri setinde iki aykırı değer olduğu durumda EKK tahmin edicisinin MSE değeri artarken, M tahmin edicilerinin MSE değeri azalmaktadır. Sağlam tahmin ediciler aykırı değerlerin etkilerini azaltmaktadır.

- Şekil parametresi β=0.5, β=1 ve β=1.5 olduğu durumlarda genellikle Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi β=0.8 olduğunda n=10,30 değerlerinde Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir. n' in diğer değerleri için etkin tahmin ediciler değişmektedir.

Çizelge 4'e yanlılık açısından bakılırsa;

M tahmin edicilerinin yan değerleri EKK' dan genel olarak daha küçüktür.

- Şekil parametresi β=0.5 ve n=10 değeri için en küçük yanlı tahmin edici Welsch tahmin edicisi iken, n >10 olduğunda Tukey tahmin edicisi en küçük yanlı tahmin edicidir.
- Şekil parametresi β=0.8 ve $n \leq 15$ değerleri için en küçük yanlı tahmin edici Welsch tahmin edicisi iken, n >15 değerleri için Tukey tahmin edici en küçük yan değerine sahiptir.

Hem MSE hem de yan değerlerine bakıldığında Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmininde M tahmin edicilerinin EKK tahmin edicisinden daha etkin sonuçlar verdiği görülmektedir. M tahmin edicilerinin, şekil parametresinin farklı değerleri ve örneklem hacmine bağlı olarak farklı performanslar göstermesine rağmen, birbirlerine oldukça yakın sonuçlar verdikleri gözlenmiştir. Huber, Tukey, Cauchy ve Welsch tahmin edicileri MSE ve yan kriteri bakımından en etkin tahmin edicilerdir.

5. Sonuç

Bu çalışmada küçük örneklemlerde veri setinin aykırı değer içerip içermediği durumlarda Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için EKK ve sağlam M tahmin edicileri ele alınmıştır. EKK tahmin edicisinin model varsayımlarının sağlanamaması ve veri setinin aykırı değer içermesi durumunda etkinliği azalmaktadır. Bu durumda parametre tahmini için sağlam yöntemler tercih edilebilir. Güvenirlilik analizlerinde örneklem hacmi genellikle küçüktür. Bu çalışmada küçük örneklemlere dayalı olarak Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini çalışılmıştır. Frechet dağılımının şekil parametresinin rank regresyon aracılığı ile tahmin edilmesinde karşılaştırılma kriteri olarak yan ve MSE değerleri kullanılmıştır.
Simülasyon sonuçları incelendiğinde M tahmin edicilerinin aykırı değersiz ve aykırı değerli veri setleri için Frechet dağılımının şekil parametresini tahmin etmede EKK tahmin edicisinden daha etkin olduğu görülmüştür. M tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri genel olarak EKK tahmin edicisinden daha küçüktür. Veri setinde aykırı değer bulunmaması durumunda M tahmin edicilerinden Huber ve Cauchy tahmin edicisinin diğer tahmin edicilerden daha etkin sonuçlar verdiği görülmüştür. Veri setinde bir aykırı değer bulunması durumunda Huber tahmin edicisinin ve iki aykırı değer bulunması durumunda ise Huber ve Tukey tahmin edicilerinin daha iyi

sonuçlar verdiği ortaya belirlenmiştir. Çalışmanın sonucu olarak güvenilirlik analizinde, küçük örneklemlerde, sağlam M tahmin edicilerinin EKK tahmin edicisine alternatif olarak kullanılabileceği görülmüştür.

Kaynaklar

[1] T. Kernane, Z. Raizah, 2014, Estimation of the Parameters of Extreme Value Distributions from Truncated Data Via the EM Algorithm Estimation of the Parameters of Extreme Value Distributions from Truncated Data Via the EM Algorithm, [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00503252v2/document].

[2] M. Frechet, 1927, Sur la loi de probabilite de lecart maximum, Ann. Soc. Polon. Math, 6(93) [https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/frechet-distribution/]

[3] K. Abbas, T. Yincai, 2012, Comparison of Estimation Methods for Frechet Distribution with Known Shape, Caspian Journal of Applied Sciences Research, 1(10), pp. 58-64.

[4] S. Kotz, S. Nadarajah, 2000, Extreme Value Distributions Theory and Applications, Imperial College Press, Singapure.

[5] D.G. Harlow, 2002, Applications of the Frechet distribution function, Int. J. of Materials & Product Technology, 17, 482-495.

[6] A. Zaharim, S.K. Najid, A.M. Razali, K. Sopian, 2009, Analyzing malaysian wind speed data using statistical distribution, In Proceedings of the 4th IASME/WSEAS International conference on Energy and Environment. University of Cambridge, February, 24-26

[7] S. Nadarajah, S. Kotz, 2008, Sociological models based on Fréchet random variables, Qual Quant, 42, 89–95.

[8] F.G. Akgül, B. Şenoğlu (2018) Comparison of Estimation Methods for Inverse Weibull Distribution. In: Tez M., von Rosen D. (eds) Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference. Contributions to Statistics. Springer, Cham.

[9] M. Mubarak, 2011, Estimation of the Frechet distribution parameters based on record values, Arabian Journal for Science and Engineering, 36,1597–1606.

[10] C. Chatterjee , A. Chatterjee, 2012, *Use of the Frechet distribution for UPV measurements in concrete*. NDT&E International, 52, 122-128.

[11] R.B. Silva, M. Bourguignon, G.M. Cordeiro, 2014, *Fréchet and ınverse gamma distributions: correct selection and minimum sample size to discriminate them*, Journal of Statistical Theory and Practice, 9(1), 73-87.

[12] K. Abbas, Y. Tang, 2015, *Analysis of Frechet Distribution Using Reference Priors*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 44(14), 2945-2956.

[13] A. Z. Afify, H. M. Yousof, G. M. Cordeiro, E. M. M. Ortega, Z. M. Nofal, 2016, *The Weibull Fréchet distribution and its applications*, Journal of Applied Statistics, Volume 43, 2608-2626.

[14] S. Pindado, C. Pindado, J. Cubas, 2017*, Fréchet distribution applied to salary ıncomes in spain from 1999 to 2014. an engineering approach to changes in salaries' distribution*, Economies, 5(14),1-19.

[15] F. Maleki, E. Deiri, 2017, *Efficient Estimation of the pdf and the cdf of the Frechet Distribution*, Annals of Data Science, 4(2),211–225.

[16] M. Zayed, N.S Butt, 2017, *The Extended Frechet Distribution: Properties and Applications*, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 3, 529-543.

[17] M.A. Haq, H.M. Yousof, S. Hashmi, 2017, *A New Five-Parameter Fréchet Model for Extreme Values,* Pakistan Journal of Statistics and Operation Research 13(3), 617-632.

[18] C. J. Tablada, G.M. Cordeiro, 2017, The modified Fréchet distribution and its properties, Communications in Statistics- Theory and Methods, 46, 21,

[19] P.L. Ramos, F. Louzadaa, E. Ramosa and S. Dey, 2018, *The Frechet distribution: Estimation and Application an Overview*, arXiv:1801.05327 [stat.AP].

[20] C. Lawson, J.B. Keats, D.C. Montgomery, 1997, Comparison of Robust and Least Squares Regression in Computer-Generated Probability Plots, IEEE Transactions on Reliability, 46 (1), 108-121.

[21] A. A. Yavuz (2013), Estimation of the Shape Parameter of the Weibull Distribution Using Linear Regression Methods: Non-Censored Samples. Qual. Reliab. Engng. Int., 29: 1207-1219. doi:10.1002/qre.1472.

[22] A. Benard, E.C. Bos-Levenbach, 1953, The plotting of observations on probability paper. Statistica Neerlandica 7,163–173.

[23] P.J. Huber, E.M. Ronchetti, 2009, Robust Statistics, Wiley Series in Probability and Statistics. 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.

[24] D.N. Gujerati, D.C. Porter, 2016, Temel ekonometri, 5. Basım, Literatür yayıncılık, İstanbul.