

Harita Projeksiyonları ve Nümerik Analiz

İbrahim Öztuğ BİLDİRİCİ*

Konya Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
iobildirici@ktun.edu.tr

Öz

Harita projeksiyonları problemlerinin çözümünde çeşitli nümerik analiz yöntemlerine gerek duyulur. Doğrusal olmayan denklemlerin iteratif çözümü yaygın kullanılır. Kaynaklarda çok fazla ele alınmamasına rağmen nümerik türevin pratik olarak kullanımı mümkündür. Nümerik türev deformasyon araştırmasında, doğrusal olmayan denklem çözümleri ise ara değişken kullanılan gerçek anlamlı olmayan projeksiyonlarda ve ters projeksiyon uygulamalarında kullanılır. Bu çalışmada yöntemlerin uygulamaları örnekler üzerinde tartışılmış, parametre önerileri yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Harita projeksiyonları, projeksiyon deformasyonları, nümerik analiz

Map Projections and Numerical Analysis

Abstract

There are certain numerical analysis methods that have been used in solving map projection problems. In this study methods such as numerical derivation and solving nonlinear equations are introduced, and their usage possibilities are discussed. Additionally, parameter suggestions, and special numerical approaches are given.

Keywords: Map projections, projection distortions, numerical analysis

1 Giriş

Bu makalede harita projeksiyonlarında uygulanabilecek nümerik analiz konuları tartışılacaktır.

İlk olarak nümerik türev konusu ele alınacak, nümerik türev için harita projeksiyonu uygulamalarında kullanılacak parametrenin değeri analiz edilecektir. Daha sonra kısmi türevlerin sıklıkla kullanıldığı diferansiyel anlamda deformasyon analizi, projeksiyon yüzeyinin eğik olmasında kısmi türevlerdeki değişiklikler incelenip daha sonra nümerik ters projeksiyon uygulamaları ele alınacaktır.

2 Harita Projeksiyonu

Harita projeksiyonları orijinal yüzeydeki (küre ya da elipsoit) bir noktayı harita düzleminde bir noktaya izdüştüren bir fonksiyon çifti ile tanımlanır. Orijinal yüzeyden düzleme izdüşüm düz dönüşüm (forward transformation) olarak da ifade edilir. Burada kapalı bir yüzeyin düzleme dönüşümü söz konusudur.

$$x = x(\varphi, \lambda), \quad y = y(\varphi, \lambda) \quad (1)$$

Bu dönüşümün tersine de (düzlemden orijinal yüzeye) ihtiyaç duyulur. Bu, ters dönüşüm (inverse transformation) olarak da adlandırılır.

$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \lambda = \lambda(x, y) \quad (2)$$

*Sorumlu yazar

Geliş Tarihi:04.02.2019

Kabul Tarihi:06.03.2019

3 Nümerik Türev

Bir fonksiyonun türevinin sayısal değeri gerekli olduğunda türev almaksızın nümerik olarak yaklaşık değeri bulunabilir.

$$f'(x) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad (3)$$

Ya da

$$f'(x) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2t} \quad (4)$$

Burada t yeterince küçük seçilecek bir sayısal değerdir. Türevin geometrik anlamı fonksiyona teğet doğrunun eğimi olduğuna göre nümerik türevde teğet doğruya kesen bir doğru ile yaklaşılmaya çalışılmaktadır. Seçilen t değeri sıfıra yaklaştıkça (3) eşitliği belirsizleşir. Sıfırdan uzaklaştıkça kesen doğru teğet doğrudan uzaklaşır (Şekil 1). Kısmi türevler söz konusu ise;

$$f = f(x, y) \quad (5)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x+t, y) - f(x-t, y)}{2t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f(x, y+t) - f(x, y-t)}{2t} \end{aligned} \quad (6)$$

şeklinde elde edilir. Harita projeksiyonları (1) eşitlikleri ile biliniyorken kısmi türevler sayısal olarak elde edilebilir. Bu şekilde kimi zaman oldukça karmaşık olan fonksiyonların türevleri almaksızın türevlerin sayısal değerleri elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{x(\varphi+t, \lambda) - x(\varphi-t, \lambda)}{2t} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{x(\varphi, \lambda+t) - x(\varphi, \lambda-t)}{2t} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{y(\varphi+t, \lambda) - y(\varphi-t, \lambda)}{2t} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{y(\varphi, \lambda+t) - y(\varphi, \lambda-t)}{2t} \end{aligned} \quad (7)$$

3.1 İrdeleme: Trigonometrik Fonksiyonlar

Türevi hesaplanacak fonksiyonlarda trigonometrik ifadeler geçiyorsa burada t

parametresinin birimi radyan olmalıdır. Örneğin $f(x) = \sin x$ ise ve trigonometrik fonksiyonlarda derece kullanılacak ise,

$$f'(x) = \frac{\sin(x + t \frac{180^\circ}{\pi}) - \sin(x - t \frac{180^\circ}{\pi})}{2t}$$

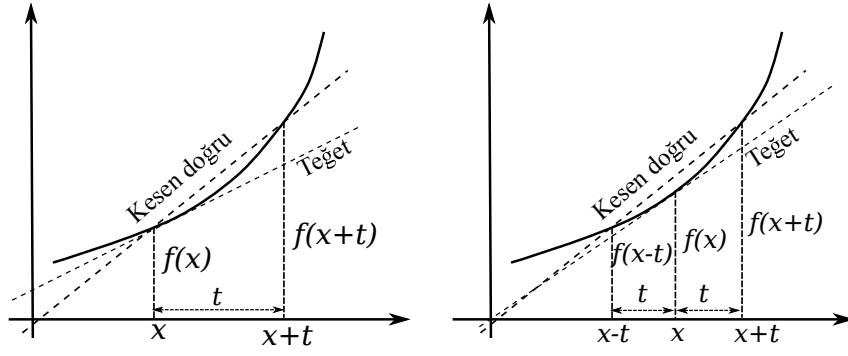
şeklinde hesap yapılmalıdır. Örneğin $t = 10^{-8}$, $x = 30^\circ$ alınırsa $f'(x) = 0.866025407$ bulunur. Türev alıp değerler yerine konulursa $f'(x) = \cos x = 0.866025404$ elde edilir. Bu örnekte nümerik türev olması gereken değerden 10^{-9} kadar büyük olup, olması gereken değere çok yakındır.

En uygun t değeri için belli bir aralıkta nümerik türev türev farklarına bakılabilir. Bu amaçla $-85^\circ, 85^\circ$ aralığında \sin, \cos, \tan fonksiyonlarında nümerik türevin türevden farkı değişik t değerleri için belirlenebilir. Tablo 1, 2, 3'de t değeri küçüldükçe ilgili açı aralığında 1° aralıklarla hesaplanan farkların mutlak değer olarak ortalaması ve en büyük fark görülmektedir.

Tablo 1, 2 ve 3 incelendiğinde en uygun değer $10^{-5}, 10^{-6}$ aralığında olduğu görülmektedir. Burada t değeri küçüldükçe daha uygun bir nümerik türev değerine ulaşılmadığı da görülmektedir.

Tablo 1: Sinüs fonksiyonu için nümerik türev analizi

t	Ortalama fark	Maks. fark
1.00e-02	1.12e-05	1.67e-05
1.00e-03	1.12e-07	1.67e-07
1.00e-04	1.12e-09	1.67e-09
1.00e-05	1.14e-11	2.19e-11
1.00e-06	2.37e-11	8.34e-11
1.00e-07	2.18e-10	9.22e-10
1.00e-08	2.29e-09	8.72e-09
1.00e-09	2.27e-08	8.31e-08
1.00e-10	1.50e-07	5.27e-07
1.00e-11	1.56e-06	5.40e-06
1.00e-12	2.28e-05	8.64e-05
1.00e-13	2.29e-04	7.86e-04
1.00e-14	1.62e-03	5.97e-03



Şekil 1: Nümerik türev

Tablo 2: Kosinüs fonksiyonu için nümerik türev analizi

t	Ortalama fark	Maks. fark
1.00e-02	1.02e-05	1.66e-05
1.00e-03	1.02e-07	1.66e-07
1.00e-04	1.02e-09	1.66e-09
1.00e-05	9.44e-12	2.16e-11
1.00e-06	4.12e-11	1.03e-10
1.00e-07	3.66e-10	9.43e-10
1.00e-08	3.66e-09	9.41e-09
1.00e-09	4.04e-08	1.00e-07
1.00e-10	1.52e-07	5.67e-07
1.00e-11	1.46e-06	5.23e-06
1.00e-12	3.94e-05	1.07e-04
1.00e-13	3.93e-04	1.12e-03
1.00e-14	1.73e-03	5.84e-03

Tablo 3: Tanjant fonksiyonu için nümerik türev analizi

t	Ortalama fark	Maks. fark
1.00e-02	3.07e-02	1.49e+00
1.00e-03	3.05e-04	1.47e-02
1.00e-04	3.05e-06	1.47e-04
1.00e-05	3.05e-08	1.47e-06
1.00e-06	2.98e-10	4.84e-09
1.00e-07	4.07e-09	7.50e-08
1.00e-08	4.30e-08	7.42e-07
1.00e-09	5.60e-07	1.01e-05
1.00e-10	6.47e-07	1.08e-05
1.00e-11	4.60e-06	4.37e-05
1.00e-12	5.89e-04	1.03e-02
1.00e-13	5.39e-03	9.63e-02
1.00e-14	6.36e-03	1.32e-01

3.2 İrdeleme: Hammer Projeksiyonu

Yeryüzünün tamamının gösterimi için kullanılan alan koruyan gerçek anlamda olmayan azimutal bir projeksiyon olan Hammer projeksiyonunda dört kısmi türev de sıfırdan farklıdır. Bu nedenle uygun t parametre değeri ve nümerik türev türeve ne kadar yakınsadığının araştırılması için uygun eşitliklere sahiptir.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R\sqrt{2} \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \\ y &= \frac{2R\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}} \end{aligned} \quad (8)$$

Kısmi türevler ($R = 1$ alınarak):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\sqrt{2} \left(\frac{\sin \varphi \sin \frac{\lambda}{2} (2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})}{(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})^{3/2}} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\cos \varphi (2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}) + \cos \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{2} (1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})^{3/2}} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} (2 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}) + \cos^2 \varphi}{\sqrt{2} (1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})^{3/2}} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{2\sqrt{2} (1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2})^{3/2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Uygun t değeri araştırmak ve nümerik türev türevden sapmalarını belirlemek için $0 \leq \varphi \leq 85^\circ$ $0 \leq \lambda \leq 180^\circ$ aralığında 5° aralıklarla bir veri seti oluşturulmuş, değişen t değerlerinde türev ile nümerik türev farklarının mutlak değer olarak ortalamaları hesaplanmıştır (Tablo 4). Tabloda her

kısmi türev için tüm verilerdeki farkların işaretli ortalamaları ve dört kısmi türev için bulunan ortalama farkların ortalamaları görülmektedir¹. Bu irdelemede en uygun t değerinin 10^{-6} civarında olduğu, nümerik türev değerlerinin ise sekiz basamak doğruluğa ulaştığı görülmektedir. Trigonometrik fonksiyonların sıklıkla kullanıldığı harita projeksiyon eşitlikleri için $t = 10^{-6}$ uygun bir değer olarak öne çıkmaktadır.

4 Projeksiyon Deformasyonları

Harita projeksiyonlarında bir nokta etrafında diferansiyel anlamda oluşan doğrusal ve alansal ölçek değişimlerine ya da alan, açı ve uzunluk değişimlerine deformasyon denir. Eğri yüzeyin (küre ya da elipsoit) düzleme dönüşümü sonucunda şekil bozulmaları kaçınılmazdır. Orijinal yüzeyde bir nokta merkez alınarak çizilecek yarıçapı bir birim kabul edilen sonsuz küçük bir dairenin izdüşümü projeksiyon düzleminde elips şeklindedir. Bu elips, deformasyon elipsi ya da *Tissot Endikatrişi* olarak adlandırılır. Elipsin büyük ve küçük yarı eksenleri ile büyük yarı eksenin yatay koordinat ekseninden yapmış olduğu açı (a, b, γ) endikatriş elemanlarıdır. Elipsin büyük yarı eksenini (a) maksimum uzunluk deformasyonuna, küçük yarı eksenini de minimum uzunluk deformasyonuna (b) karşılık gelir.

Bir harita projeksiyonunda coğrafi ağın izdüşümü ortogonal ise deformasyon elipsi yarı eksenleri meridyen ve paraleller doğrultusunda olur. Bu durumda maksimum ve minimum uzunluk deformasyon yönleri meridyen ve paraleller ile aynı doğrultudadır. Ağın izdüşümü ortogonal değil ise maksimum ve minimum deformasyon doğrultuları meridyen ve paralellerden farklı doğrultudadır.

Herhangi bir doğrultudaki uzunluk deformasyonu ise izdüşüm yüzeyi ve orijinal yüzeydeki diferansiyel uzunlukların oranından elde edilir. Diferansiyel uzunluk elemanları Gauss'un birinci temel biçimi ile ifade edilir. Küreden düzleme herhangi bir projeksiyon

için bu oran aşağıdaki gibidir.

$$m^2 = \frac{\bar{d}s^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \quad (10)$$

$$= \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2}{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}$$

m değeri nokta konumuna ve yöne bağlı olarak değişir. Tissot'a göre bir nokta etrafındaki uzunluk deformasyonunun en büyük ve en küçük olduğu birbirine dik iki doğrultu vardır. Bunlar ana deformasyon yönleri olarak adlandırılır (Bildirici, 2018; Hoschek, 1984).

Coğrafi koordinatlar parametre seçilirse küre yüzeyi için temel büyüklükler aşağıdaki gibidir.

$$E = R^2 \quad F = 0 \quad G = R^2 \cos^2 \varphi \quad (11)$$

Projeksiyon düzleminde orijinal yüzey parametrelerine göre düzenlenmiş Gauss temel büyüklükleri:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$f = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \quad (12)$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

Meridyen ve paraleller yönündeki uzunluk deformasyonları:

$$h = \sqrt{\frac{e}{E}} = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{g}{G}} = \frac{1}{R \cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2} \quad (13)$$

Normal konumlu projeksiyonlarda meridyen ve paralellerin izdüşümü ortogonal ise $f = 0$ olur. Bu durumda ana deformasyon yönleri meridyenler ve paraleller ile çakışık olur. h ve k (10) eşitliğinin en büyük ve en küçük değerlerine eşittir. Bu, özel bir durum olup, genel eşitlikleri elde etmek için (10) eşitliği yöne bağlı düzenlenip türevi sıfıra eşitlenir. Buradan ana deformasyon büyüklükleri (a, b) elde edilir.

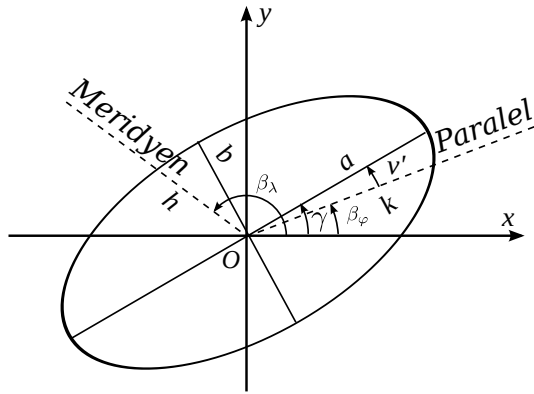
$$K^2 = \frac{1}{a^2} \frac{1}{b^2} = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}$$

$$2H^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{eg - f^2} \quad (14)$$

¹Hesaplamalar yazar tarafından geliştirilen yazılım ile yapılmıştır.

Tablo 4: Hammer projeksiyonunda nümerik türev farkları

t	$\partial x/\partial \varphi$	$\partial x/\partial \lambda$	$\partial y/\partial \varphi$	$\partial y/\partial \lambda$	Genel ort.
1.00E-03	6.58E-08	2.24E-08	1.09E-07	2.48E-09	4.99E-08
1.00E-04	1.50E-08	1.03E-08	1.67E-08	8.58E-10	1.07E-08
1.00E-05	1.54E-08	1.02E-08	1.57E-08	8.43E-10	1.05E-08
1.00E-06	1.54E-08	1.02E-08	1.57E-08	8.50E-10	1.05E-08
1.00E-07	1.54E-08	1.00E-08	1.58E-08	9.76E-10	1.05E-08
1.00E-08	2.05E-08	1.30E-08	1.54E-08	3.55E-09	1.31E-08
1.00E-09	9.70E-08	6.63E-08	5.18E-08	3.41E-08	6.23E-08
1.00E-10	8.22E-07	7.43E-07	4.99E-07	3.43E-07	6.02E-07
1.00E-11	1.04E-05	7.99E-06	5.82E-06	3.63E-06	6.97E-06
1.00E-12	8.59E-05	6.88E-05	5.28E-05	3.43E-05	6.04E-05
1.00E-13	8.63E-04	7.20E-04	4.43E-04	3.36E-04	5.91E-04
1.00E-14	9.38E-03	6.82E-03	5.47E-03	3.18E-03	6.22E-03



Şekil 2: Endikatrik elemanları

$$\frac{1}{a} = H^2 - \sqrt{H^4 - K^2} \quad (15)$$

$$\frac{1}{b} = H^2 + \sqrt{H^4 - K^2}$$

Burada K deformasyon ölçütü, H ise ortalama deformasyon olarak adlandırılır. Alan koruyan projeksiyonlarda $K = 1$, konform projeksiyonlarda $K = H^2$ olur (Hoschek, 1984).

Ana deformasyon doğrultuları meridyen ve paraleller yönünde değil ise endikatriksin büyük ekseninin x ekseninden yaptığı açı için önce paralel izdüşümünün açısı yardımıyla

endikatrik yönü belirlenir (Şekil 2).

$$\tan \beta_\varphi = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

$$\sin v' = \pm \sqrt{\frac{1 - a^2/k^2}{1 - a^2/b^2}} \quad (16)$$

$$\gamma = \beta_\varphi + \text{signum}(f)v'$$

v' açısının işareti projeksiyon düzlemindeki temel büyüklük f 'in işareti ile aynı alınmalıdır (Boùaert vd., 2016; Bildirici, 2016).

Endikatrik elemanları Laskowski yöntemi (Laskowski, 1989) ile de bulunabilir. Burada (1) denklemleri ile tanımlanan dönüşümün doğrusallaştırılmış halini ifade eden \mathbf{A} matrisinin Single Value Decomposition (SVD) yöntemi ile çarpanlara ayrılmasından yararlanır.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

Endikatrik elemanları:

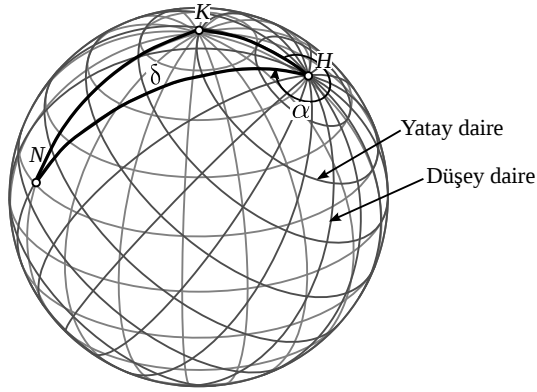
$$a = d_1$$

$$b = d_2 \quad (18)$$

$$\tan \gamma = \frac{u_{21}}{u_{11}}$$

Burada \mathbf{V} matrisinin bir rolü bulunmamaktadır. Alan deformasyonu ve maksimum yön deformasyonu:

$$p = ab \quad (19)$$



Şekil 3: Projeksiyon yüzeyinin eğik konumlu olması

Açı deformasyonu:

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b} \quad w = 2\omega \quad (20)$$

Coğrafi ağın ortogonal olmaması halinde meridyen ve paralellerin arasında oluşan açı ise aşağıdaki eşitlikle bulunur.

$$\sin \Omega = \frac{ab}{hk} \quad (21)$$

Verilen bir nokta ya da noktalar için endikatrix elemanlarının belirlenmesi gerektiğinde de kısmi türevler (7) eşitliklerinden yararlanılarak nümerik olarak da belirlenebilir.

5 Projeksiyon Yüzeyinin Eğik Olması

Projeksiyon yüzeyinin normal konumlu olmaması halinde coğrafi koordinat sisteminin asal noktaya göre (H) döndürülmesi gerekir. Burada asal nokta, normal konumlu projeksiyonlarda kuzey kutup noktası yerine geçen, azimutal projeksiyonlarda düzlemin referans yüzeyine teğet olduğu nokta, silindirik ve konik projeksiyonlarda ise koni/silindir ekseninin projeksiyon yüzeyini deldiği noktadır. Burada coğrafi koordinatlardan, küresel kutupsal koordinatlara geçiş (α , δ) kürede ikinci temel ödev çözümü ile gerçekleştirilir (Şekil 3). İkinci temel ödev çözümü KHN küresel üçgeninin çözümünden başka bir şey değildir. $\Delta\lambda = \lambda_N - \lambda_H$ alınır.

$$\cos \delta = \sin \varphi_H \sin \varphi_N + \cos \varphi_H \cos \varphi_N \cos \Delta\lambda \quad (22)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin(\lambda_N - \lambda_H)}{\cos \varphi_H \tan \varphi_N - \sin \varphi_H \cos \Delta\lambda} \quad (23)$$

Burada elde edilen α , boylam yerine, δ ise kutup uzaklığı ($90^\circ - \varphi$) yerine geçmektedir. Bu büyüklükler normal konumlu eşitliklerde enlem/kutup uzaklığı ve boylam yerine alınarak eğik konumlu projeksiyon uygulamaları gerçekleştirilir.

Asal noktaya göre oluşan koordinat sisteminde meridyenlere karşılık gelen eğriler düşey daire, paralellere karşılık gelen eğrilere de yatay daireler adı verilir.

Eğik konumlu projeksiyonlarda deformasyonların incelenmesi için kısmi türevlerin parametre dönüşümü ile belirlenmesi gerekir. Bu durumda harita projeksiyonunu tanımlayan fonksiyon çiftleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha(\varphi, \lambda), \delta(\varphi, \lambda)) \\ y &= y(\alpha(\varphi, \lambda), \delta(\varphi, \lambda)) \end{aligned} \quad (24)$$

Kısmi türevler aşağıdaki gibi elde edilir ve deformasyon değerlerinin elde edilmesi için kullanılır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (25)$$

Örnek: Eğik konumlu uzunluk koruyan azimutal projeksiyon aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} x &= R\delta \sin \alpha \\ y &= R\delta \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\delta = \arccos(\sin \varphi_H \sin \varphi + \cos \varphi_H \cos \varphi \cos \Delta\lambda)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\sin \Delta\lambda}{\tan \varphi \cos \varphi_H - \sin \varphi_H \cos \Delta\lambda} \right)$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_H$$

Bu eşitliklerde asal nokta keyfi olarak, genellikle projeksiyonun uygulanacağı bölgenin ortasında seçilir. Burada x eksenini asal noktadan geçen meridyenin izdüşümüne çakışık olarak alınmıştır. Kısmi türevler:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta}{\partial \varphi} &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi_H - \sin \varphi \cos \varphi_H \cos \Delta \lambda}{A} \\ \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} &= \frac{\cos \varphi \cos \varphi_H \sin \Delta \lambda}{A} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} &= -\frac{\sin \Delta \lambda \cos \varphi_H}{\cos^2 \varphi (\sin^2 \Delta \lambda + B^2)} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} &= \frac{B \cos(\lambda - \lambda_H) - \sin^2 \Delta \lambda \sin \varphi_H}{\sin^2 \Delta \lambda + B^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{1 - (\sin \varphi_H \sin \varphi + \cos \varphi_H \cos \varphi \cos \Delta \lambda)^2} \\ B &= \tan \varphi \cos \varphi_H - \sin \varphi_H \cos \Delta \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \delta} &= R \sin \alpha, & \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= R \delta \cos \alpha \\ \frac{\partial y}{\partial \delta} &= R \cos \alpha, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -R \delta \sin \alpha\end{aligned}$$

6 Ara Değişken Kullanılan Projeksiyonlar

Gerçek anlamda olmayan silindirik projeksiyonların bazılarında enleme bağlı olarak genellikle kapalı bir fonksiyonla tanımlanan bir ara değişken kullanılır. Kapalı fonksiyonlar söz konusu ise ara değişkenin enleme bağlı olarak bulunması iteratif çözüm gerektirir. Örnek olarak Mollweide projeksiyonunu² ele alalım (Şekil 4).

$$\begin{aligned}x &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R(\lambda - \lambda_0) \cos \theta \\ y &= \sqrt{2} R \sin \theta \\ 2\theta + \sin 2\theta &= \pi \sin \varphi\end{aligned}\quad (26)$$

Burada λ_0 , x ekseninin çakışık alınacağı meridyen (orta meridyen) olup dünya haritalarında genel olarak 0 alınır. θ açısı ise Newton-Raphson iterasyonu ile bulunabilir (Bildirici, 2018; Snyder, 1987). Kapalı eşitlik $f(\theta) = 0$ şeklinde düzenlenirse:

$$\begin{aligned}f(\theta) &= 2\theta + \sin 2\theta - \pi \sin \varphi = 0 \\ f'(\theta) &= 2 + 2 \cos 2\theta\end{aligned}$$

²Alman K.B. Mollweide (1774–1825) tarafından geliştirilmiş yeryüzünün tamamının gösterimi için kullanılan alan koruyan gerçek anlamda olmayan silindirik projeksiyon

iterasyon,

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{f(\theta_i)}{f'(\theta_i)}$$

eşitliğinde ikinci terim yeterince küçük oluncaya kadar devam ettirilir. Başlangıç değeri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\theta_0 = \frac{\pi \sin \varphi - \sin 2\varphi}{2}$$

Çözüm Halley yöntemi ile de yapılabilir (Weissstein, 2019).

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{2f(\theta_i)f'(\theta_i)}{2(f'(\theta_i))^2 - f(\theta_i)f''(\theta_i)}$$

Ya da

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{f(\theta_i)}{f'(\theta_i) - \frac{f(\theta_i)f''(\theta_i)}{2f'(\theta_i)}}$$

Bu tür projeksiyonlarda enleme bağlı kısmi türevler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (27)$$

Kapalı fonksiyonun türevi $f(x, y) = 0$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x, y) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

Burada:

$f'_x(x, y)$: y sabit kabul edilip x e göre alınan türev

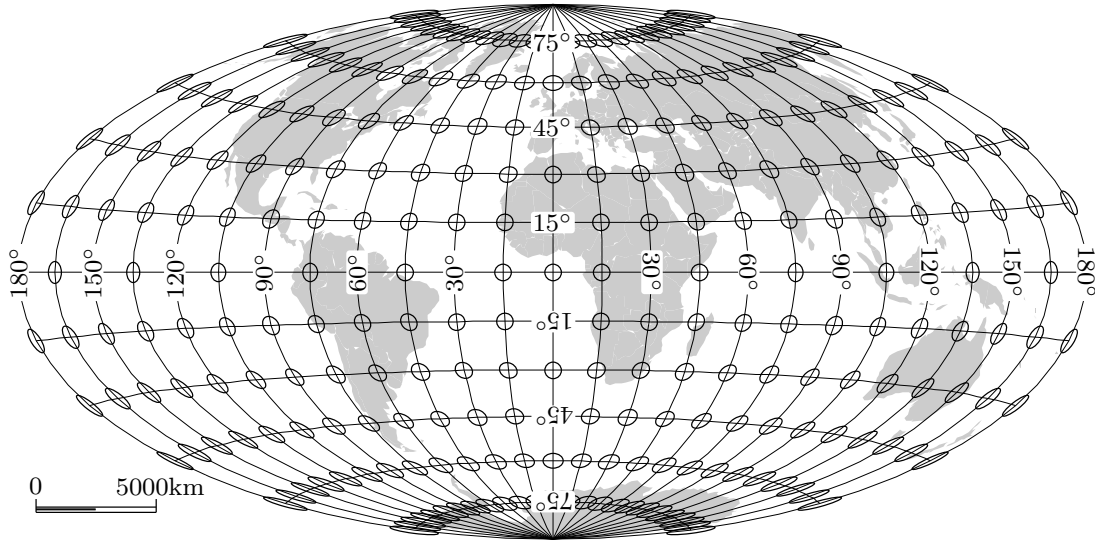
$f'_y(x, y)$: x sabit kabul edilip y e göre alınan türev

Mollweide projeksiyonu için uygulanırsa:

$$\begin{aligned}f(\varphi, \theta) &= 2\theta + \sin 2\theta - \pi \sin \varphi = 0 \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= -\frac{f'_\varphi(\varphi, \theta)}{f'_\theta(\varphi, \theta)} = \frac{\pi \cos \varphi}{2 + 2 \cos 2\theta}\end{aligned}$$

Kısmi türevler:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{-2\sqrt{2}}{\pi} (\lambda - \lambda_0) \sin \theta \frac{\pi \cos \varphi}{2 + 2 \cos 2\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \sqrt{2} \cos \theta \frac{\pi \cos \varphi}{2 + 2 \cos 2\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= 0\end{aligned}$$



Şekil 4: Mollweide projeksiyonunda endikatrix gösterimi ile birlikte dünya

Benzer şekilde çok sayıda gerçek anlamda olmayan silindirik projeksiyon vardır (Daha fazla bilgi için: Uçar vd. (2011), Snyder ve Voxland (1989), Snyder (1993), Bugayevskiy ve Snyder (1995)).

7 Nümerik Ters Projeksiyon

Harita projeksiyonlarında (1) eşitlikleri biliniyorken (2) eşitliklerinin elde edilmesi nümerik olarak gerçekleştirilebilir. Winkel Tripel³ gibi bazı projeksiyonlarda doğrusal olmayan denklemlerin çözümü gerektiğinden yalnızca nümerik yaklaşım mümkündür. Bu amaçla Newton-Raphson yöntemi kullanılabilir (Burden ve Faires, 2001; Yang vd., 1999). Seçilen bir başlangıç değeri çiftine bağlı olarak (φ_0, λ_0) ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} x(\varphi_i, \lambda_i) - x \\ y(\varphi_i, \lambda_i) - y \end{bmatrix} \\ \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \\ \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

olmak üzere iterasyon

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i - \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{F}_i \quad (29)$$

³Oswald Winkel (1873–1953) tarafından 1921’de sunulmuş yeryüzünün tamamının gösterimine yönelik gerçek anlamda olmayan bir projeksiyon

\mathbf{X} matrisinde değişim yeterince küçük oluncaya kadar devam ettirilir. Bilgisayar ortamında `double precision` reel sayı kullanılması halinde maksimum basamak doğruluğuna ulaşmak için iterasyon,

$$\mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{F}_i \leq \begin{bmatrix} 10^{-14} \\ 10^{-14} \end{bmatrix}$$

oluncaya kadar devam ettirilmelidir.

Ters dönüşümde dönüşümü yapılan noktanın orta meridyen ya da Ekvator üzerinde olması gibi özel durumların dikkate alınması gerekir. Örneğin Mollweide projeksiyonu gibi (Şekil 4) gerçek anlamı olmayan silindirik projeksiyonlarda; projeksiyon düzleminde düzlem Kartezyen koordinat ve coğrafi koordinat sistemlerinin orijini çakışık ise, düzlem koordinatlardan birinin sıfır olması durumunda istenen coğrafi koordinatlardan biri de sıfır olacaktır. Bu durumun iterasyon öncesi kontrol edilmesi gerekir.

Bu tür projeksiyonlarda $x = 0, y \neq 0$ ise $\lambda = 0$ olur, enlem ise aşağıdaki belirlenir.

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{y(\varphi_i, 0) - y}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_i} \quad (30)$$

$x \neq 0, y = 0$ ise nokta ekvator üzerindedir ($\varphi = 0$), boylam aşağıdaki belirlenir.

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{x(0, \lambda_i) - x}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_i} \quad (31)$$

İterasyon başlangıç değerlerinin seçimi de önemlidir. İncelenen projeksiyona özgü başlangıç değerleri araştırılabilir. Bir çok projeksiyon için geçerli olabilecek değerler aranır, kuzeydoğu çeyrek küre orta noktasından ($\varphi = 45^\circ, \lambda = 90^\circ$) yararlanılabilir.

Winkel-Tripel projeksiyonu ve diğer bazı gerçek anlamda olmayan silindirik projeksiyonlar için için nümerik ters projeksiyon uygulamalarını İpbüker ve Bildirici (2005) ve İpbüker (2009) ele almıştır.

Nümerik ters projeksiyon nümerik türev ile uygulanabilir. Bu durumda bilgisayar programlama tekniği açısından düz projeksiyon eşitliklerinin kodlanmış olması yeterlidir. Bu şekilde kısmi türevler kolayca hesaplanarak ters projeksiyon nümerik olarak yapılabilir. Bir çok projeksiyon için kodlama yapılan bir programlama çalışmasında ters projeksiyon eşitliklerinin ayrıca kodlanmasına gerek kalmaz. Bildirici (2017) değişik projeksiyonlarda bu yaklaşımın uygulanabilirliğini göstermiştir.

8 Sonuç

Bu çalışmada harita projeksiyonları ile ilgili nümerik analiz konuları uygulamalar eşliğinde ele alınmıştır. Nümerik türevin hangi koşullarda uygulanabilir olduğu irdelenmiş harita projeksiyonları için kullanılacak parametre önerileri yapılmıştır. Projeksiyon yüzeyinin eğik olması ve bir yardımcı değişken ile tanımlanmış projeksiyonlarda deformasyon analizi konusu tartışılmıştır. Son olarak ters projeksiyonun (düzlem koordinatlardan coğrafi koordinatların bulunması) nümerik olarak uygulanması ele alınmıştır.

Kaynaklar

Bildirici, İ. Ö. (2016). Ortogonal olmayan coğrafi ağı harita projeksiyonlarında Tissot endikatrix elemanlarının belirlenmesi. *Harita Dergisi*, (156):13–22.

Bildirici, İ. Ö. (2017). An iterative approach for inverse transformation of map

projections. *Cartography and Geographic Information Science*, 44(5):463–471.

Bildirici, İ. Ö. (2018). *Kartografya: Harita Tasarımı ve Kullanımı için Gerekli Bilim, Sanat ve Teknik*. Atlas Akademi Yayınevi, Konya.

Boùuaert, M. C., Baets, B. D., Vervust, S., Neutens, T., Maeyer, P. D., ve de Weghe, N. V. (2016). Computation and visualisation of the accuracy of old maps using differential distortion analysis. *International Journal of Geographical Information Science*, 30(7):1255–1280.

Bugayevskiy, L. M. ve Snyder, J. (1995). *Map projections: A reference manual*. CRC Press.

Burden, R. L. ve Faires, J. D. (2001). *Numerical analysis*.

Hoschek, J. (1984). *Mathematische Grundlagen der Kartographie*. Bibliographisches Institut, Mannheim.

İpbüker, C. (2009). Inverse transformation for several pseudo-cylindrical map projections using jacobian matrix. *International Conference on Computational Science and Its Applications*. Springer, 553–564.

İpbüker, C. ve Bildirici, İ. Ö. (2005). Computer program for the inverse transformation of the winkel projection. *Journal of Surveying Engineering*, 131(4):125–129.

Laskowski, P. H. (1989). The traditional and modern look at tissot's indicatrix. *The American Cartographer*, 16(2):123–133.

Snyder, J. P. (1987). *Map projections-A working manual*, volume 1395. US Government Printing Office.

Snyder, J. P. (1993). *Flattening the Earth*. University of Chicago Press, Chicago.

Snyder, J. P. ve Voxland, P. (1989). *An Album of Map Projections*. US Geological Survey, Washington DC.

Uçar, D., İpbüker, C., ve Bildirici, İ. Ö. (2011). *Matematiksel Kartografya*. Atlas Yayın Dağıtım, Ankara.

Weissstein, E. W. (2019). Halley's method. <http://mathworld.wolfram.com/HalleysMethod.html>. Giriş: 31.01.2019.

Yang, Q., Snyder, J., ve Tobler, W. (1999). *Map projection transformation: principles and applications*. CRC Press.