Int. J. Adv. Eng. Pure Sci. 2019, 1: 62-69
DOI: 10.7240/jeps.474362

RESEARCH ARTICLE / ARAŞTIRMA MAKALESİ

Özel Bir Hamiltonyen Denklemi için λ-Simetri ve Prelle-Singer Metodu

λ-Symmetry and Prelle-Singer Method for a Special Hamiltonian Equation

Gülden GÜN POLAT[1]

[1]*İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Maslak, 34469, İstanbul*

Öz

Lineer olmayan adi diferansiyel denklemler için mevcut olan indirgeme metotlarından önemli iki tanesi λ-simetri ve Prelle-Singer metodudur. Bu metotlar aynı zamanda bahsi geçen denklemlerin ilk integrallerini ve integrasyon çarpanlarını bulmak için oldukça elverişlidir. Bu çalışma Riemann sıfırlarının spektral realizasyonunu tanımlayan bir model olan özel bir Hamiltonyen denklemine, bu metotların uygulanmasını sunmayı amaçlamaktadır. Ayrıca λ-simetri ve Prelle-Singer metotları arasındaki bağlantıya yer verilerek, bu ilişkinin sağladığı kolaylıklar detaylarıyla açıklanacak ve Hamiltonyen denklemine uygulamaları birçok farklı durum için sunulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Lie simetrileri, λ-simetrileri, Prelle-Singer metodu, integrasyon çarpanı, ilk integral

Abstract

Two of important methods that are used to reduce degree of nonlinear ordinary differential equation, are known as λ-symmetry and Prelle-Singer methods. These methods are also very suitable to find first integrals and integrating factors of mentioned equations. The purpose of this study is to present applications of these methods to a special Hamiltonian equation that is known as a model equation describing the spectral realization of the Riemann zeros. Furthermore, it has significant connection between λ-symmetry and Prelle-Singer methods, which provides some advantages that are explained in detail and implementations of a special Hamiltonian equation are illustrated for many different cases.

Keywords: Lie symmetries, λ-symmetries, Prelle-Singer method, integration factor, first integral

I.Giriş

Lineer olmayan diferansiyel denklemler matematik, fizik ve ekonomi gibi pek çok uygulamalı alanda var olan problemlerin modellenmesiyle; literatürde çözümü, pek çok araştırmacının ilgisini çekecek şekilde yer bulur. Diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığına ve tekliğine yönelik olan çalışmalar klasik olarak oldukça etkili bir şekilde devam etse de, çözümünün yapısını inceleyen çalışmalar da büyük ölçüde dikkat çekmektedir. Problemlerin çok çeşitli olması çözüme yönelik metotların da çok yönlü ve detaylı şekilde araştırılmasını doğrudan etkiler. Bu çalışmalardan en eskiye dayanan ve sonrasında geliştirilen metotların temeli niteliğinde olan araştırma 1870 li yıllarda Norveçli matematikçi Sophus Lie'nin kendi ismiyle anılan Lie grup teorisidir. Bu teori, dönüşüm grupları ile belirlenen Lie simetrileri yardımıyla, eğer çalışılan denklem kısmi diferansiyel denklem ise bu denklemi adi diferansiyel denkleme indirgemeye, ele alınan denklemin adi diferansiyel denklem olması durumunda ise bu denklemin mertebesinin düşürülmesine olanak sağlar. Ayrıca Lie simetrileri kullanılarak ifade edilen yeni denklemler değişmezlik (invaryantlık) şartı altında elde edildiğinden, bu denklemlerin çözümleri aynı zamanda orjinal denklemlerin de çözümüdür. Lie'nin bu köklü teorisi çok zahmetli işlem yükünden dolayı uzun yıllar araştırmacıların ilgisinden uzak kalmıştır. Geçen zamanda, konu üzerinde Bluman, Kumei ve Olver tarafından yazılan kitaplar ve uygulamalar ile konu oldukça dikkat çekici hale gelmiştir [1-2]. Ayrıca gelişen bilgisayar teknolojisi ile ortaya çıkan Mathematica ve Maple

Sorumlu yazar/Corresponding Author: Gülden GÜN POLAT, Tel: +90 505 4299668, e-posta: guldengun@itu.edu.tr
Gönderilme/Submitted: 24.10.2018,, **Düzenleme/Revised:** 30.01.2019, **Kabul/Accepted:** 30.01.2019.

gibi programlar ile hesaplamaların daha elverişli ve algoritmik olmasıyla Lie grup teorisi araştırmacıların ilgi odaklarından biri olmuştur.

Lie'nin teorisi temel niteliğinde olsa da problemlerin çeşitliği zaman içerisinde farklı simetri çeşitlerinin ortaya çıkmasına olanak sağlamıştır. Örneğin her adi diferansiyel denklem Lie simetrisine sahip olmayabilir böyle durumlarda yeni bir yaklaşım olarak Muriel ve Romero tarafından λ-simetrileri geliştirilmiştir [3-5]. Bu simetrilerin mantığı ilk olarak vektör alanlarının üstel ifadeler içermesi fikriyle Olver tarafından kitabında ifade edilse de teorisi Muriel ve Romero tarafından genişletilmiştir ve ismi onlar tarafından verilmiştir. Aslında λ ifadesi simetrilerin bulunmasını sağlayan uzanım formülüne eklenen bir fonksiyondur. Bu fonksiyon yardımıyla sıfırdan farklı yada aşikar olmayan yeni sonsuz küçük ifadeler (vektör alanlarının katsayıları) bulabilmek mümkün olur ve denklemleri sağlayan λ-fonksiyonuna aynı zamanda simetri denilir. Lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin λ-simetrileri yardımıyla ilk integralleri ve integrasyon çarpanları bulunabilir ve bu ilk integraller kullanılarak denklemin analitik çözümlerine ulaşılabilir [6-8]. Bu metot lineer olmayan denklemler kadar lineer olanlarda da oldukça etkindir. λ-simetrileri Lie simetrisine sahip olmayan denklemlerin çözüm arayışı fikri ile doğmuş olsa da, eğer bir denklemin Lie simetrileri biliniyorsa, bu simetriler kullanılarak λ-simetrileri belirlenebilir. Lie simetrilerini kullanarak elde edilen λ-simetrileri ile bir adi diferansiyel denklemi indirgemek, integrasyon çarpanını ve ilk integralini elde etmek tamamen algoritmik bir metotdur ve oldukça etkindir.

Adi diferansiyel denklemlerin benzer şekilde integrasyon çarpanı ve ilk integrallerini bulmak için bir diğer önemli metot Prelle-Singer olarak literatürde yer bulur. Temel olarak bir adi diferansiyel denklemin, genellikle rasyonel şekilde, basit fonksiyonlarla ifade edilen bir çözümü olduğu kabul edilir ve bu çözüm Prelle-Singer metodunun basamakları ile belirlenir. Bu basamaklar integrasyon çarpanı R ve null formu S 'i içeren belirleyici denklemler olarak adlandırılan üç denklemin çözümüne yönelik ortaya çıkar. Eğer tüm bu denklemlerin çözümüne ulaşılır ve R ve S fonksiyonları elde edilebilirse, bu fonksiyonlar kullanılarak çalışılan denklemin ilk integrali belirlenebilir [9-10]. Fakat her zaman bu belirleyici denklemleri çözmek mümkün olmamaktadır. Böyle durumlarda λ-simetri ve Prelle-Singer metotları arasında keşfedilen, büyük ölçüde işlem yükünü rahatlatan önemli bir ilişkiden yararlanılabilir. Bu bağlantı $\lambda = -S$ ve λ-simetri metodundan elde edilen integrasyon çarpanı μ olmak üzere $\mu = -R$ şeklindedir.

1.1.Makalenin Amacı ve Problemin Tanımı

Neredeyse yüzyıl kadar önce Polya ve Hilbert, Riemann'ın hipotezini ispatlamak için spektrumunun sanal kısmı aşikar olmayan Riemann sıfırları içeren kendine eşlenik bir operator bulmak gerektiğini önerdiler. Michael Berry 2008 yılında kuantum versiyonu Polya-Hilbert hipotezini gerçekleyen ve aynı zamanda bazı özel koşulları sağlaması gereken klasik bir Hamiltonyen'in varlığını öneren bir fikir ortaya attı [11]. Berry, ilk klasik Hamiltonyen'i $H_{cl} = yp$ şeklinde önerdi. Fakat daha sonra Berry ve Keating bu Hamiltonyen için sağlaması gereken özel koşullardan biri olan, kaotik ve asal sayılarla ilişkili izole edilmiş periyodik yörüngelerde olması şartını sağlamadığını ifade ettiler [12]. Bu Hamiltonyen'e ait farklı bir modifikasyon Sierra ve çalışma arkadaşları ile Berry ve Keating tarafından, sınırlı klasik yörüngelere ve ayrık kuantum spekturuma sahip olması için 2011 yılında aşağıdaki şekilde önerildi

$$H_S = y\left(p + \frac{\ell_p^2}{p}\right), \qquad (1)$$

ℓ_p, momentum boyutlarının eşleme sabiti olmak üzere (1) Hamiltonyen'nine karşılık gelen Lagrange fonksiyonu

$$L = -2\ell_p\sqrt{y(y - y')},$$

şeklindedir [13-14]. Bu Lagrange fonksiyonunun bilinen Euler-Lagrange denklemlerine koyulmasıyla, kendisine karşılık gelen ikinci mertebe diferansiyel denklem

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}^2}{y} - 6\dot{y} + 4y = 0, \qquad (2)$$

olur. Bu denklemin Lie simetrileri ve denkleme Jacobi metodunun uygulaması Nucci tarafından yapılmıştır [15]. Ayrıca denklemin ilk integralleri kendi eşleniklik ve karakteristik metodu ile literatürde yer bulmuştur [16-17].

Bu çalışmanın amacı ilk önce denklemin Lie simetrilerinden hareketle λ-simetrilerini belirleyerek λ-simetri metodunu uygulamak, bu metoda göre ilk integralleri ve integrasyon çarpanlarını bulmaktır. Ardından λ-simetri ve Prelle-Singer metodu arasındaki ilişki kullanılarak Prelle-Singer metodunun sonuçlarına göre farklı integrasyon çarpanları, null formları bu sonuçlara göre de farklı ilk intregraller elde etmek planlanmaktadır.

Bu çalışmanın 2. bölümünde bahsi geçen metotlarla ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. 3. bölüm ise (2) denklemine bu metotların uygulamasını ve elde edilen sonuçların değerlendirilmesini içermektedir.

II.Temel Bilgiler

2.1 λ-Simetri Metodu

$n.$ mertebe bir adi diferansiyel denklem

$$\Delta(x, y^{(n)}) = 0, \qquad (3)$$

(x, y) değişkenleri $M \subset X \times Y \simeq \mathbb{R}^2$ şeklinde bir M açık kümede olacak şekilde tanımlansın [5]. $k \in \mathbb{N}$ için, $M^{(k)} \subset X \times Y^{(k)}$ jet uzayına karşılık gelen uzay $M^{(k)}$ olarak verilsin. Bu kümenin elemanları $(x, y^{(k)}) = (x, y, y_1, \dots, y_k)$ şeklinde ve $i = 1,2, \dots, k$ için $y^{(i)}$ ler y'nin x'e göre $i.$ mertebe türevini temsil etsin. (3) denkleminin integrasyon çarpanı, $0 \le k \le n$ aralığındaki bazı k'lar için $\mu(x, y^{(k)})$ olsun. Eğer (3) denklemi $\mu(x, y^{(k)})$ ile çarpılırsa, $\Delta(x, y^{(n-1)})$ şeklindeki bazı fonksiyonlar için toplam türev operatörü D_x ile ifade edilebilir olarak

$$\mu(x, y^{(k)}).\Delta(x, y^{(n)}) = D_x(\Delta(x, y^{(n-1)}) \quad (4)$$

eşitliği belirlenir. Toplam türev operatörü aşağıdaki şekilde bir formülüzasyona sahiptir

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=2}^{n} y^{(i)} \frac{\partial}{\partial y^{(i-1)}}. \qquad (5)$$

(4) denklemindeki $\Delta(x, y^{(n-1)})$ fonksiyonu (3) denklemi için bir ilk integraldir ve $D_x(\Delta(x, y^{(n-1)}))$ bir korunum formudur. Ayrıca (4) denklemi ile bağlantılı olarak $D_x(\Delta(x, y^{(n-1)})) = 0$ tam diferansiyel denklemi için bir $\lambda-$simetrisi belirlenebilir ve aşikar olarak mertebe indirgemesi ile $\Delta(x, y^{(n-1)}) = C, \ \ C \in \mathbb{R}$ sonucu elde edilir.

Tanım 1: [3] Yeni uzanım formulü

Her $\lambda \in C^{\infty}(M^{(1)})$ keyfi fonksiyonu için yeni bir uzanım formülü v vektör alanı ile tanımlanır. Bu vektör alanı $v = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ şeklinde M üzerinde ifade edilsin. *v'nin $n.$ mertebe λ-uzanımı*

$v^{[\lambda,n]}$ ile ifade edilmek üzere $M^{(n)}$ de tanımlanan bu vektör alanı $\eta^{[\lambda,(0)]}(x, y) = \eta(x, y)$ olması durumunda

$$v^{[\lambda,n]} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \eta^{[\lambda,(i)]}(x, y^{(i)})\frac{\partial}{\partial y_i}$$

şeklinde tanımlanır ve $0 \le i \le n$ için $\eta^{[\lambda,(i)]}(x, y^{(i)})$ ifadesinin açık formu toplam türev operatörü kullanılarak aşağıdaki gibidir

$$\eta^{[\lambda,(i)]}(x, y^{(i)}) = D_x\left(\eta^{[\lambda,(i-1)]}(x, y^{(i-1)})\right) - D_x(\xi(x, y))y_i + \lambda(\eta^{[\lambda,(i-1)]}(x, y^{(i-1)}) - \xi(x, y)y_i).$$

[2] kitabında karakteristik olarak adlandırılan ifade $v = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ vektör alanı için

$$Q = \eta(x, y) - \xi(x, y)\dot{y} \qquad (6)$$

şeklindedir. Bu karakteristik ile birlikte formülüze edilen vektör alanı

$$v_Q^{[\lambda,(n)]} = \sum_{i=1}^{n}(D_x + \lambda)^i(Q)\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad (7)$$

olsun. Böylece $v^{[\lambda,n]}$ uzanım formülü

$$v^{[\lambda,(n)]} = v_Q^{[\lambda,(n)]} + \xi(x, y)D_x,$$

olarak da ifade edilebilir.

$0 \le k \le n-1$ için $D_x(\Delta(x, y^{(n-1)})) = 0$ sağlanması durumunda eğer $\lambda \in C^{\infty}(M^{(k)})$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}(D_x + \lambda)^i(1)\frac{\partial\Delta}{\partial y^{(i)}} = 0, \quad (8)$$

kısmi diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü ise, o zaman $v = \partial_y$, (3) denkleminin bir λ-simetrisidir.

(8) denklemi $v = \partial_y$ simetrisi için $\eta = 1$ ve ξ=0 olmasından dolayı (7) denkleminin karakteristik $Q = 1$ için ifade edilmiş formudur. (8) denklemi aynı zamanda bir diferansiyel denklem için λ-fonksiyonunu içeren uzanım formülüdür, bu denklemin açık formda yazılması ve türev katsayıları ile belirlenen belirleyici denklemlerin çözülmesiyle λ-fonksiyonu ve sonsuz küçük fonksiyonlar (vektör alanı katsayıları) elde edilir [18].

2.2 Lie ve λ-Simetri İlişkisi

Bölüm 2.1de $\lambda-$simetrilerinin teorisi genel çerçeve de $n.$ mertebe denklemler için verilmiştir fakat Lie ve $\lambda-$simetri arasındaki direkt bağlantı Muriel ve Romero tarafından ikinci mertebe adi diferansiyel denklemler için detaylı bir şekilde açıklanmıştır [4]. İkinci mertebe bir adi diferansiyel denklem

$$\ddot{y} = \phi(x, y, \dot{y}), \qquad (9)$$

formunda olsun. (9) denkleminin Lie simetrileri yada bir başka deyişle sonsuz küçük fonksiyonları ξ ve η olmak üzere bunlarla ifade edilen vektör alanı

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

şeklindedir.

Teorem 1: [4] Vektör alanı $v = \partial_y$, (9) denkleminin bir λ -simetrisidir ancak ve ancak bu λ-fonksiyonu

$$\lambda = \frac{A(Q)}{Q}, \qquad (10)$$

ifadesi ile belirlenir.

λ-simetri metodu lineer olmayan ve lineer denklemlerde oldukça etkili bir yöntemdir. Ancak bir önceki bölüm **2.1** de bahsedilen şekilde (8) denklemini kullanarak bir denkleme λ-simetri metodunu uygulamak bazen çoklu belirleyici denklemleri çözmeyi gerektirebilir, bu da denklemlerin lineer olmamasından dolayı oldukça zahmetli hesaplar ortaya çıkarabilir. Böyle durumlarda eğer çalışılan denklemin Lie simetrileri biliniyorsa, Lie ve λ -simetri ilişkisine dayanan basit bir algoritma ile denklemin ilk integrallerine ve integrasyon çarpanlarına ulaşılabilir. Bu algoritma aşağıdaki dört adımla özetlenebilir.

1.$\lambda(x, y, \dot{y})$, (8) denkleminin özel bir çözümü olsun. $v = \partial_y$ simetrisi için birinci mertebe λ-uzanımı Tanım 1 de verilen yeni uzanım formülünde $n = 1$ alınarak $v^{[\lambda,(1)]}$ ile ifade edilmek üzere, $v^{[\lambda,(1)]}$ nin birinci mertebe invaryantı yada ilk integrali

$$w_y + \lambda w_{\dot{y}} = 0, \qquad (11)$$

denkleminin özel bir çözümüdür.

2. $\{x, y, \dot{y}\}$ kümesi $v^{[\lambda,(1)]}$nin invaryantlarının tam bir sistemidir ve (9) denklemi $\{x, y, \dot{y}\}$ cinsinden indirgenmiş birinci mertebe bir adi diferansiyel denklem olarak yazılabilir. $D_x(\Delta(x, w)) = 0$, bu indirgenmiş birinci mertebe denklemin bir korunum formu olsun. (11) denkleminin çözümünden $\dot{y}$ ve $\ddot{y}$ ifadeleri w cinsinden yazılarak $D_x(\Delta(x, w(t, y, \dot{y})) = 0 D_x(\Delta(x, w(t, y, \dot{y})) = 0$ şeklinde orijinal denklemin bir korunum formu (ilk integrali) belirlenir ve böylece (9) orijinal denklemi w cinsinden ifade edilmiş olur.

3.w ya bağlı indirgenmiş denklemin çözümüyle ilk integral (x, w) cinsinden $\Delta(x, w) = G(x, w) = C,\ C \in \mathbb{R}$ $\Delta(x, w) = G(x, w) = C,\ C \in \mathbb{R}$ olarak ifade edilir ve (9) denkleminin integrasyon çarpanı

$$\mu = G_w w_{\dot{y}},$$

formülüzasyonu ile belirlenir.

4. Son olarak ilk integralin $\{x, y, \dot{y}\}$ türünden ifadesi için yani $G(x, w(x, y, \dot{y})$) yazılmasıyla

$$I(x, y, \dot{y}) = G(x, w(x, y, \dot{y})),$$

(9) denkleminin $D_x[I(x, y, \dot{y})] = 0$ eşitliğini sağlayan ilk integraline ulaşılır.

2.3 Prelle-Singer Metodu

İntegrasyon çarpanı ve ilk integrali bulmaya olanak sağlayan bir diğer metot Prelle-Singer metodudur. Bu metodun temelleri ilk defa birinci mertebe adi diferansiyel denklemler için Prelle ve Singer tarafından atılmıştır [19]. Ardından ikinci mertebe adi diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği Duarte ve ark. tarafından ispatlanmıştır [20]. Metodun en geniş anlamda n. mertebe adi diferansiyel denklemlere uygulanışı Chandrasekar ve ark. ile yapılmış ve pek çok metotla ilişkisi de detaylarıyla açıklanmıştır [9-10]. Metoda yönelik bazı temel özellikler aşağıda açıklanacaktır.

M ve N, t zaman olmak üzere; $t, y, \dot{y}$ nin analitik fonksiyonları ve kompleks polinomlar iken, ikinci mertebe bir adi bir diferansiyel denklem rasyonel şekilde bu fonksiyonlar kullanılarak

$$\ddot{y} = \frac{M}{N} = \phi, \quad M, N \in \mathbb{C}[t, y, \dot{y}], \qquad (12)$$

ifade edilsin.

C, çözümler üzerinde bir sabit olmak üzere (12) denkleminin bir ilk integrali $I(t, y, \dot{y}) = C$ olsun. Bu ilk integrale (5) formuyla verilen toplam türev operatörü uygulanırsa

$$DI = I_t dt + I_y dy + I_{\dot{y}} d\dot{y} = 0, \qquad (13)$$

1-formu elde edilir. Eğer (12) denklemi $(M/N)dt - d\dot{y} = 0$ $(M/N)dt - d\dot{y} = 0$ olarak yeniden yazılır ve $S(t,y,\dot{y})\dot{y}\,dt - S(t,y,\dot{y})dy$ şeklinde null terimi eklenirse aşağıdaki 1-form elde edilir

$$\left(\frac{M}{N} + S\dot{y}\right)dt - Sdy - d\dot{y} = 0. \qquad (14)$$

Her ikisi de çözümler üzerinde tanımlandığından (13) ve (14) 1-formları orantılı olmalıdır ve (14) denkleminin $R(t,y,\dot{y})$ $R(t,y,\dot{y})$ integrasyon çarpanı ile çarpılmasıyla,

$$dI = R(\phi + S\dot{y})dt - RSdy - Rd\dot{y} = 0, \qquad (15)$$

ifadesi elde edilir. (13) ve (15) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla I ilk integral, R integrasyon çarpanı ve S null terimini içeren

$$I_t = R(\phi + \dot{y}S), I_y = -RS, \qquad I_{\dot{y}} = -R,$$

ilişkiler elde edilir. Bu terimler arasındaki $I_{ty} = I_{yt}$, $I_{t\dot{y}} = I_{\dot{y}t}$ $I_{ty} = I_{yt}$, $I_{y\dot{y}} = I_{\dot{y}y}$ uyumluluk (compatibility) koşulunun sağlanmasıyla S ve R yi içeren belirleyici denklemler

$$S_t + \dot{y}\,S_y + \phi S_{\dot{y}} = -\phi_y + S\phi_{\dot{y}} + S^2 \quad (16)$$

$$R_t + \dot{y}\,R_y + \phi R_{\dot{y}} = R(\phi + S\,\dot{y}), \qquad (17)$$

$$R_y = R_{\dot{y}}\,S + R\,S_{\dot{y}}\,, \qquad (18)$$

şeklindedir. Hesaplamalar açısından (16) nolu denklemin çözümüyle S bulunur ve (17) nolu denklemle de R elde edilir. Son olarak (18) denklemi S ve R ye ait kısıtlayıcı denklemdir ve bu denkleminde sağlanması halinde (16)-(18) denklemini sağlayan en uygun çözümler bulunmuş olduğu gerçeklenir. Böylece R integrasyon çarpanı ve S null terimi ile belirlenebilen ilk integral

$$r_1 = \int R(\phi + S\,\dot{y})dt$$

ve

$$r_2 = \int (RS + \tfrac{d}{dy}\,r_1)\,dy, \qquad (19)$$ iken

$$I(t,y,\dot{y}) = r_1 - r_2 - \int [R + \frac{d}{d\dot{y}}(r_1 - r_2)]d\dot{y}, \quad (20)$$

denklemi ile verilir.

2.4 λ-Simetri ve Prelle-Singer Metodu İlişkisi

Prelle-Singer metodunun algoritmasını belirleyen (16)-(18) belirleyici denklemlerinin çözümünü her zaman kolaylıkla bulmak mümkün olmayabilir. İlk olarak Muriel ve Romero λ-simetri ve Prelle-Singer metodu ilişkisine $\lambda = -S$ ve $\mu = -R$ şeklinde kısaca [4] makalesinde değinseler de, daha geniş çerçevede, uygulanabilirliğinin önemini göstermek için orijinal örneklerle Mohanasubha ve ark. tarafından detaylıca sunulmuştur [10].

Sonuç 1: λ-simetrisi ile null form arasında $\lambda = -S$, integrasyon çarpanı μ ile R fonksiyonu arasında $\mu = -R$ ilişkisi mevcuttur.

III. λ-SİMETRİ ve PRELLE-SİNGER METODUNUN (2) DENKLEMİNE UYGULANMASI

İkinci mertebe lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem olan (2) Lagrange fonksiyonu denkleminin $sl(3,\mathbb{R})$ cebiri ile üretilen sekiz parametreli Lie nokta simetrileri

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = y\partial_y,\ X_3 = \frac{e^{2t}}{y}\partial_y,\ X_4 = \frac{e^{4t}}{y}\partial_y$$

$$X_5 = e^{-2t}y^2(\partial_t + 2y\partial_y),$$

$$X_6 = e^{-4t}y^2(\partial_t + y\partial_y), \qquad (21)$$

$$X_7 = e^{2t}(\partial_t + 2y\partial_y),$$

$$X_8 = e^{2t}(\partial_t + 2y\partial_y),$$ şeklindedir [15].

3.1 (2) Denklemi İçin λ-Simetri Metodu

(21) denklemindeki (2) denkleminin Lie simetrileri kullanılarak aynı denklemin λ-simetrileri Bölüm 2.2 ye dayanarak belirlenecektir.

Durum 1. X_1 vektör alanı bir diğer adı üretecine göre $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ dır. (6) denklemine göre elde edilen karakteristik $Q = -\dot{y}$ olur ve (5) denklemindeki operatöre göre uygulanan Teorem 1'e dayanan, (10) denklemine göre elde edilen λ-simetrisi

$$\lambda_1 = 6 - \frac{4y}{\dot{y}} - \frac{\dot{y}}{y}, \qquad (22)$$

olarak bulunur. Bölüm 2.2 ifade edilen dört basamaklı algoritma aşağıdaki şekilde uygulanır. Öncelikle (22) ile verilen λ-fonksiyonu (11) denkleminde yerine konulur ise bu denklemin çözümü

$$w = \ln\left[\frac{y(2y-\dot{y})^2}{y-\dot{y}}\right] \qquad (23)$$

şeklinde bulunur ve (23) çözümünden hareketle

$$\dot{y} = \frac{-e^{w} + 4y^2 - \sqrt{e^{2w} - 4e^{w}y^2}}{2y},$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2y^3\sqrt{e^{2w}-4e^{w}y^2}}\Big(-e^{2w}\left(e^{w}+\sqrt{e^{2w}-4e^{w}y^2}\right)$$
$$-e^{w}y^2\left(-e^{2w}\left(e^{w}+\sqrt{e^{2w}-4e^{w}y^2}\right)\dot{w}+2y^4\left(4\sqrt{e^{2w}-4e^{w}y^2}+e^{w}(4+\dot{w})\right)\right)\Big),$$

$\dot{y}$ ve $\ddot{y}$ ifadeleri w ve y cinsinden ifade edilmiş olur. Algoritmadaki 2. adıma göre bu türevlerin orijinal denklem (2) de yerine konmasıyla

$$\dot{w} = 0 \qquad (24)$$

indirgenmiş denklemi elde edilir. Algoritmanın 3. ve 4. adımına göre yukarıdaki (24) indirgenmiş denkleminin çözümünün aşikar olması G ilk integralinin (23) ile verilen w 'ya eşit olmasını gerektirir. Böylece (2) denkleminin integrasyon çarpanı ve ilk integrali

$$\mu_1 = \frac{\dot{y}}{2y^2 - 3y\dot{y} + \dot{y}^2},$$

$$I_1 = \ln\left[\frac{y(2y-\dot{y}^2)}{y-\dot{y}}\right],$$

şeklinde belirlenir. Burada X_1 vektör alanı için uygulanan Bölüm 2.2 ifade edilen dört basamaklı algoritma detaylarıyla açıklanmıştır. Diğer vektör alanları için de benzer işlemler aynı şekilde yapılmıştır ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Durum 2. X_2 için ise Lie nokta simetrileri (sonsuz küçükler) $\xi = 0$ ve $\eta = y$ şeklindedir. Bu Lie simetrileri ile elde edilen λ-simetrisi, integrasyon çarpanı ve ilk integral sırasıyla

$$\lambda_2 = \frac{\dot{y}}{y}, \quad (25)$$

$$\mu_2 = \frac{y}{2y^2 - 3y\dot{y} + \dot{y}^2},$$

$$I_2 = \ln\left[\frac{e^{2t}\left(\frac{\dot{y}}{y}-2\right)}{\frac{\dot{y}}{y}-1}\right],$$ bulunur.

Durum 3. X_3 üretecine göre Lie nokta simetrileri (sonsuz küçükler) $\xi = 0$ ve $\eta = \frac{e^{2t}}{y}$ olur. Bu durumda elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir

$$\lambda_3 = 2 - \frac{\dot{y}}{y}, \qquad (26)$$

$$\mu_3 = e^{-4t}y, \qquad I_3 = e^{-4t}y(\dot{y}-y).$$

Durum 4. X_4 vektör alanına göre $\xi = 0$ ve $\eta = \frac{e^{4t}}{y}$ şeklinde olup bu Lie nokta simetrilerine göre elde edilen λ-simetrisi, integrasyon çarpanı ve ilk integral sırasıyla

$$\lambda_4 = 2 - \frac{\dot{y}}{y}, \qquad (27)$$

$$\mu_4 = e^{-2t}y, \qquad I_3 = e^{-2t}y(\dot{y}-2y),$$

olarak belirlenir.

Sonuç 2: X_5 üreteci ile elde edilen $\lambda_5 = \lambda_3$ olduğundan $\mu_5 = \mu_3$ ve $I_5 = I_3$ olur ve aynı şekilde X_6 için $\lambda_6 = \lambda_2, \mu_6 = \mu_2, I_6 = I_2$; X_7 vektör alanı ile $\lambda_7 = \lambda_4, \mu_7 = \mu_4, I_7 = I_4$; son olarak X_8 üreteci için $\lambda_8 = \lambda_2, \mu_8 = \mu_2, I_8 = I_2$ olarak belirlenirler.

3.2 (2) Denklemi İçin Prelle-Singer Metodu

Bu bölümde (2) denklemine Prelle-Singer metodu Bölüm 3.1 de denklemin Lie simetrileri yardımıyla elde edilen λ-simetrileri ile ilişkili olarak uygulanacak olup, (2) denkleminin null formları, integrasyon çarpanları ve ilk integralleri belirlenecektir. (12) ifadesinden S null formunun en genel şekli

$$S = -\frac{\phi}{\dot{y}} = -6 + \frac{4y}{\dot{y}} + \frac{\dot{y}}{y}, \qquad (28)$$

olarak kabul edilebilir [9]. Sonuç 1.de vurgulanan Prelle-Singer ve λ-simetri ilişkisi (22) denkleminin (28) denkleminin eksi işaretlisine eşit olmasıyla gerçeklenir. Fakat daha farklı ve geniş çerçevede integrasyon çarpanı ve ilk integral elde etmek üzere, A, B ve C 'ler y'nin fonksiyonu ve r sabit olmak üzere integrasyon çarpanı olan R fonksiyonu t zaman parametresinden bağımsız olacak şekilde

$$R = \frac{\dot{y}}{(A(y) + B(y)\dot{y} + C(y)\dot{y}^2)^r}, \quad (29)$$

ansatz ile tanımlanabilir. (28) ve (29) denklemleri S ve R'ye bağlı (16)-(18) belirleyici denklemlerine uygulanır ve $\dot{y}$ türev katsayıları ile belirlenen kısmi diferansiyel denklemler çözülürse A, B ve C fonksiyonları bulunur ve α ve β sabit olmak üzere

$$R = \frac{\dot{y}}{\left(\frac{\alpha y(\dot{y}-2y)^2 + \beta(\dot{y}-y)}{y^{1/3}}\right)^{3/2}}, \quad (30)$$

integrasyon çarpanı elde edilir. R ve S kullanılarak (19)-(20) denklemi uygulanmasıyla

$$\bar{I} = \frac{2\,y^{1/3}(\dot{y}-2y)}{\beta\sqrt{\left(\frac{\alpha y(\dot{y}-2y)^2 + \beta(\dot{y}-y)}{y^{1/3}}\right)}}$$

(2) denklemine ait bir ilk integral Prelle-Singer metodu ile elde edilmiş olur. Prelle-Singer metodu ile belirlenen ilk integraller $\bar{I}$ notasyonu ile gösterilmiştir.

Şimdi, Prelle-Singer ve λ-simetri metotları arasındaki ilişki temel alınarak Bölüm 3.1 verilen durumlara göre elde edilen λ-simetrileri ile null form $\lambda = -S$ bağlantıya göre Prelle-Singer metodunun uygulamaları incelenecektir.

Durum 1. (22) denklemi kullanılarak $\lambda_1 = -S_1$ şeklinde alınır. Fakat integrasyon çarpanına karşılık gelen R fonksiyonu için bu defa A ve B t ve y'ye bağlı ve r sabit olmak üzere, ayrıca Sd her durum için null formunun paydasını göstermek üzere

$$R = \frac{Sd}{(A(t,y) + B(t,y)\dot{y})^r}, \quad (31)$$

ansatz ı temel alınarak değerlendirilecektir. Bu durumda S ve R'ye bağlı (16)-(18) belirleyici denklemleri ancak r nin bazı özel değerleri için sağlanmaktadır. Bu durumlar aşağıdaki gibidir:

$r = 3$ olmak üzere elde edilen R ve ilk integral I

$$R_{11} = \frac{y\dot{y}}{(2\alpha y^{5/3} + \alpha\dot{y}y^{2/3})^3},$$

$$\bar{I}_{11} = \frac{y-\dot{y}}{\alpha y(\dot{y}-2y)^2},$$

$r = 3/2$ ye karşılık gelen R ve ilk integral I

$$R_{12} = \frac{y\dot{y}}{(-2\alpha y^{4/3} + \alpha\dot{y}y^{1/3})^{3/2}},$$

$$\bar{I}_{12} = \frac{2y(y-\dot{y})(\dot{y}-2y)}{(\alpha y^{1/3}(\dot{y}-y))^{3/2}}.$$

Durum 2. (25) denklemine göre $\lambda_2 = -S_2$ alınarak ve (31) ifadesi kullanılarak belirlenen R ve ilk integral I

$$R_2 = y(-\frac{1}{4}(2e^{-t}\alpha + e^t\beta)$$

$$+6(2e^{-t}\alpha + e^t\beta))y + (2e^{-t}\alpha + e^t\beta)\dot{y})^{-2},$$

$$\bar{I}_2 = 1/(\alpha\beta + \frac{\beta e^{2t}(2y-\dot{y})}{y-\dot{y}}),$$

şeklinde olur.

Durum 3. $\lambda_3 = -S_3$ olması halinde aynı işlem algoritmalarının yapılmasıyla

$$R_3 = -\mu = y(e^{4\left(\frac{1}{r}-1\right)t}(e^{4t}\beta + \alpha y(\dot{y}-y))^{-r},$$

$$\bar{I}_3 = \frac{e^{4\left(\frac{1}{r}-1\right)t}(e^{4\left(\frac{1}{r}-1\right)t}(e^{4t}\beta + \alpha y(\dot{y}-y))^{1-r}}{\alpha(r-1)},$$

elde edilir.

Durum 4. $\lambda_4 = -S_4$ iken yapılan işlemler sonucunda belirlenen ifadeler bir önceki duruma benzer olarak

$$R_3 = -\mu = y(e^{2\left(\frac{1}{r}-1\right)t}(e^{2t}\beta + \alpha y(\dot{y}-2y))^{-r},$$

$$\bar{I}_3 = \frac{e^{2\left(\frac{1}{r}-1\right)t}\left(e^{2\left(\frac{1}{r}-1\right)t}\left(e^{2t}\beta + \alpha y(\dot{y} - 2y)\right)\right)^{1-r}}{\alpha(r-1)},$$

şeklinde bulunur.

IV. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışma Riemann sıfırlarının spektral realizasyonunu tanımlayan bir model olan özel bir Hamiltonyen denklemine karşılık gelen (2) denkleminin Prelle-Singer ve λ-simetri metotlalarına yönelik uygulamalarını içermektedir. (2) denklemi literatürde yer alan birçok metotla kolayca integre edilebilir, nonlineeritesi çok yüksek olmayan bir denklem olsa da, burada farklı metotlarla daha genel ilk integralleri ve integrasyon çarpanları bulunmuştur. Belirlenen tüm ilk integraller $D_t I = 0$ eşitliğini gerçeklemekte ve (2) denklemini bu şekilde sağlamaktadır. Elde edilen sonuçlar açısından (2) denkleminin λ-simetrileri daha önce literatürde yer almamaktadır ayrıca Prelle-Singer metodu ile belirlenen ilk integraller ve integrasyon çarpanları literatürde denklemle ilgili çalışmalar incelendiğinde oldukça genel formda belirlenmiştir [15-17].

(2) denklemi fiziksel anlamda oldukça önemli olup, Nucci'nin denklemi Lie simetrileri ile değerlendirmesi, aslında [11] de verilen kuantum yaklaşımını Lie simetrileri bakış açısıyla ele almaktır. Bu çalışma fiziksel anlamda literatürde böylesine yer almış (2) denkleminin farklı yaklaşımlarla, literatürden farklı ilk integrallerini ve integrasyon çarpanlarını sunmaktadır.

TEŞEKKÜR

Çalışmayı, dikkatle okuyup, uyarılarda bulunan hakemlere teşekkürü borç bilirim. İstanbul Teknik Üniversitesi doktora sonrası araştırmacı programına da ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

KAYNAKLAR

[1] Bluman, G.W. ve Kumei, S. (1989). Symmetries and Differential Eqautions, Springer-Verlag, New York.

[2] Olver, P.J., (1986). Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag.

[3] Muriel, C. ve Romero, J.L. (2001). New methods of reduction for ordinary differential equations. *IMA Journal of Applied Mathematics,* 66(2), 111-125.

[4] Muriel, C. ve Romero, J.L. (2009). First integrals, integrating factors and symmetries of second order differential equations. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42(36).

[5] Muriel, C. ve Romero, J.L. (2008). Integrating Factors and λ-Symmetries, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics,* 15(3), 300-309.

[6] Gün Polat G. ve Özer, T. (2017). New conservation laws, Lagrangian forms and exact solutions of modified-Emden equation, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics,*12(4), 041001.

[7] Gün G. ve Özer, T. (2013), First integrals, integrating factors and invariant solutions of the path equation based on Noether and λ-symmetries, *Abstract and Applied Analysis,* Article ID 284653.

[8] Gün Polat G. ve Özer, T. (2016). On analysis of nonlinear dynamical systems via methods connected with λ-symmetry, *Nonlinear Dynamics,* 85(3), 1571-1595.

[9] Chandrasekar, V. K., Senthilvelan, M. Lakshmanan, M. (2005). Extended Prelle-Singer method and integrability/solvability of a class of nonlinear n.th order ordinary differential equations, *Journal of Mathematical Physiscs,* 12(1), 184-201.

[10] Mohanasubha, R., Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, M. Lakshmanan, M. (2014). Interplay of symmetries, null forms, Darbou polynomials, integrating factors and Jacobi multipliers in integrable second-order differential equations, *Proc. R. Soc. A*, 470(2163), 20130656.

[11] Berry, M.V. (2008). Three quantum obsessions, *Nonlinearity,* vol. 21, T19-T26.

[12] Berry, M.V. ve Keating, J.P. (1999). $H = xp$ and the Riemann zeros, in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder* ed J P Keating and I V Lerner, Plenum, New York, 355-367.

[13] Berry, M.V. ve Keating, J.P. (2011). A compact hamiltonian with the same asymptotic mean spectral density as the Riemann zeros, *J. Phys. A: Math. Theor.,*44, 285202

[14] Sierre G. ve Rodriguez-Laguna, J. (2011). The $H = xp$ model revisited and the Riemann zeros, *Phys. Rev.Lett.,*106, 200201.

[15] Nucci, M.C. (2014). Spectral realization of the Riemann zeros by quantizing $H = w(x)(p + \frac{\ell_p^2}{p})$: the Lie-Noether symmetry approach, *Journal of Physics,* 482.

[16] Yaşar E. ve Yıldırım, Y. (2015). A procedure on the first integrals of second-order nonlinear ordinary differential equations, *Eur. Phys. J. Plus.,* 130(240).

[17] Yıldırım, Y. (2015). İkinci Mertebe Adi Diferansiyel Denklemlerin İlk İntegralleri, *Yüksek Lisans Tezi,* Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[18] Muriel, C. ve Romero, J.L. (2003). C^∞ symmetries and reduction of equations without Lie point symmetries, *J. Nonliear Math. Phys.*, 13(1), 167-188.

[19] Prelle M. ve Singer, M. (1983). Elementary First Integrals of Differential Equations, *Trans. Am. Math. Soc.,* 279(1), 215-229.

[20] Duarte, L.G.S, Duarte, S.E.S, da Mota, L.A.C.P. (2001). Solving second-order ordinary differential equations by extending the Prelle-Singer method, *Journal of Physics A-Mathematical and General,* 34(14), 3015-3024.