Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019, 12(2), 533-542
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2019, 12(2), 533-542
DOI: 10.18185/erzifbed.421048
Research Article

Lebesgue Uzayları Üzerinde Bileşke Operatörler

İbrahim DEĞİRMEN, İlker ERYILMAZ*

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 55200, Atakum-Samsun, TÜRKİYE

Geliş / Received: 04/05/2018, Kabul / Accepted: 13/05/2019

Öz
Bu çalışmada Lebesgue uzayları üzerinde tanımlı bir operatörün bileşke operatör olması için gerekli şartlar ve bileşke operatörlerinin sağladığı bazı özelliklerin gösterilmesi amaçlanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bileşke operatör, Lebesgue uzayı, Radon-Nikodym türevi.

Composition Operators On Lebesgue Spaces

Abstract
In this paper, it is aimed to find necessary conditions for any operator defined on Lebesgue spaces to be a composition operator. Also some properties of these operators will be examined.

Keywords: Composition operator, Lebesgue space, Radon-Nikodym derivative.

1. Giriş

Bileşke operatörleri klasik mekanik, istatiksel mekanik, diferansiyellenebilir dinamik, dağılım teorisi ve dinamik gibi birçok alanda kullanıldığından dolayı birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu operatörler ilk olarak Schroder'in çalışmasında kullanılmıştır (Schroder, 1871). Daha sonra Littlewood'un subordinasyon teorisi çalışmasında kullanılmıştır (Littlewood, 1925).

1930'ların başlarında bileşke operatörleri matematiksel fizik ve klasik mekanik problemlerini çözmek için özellikle Koopman'ın çalışmasında kullanılmıştır (Koopman and Neumann, 1932; Koopman, 1931). O dönemlerde bu operatörlerin adı değişim operatörleri veya dönüşüm operatörleri olarak biliniyordu. Banach bu operatörleri sürekli fonksiyonların Banach uzayları üzerindeki izometrileri tanımlamak için kullanmıştır. 1940'lı ve 1950'li yıllarda bu operatörler Von Neumann ve Halmos'un ergodic dönüşümler çalışmasında kullanılmıştır (Halmos, 1956; Halmos and von Neumann, 1942). 1969 yılında Schwartz ve Ridge sırasıyla uzayları ve uzaylarında bileşke operatörlerini kullanmışlardır. 1972 yılında Singh doktora tezini bileşke operatörleri üzerinde tamamladı. Daha sonra ise Boyd, Caughron, Cima, Kamowitz, Shaprio ve Wogen'in de aralarında bulunduğu bir grup matematikçi tarafından çalışılmasına devam edildi (Boyd, 1974; Caughran and Halmos, 1971; Caughran and Schwartz, 1975; Cima and Wogen, 1974; Cima vd, 1974). 1979 yılında Hilbert uzayı operatörleri üzerine düzenlenen Long Beach Konferans' ında Nodgren tarafından sunulan bir dizi çalışmalar bileşke operatörlerinin araştırılmasına ivme kazandırmıştır (Nordgren, 1978). Bu nedenle 1970'ler bileşke operatörlerinin çalışılması açısından çok verimli bir dönem olmuştur. Singh'in başını çektiği bir grup araştırmacı 1973 yılından itibaren Jammu'da bileşke operatörleri çalışmasına katılmışlardır. Bileşke operatörleri üzerine yapılan

*Sorumlu Yazar: rylmz@omu.edu.tr

sistematik çalışmalar 1980'lerin ortalarına kadar devam etmiştir. Daha sonra ise Kamowitz tarafından sürekli fonksiyonlar uzayında çalışılmaya başlanmıştır (Kamowitz, 1981).

2. Materyal ve Metot

Tanım 2.1: X boştan farklı bir küme ve $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olmak üzere $\Sigma \subset P(X)$ ailesi aşağıdaki şartları sağlasın.

i. $\varnothing, X \in \Sigma$,

ii. $A \in \Sigma$ ise, $X - A \in \Sigma$

iii. Σ içindeki her A_n dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Bu takdirde bu Σ ailesine bir σ-cebiri, (X,Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay ve Σ'nin her elemanına da ölçülebilir küme denir (Bartle, 2014). (X,Σ_1), (Y,Σ_2) ölçülebilir iki uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $S \in \Sigma_2$ için $f^{-1}(S) \in \Sigma_1$ oluyorsa, f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir. (X,Σ) üzerinde tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi $M(X,\Sigma)$ ve negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $M^{+}(X,\Sigma)$ ile gösterilir (Bartle, 2014).

Tanım 2.2: (X,Σ) ölçülebilir uzay ve Σ üzerinde tanımlı $[0,\infty]$ değer kümesine sahip bir μ fonksiyonu

a) $\mu(\varnothing) = 0$

b) Her $E \in \Sigma$ için $\mu(E) \geq 0$

c) İkişer ikişer ayrık ölçülebilir kümelerin oluşturduğu E_n dizisi için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

koşullarını sağlıyorsa μ'ye bir ölçüm denir (Bartle, 2014). (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve T ise X üzerinde bir dönüşüm olsun. Her $S \in \Sigma$ için $\mu(S) = 0$ olduğunda $\mu(T^{-1}(S)) = 0$ oluyorsa T'ye tekil olmayan dönüşüm denir (Singh ve Manhas, 1993).

Tanım 2.3: T, (X,Σ,μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlı ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Eğer hemen hemen her yerde $T_1 \circ T = I$ olacak şekilde bir T_1 ölçülebilir dönüşümü varsa T'ye soldan terslenebilir (birebir) bir dönüşüm denir. Benzer şekilde hemen hemen her yerde $T \circ T_2 = I$ olacak şekilde bir T_2 ölçülebilir dönüşümü varsa T'ye sağdan terslenebilir (örten) bir dönüşüm denir. Eğer T hem sağdan hem de soldan terslenebilir ise T'ye terslenebilir dönüşüm denir ve ölçülebilir bir U dönüşümü için hemen hemen her yerde $(ToU)(x) = (UoT)(x) = I(x)$ dir. (Singh ve Manhas, 1993).

Tanım 2.4: (X,Σ) ölçülebilir uzay, μ ve λ, Σ üzerinde iki ölçüm olsun. Buradan her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) = 0$ olduğunda $\lambda(A) = 0$ oluyorsa λ, Σ üzerinde μ'ye göre mutlak sürekli bir ölçümdür denir ve $\lambda \ll \mu$ ile gösterilir. Bu tanıma göre T tekil olmayan bir dönüşüm ise μT^{-1}, μ' ye göre mutlak sürekli ölçüm olup $\mu T^{-1} \ll \mu$ ile gösterilir. Burada μT^{-1} ölçümü her $S \in \Sigma$ için $(\mu T^{-1})(S) = \mu(T^{-1}(S))$ olarak tanımlıdır (Singh and Manhas, 1993).

Tanım 2.5: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $L^p(X,\Sigma,\mu)$ ile X üzerinde tanımlı ve

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonların ailesi gösterilir (Bartle, 2014). Herhangi bir $f \in L^p(X,\Sigma,\mu)$ için

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu bir norm olup $L^p(X,\mu)$ uzayı bir normlu uzay olur (Bartle, 2014). Gerçel değerli, ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı olan fonksiyonların denklik sınıflarının oluşturduğu uzaya $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ uzayı denir. Herhangi bir $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ için $N \in \Sigma$ olmak üzere $S(N) = \sup\{|f(x)| : x \in X - N\}$ olarak tanımlayalım. O halde

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : N \in \Sigma, \mu(N) = 0\}$$

fonksiyonu bir norm olup, $(L^\infty, \|.\|_\infty)$ bir normlu uzaydır. $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ uzayının elemanlarına esas sınırlı fonksiyonlarda denir. Eğer $f \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ ise hemen hemen her $x \in X$ için $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ dur (Bartle, 2014).

Tanım 2.6: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve $f : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu f fonksiyonunun esas görüntüsü her $\varepsilon > 0$ için

$$ess.im(f) = \{z \in \mathbb{C} : \mu(\{x \in X : |f(x) - z| < \varepsilon\}) > 0\}$$

veya $a \in ess.im(f)$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\mu(f^{-1}(B(a,\varepsilon))) > 0$ olarak tanımlıdır (Rudin, 1974).

Tanım 2.7: μ, $\sigma-$sonlu bir ölçüm ve λ, Σ üzerinde μ' ye göre mutlak sürekli bir ölçüm olsun. Bu takdirde

$$\lambda(S) = \int_S f d\mu \text{ veya } \frac{d\lambda(S)}{d\mu(S)} = f$$

şartını sağlayan negatif olmayan bir $f \in L^1(\mu)$ fonksiyonu vardır ve bu f fonksiyonuna λ'nın μ'ye göre Radon-Nikodym türevi denir (Singh and Manhas, 1993).

3. Bulgular

Tanım 3.1: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve $T : X \to X$ tekil olmayan bir dönüşüm olsun. Bu T dönüşümü $1 \le p \le \infty$ için $L^p(\mu)$ uzayı üzerinde her $f \in L^p(\mu)$ için

$$C_T(f) = f \circ T$$

şeklinde tanımlı bir C_T lineer dönüşümü indirger. Bu $C_T : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ lineer dönüşümünün sürekli olması durumunda bu dönüşüme $L^p(\mu)$ üzerinde T tarafından indirgenen bileşke operatörü denir.

Uyarı 3.2: T'nin tekil olmayan bir dönüşüm olması C_T'nin iyi tanımlı olduğunu söyler. Çünkü T tekil olmayan bir dönüşüm değilse C_T iyi tanımlı olmayabilir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.3: $X = [0,1]$ kümesi üzerinde Lebesgue ölçümü alalım ve $T : X \to X$ dönüşümü için

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & , \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde T tekil olmayan bir dönüşüm değildir. Gerçekten $\mu(\{1\}) = 0$ iken $\mu(T^{-1}(\{1\})) = \mu((\frac{1}{2},1]) = \frac{1}{2} \ne 0$ dır. Ayrıca C_T iyi tanımlı değildir. Çünkü $f = \chi_{[0,1)}$ ve $g = \chi_{[0,1]}$ alınırsa $x = 1$ için $f \ne g$ olup $\mu(\{1\}) = 0$ olduğundan hemen hemen her yerde $f = g$'dir. Fakat hemen hemen her yerde $C_T(f) \ne C_T(g)$'dir. Gerçekten

$$C_T(f) = (f \circ T)(x) = (\chi_{[0,1)} \circ T)(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$C_T(g) = (g \circ T)(x) = (\chi_{[0,1]} \circ T)(x) = \{1 \ , \ 0 \le x \le 1$$

olup $\mu\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \frac{1}{2} \neq 0$ olur. Buradan $C_T(f) \neq C_T(g)$ olur. Dolayısıyla C_T iyi tanımlı değildir. O halde $L^p(\mu)$ üzerinde bir bileşke operatörü indirgemek için T 'nin tekil olmayan bir dönüşüm olması gerekir.

Not 3.4: $L^\infty(\mu)$ uzayında $T : X \to X$ operatörü tekil olmayan bir dönüşüm ise $f \in L^\infty(\mu)$ için $f \circ T \in L^\infty(\mu)$ olup $\|C_T f\|_\infty = \|f \circ T\|_\infty \le \|f\|_\infty$ yazılır. Gerçekten $T(X) \subseteq X$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \|C_T f\|_\infty = \|f \circ T\|_\infty &= es\sup_{x \in X} |(f \circ T)(x)| = es\sup_{x \in X} |f(T(x))| \\ &= es\sup_{u \in T(X)} |f(u)| \le es\sup_{u \in X} |f(u)| = \|f\|_\infty \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla C_T bir daralmadır.

Teorem 3.5: C_T 'nin $L^\infty(\mu)$ üzerinde bir izometri olması için gerek ve yeter koşul μ ve μT^{-1}'in denk yani $\mu \ll \mu T^{-1}$ ve $\mu T^{-1} \ll \mu$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki μ ve μT^{-1} denk olmasın. O halde $\varnothing \neq E \subseteq X$ kümesi için $\mu T^{-1}(E) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\|\chi_E\|_\infty = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(x \in X : |\chi_E| > a) = 0\} = 1$ olur. Fakat

$$\|C_T \chi_E\|_\infty = \left\|\chi_{T^{-1}(E)}\right\|_\infty = \inf\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(x \in X : \left|\chi_{T^{-1}(E)}\right| > a) = 0\right\} = 0$$

olduğundan $\|C_T \chi_E\|_\infty \neq \|\chi_E\|_\infty$ elde edilir. Buradan C_T bir izometri değildir. Dolayısıyla istenen elde edilir. Aksine, kabul edelim ki $\mu \ll \mu T^{-1}$ ve $\mu T^{-1} \ll \mu$ olsun. $\mu T^{-1} \ll \mu$ ise $\|C_T f\|_\infty \le \|f\|_\infty$ eşitsizliği Not 3.4'ten açıktır. $\mu \ll \mu T^{-1}$, yani her $S \in \Sigma$ için $\mu T^{-1}(S) = 0$ olduğunda $\mu(S) = 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \left\{a \in \mathbb{R} : \mu T^{-1}(x \in X : |f(x)| > a) = 0\right\} &= \left\{a \in \mathbb{R} : \mu(T^{-1}(x) \in X : |f(x)| > a) = 0\right\} \\ &= \left\{a \in \mathbb{R} : \mu(x \in T(X) : |f(x)| > a) = 0\right\} \end{aligned}$$

$x \in T(X)$

ise $x = T(u)$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Buradan

$$\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(u \in X : |f(T(u))| > a) = 0\right\} \subseteq \left\{a \in \mathbb{R} : \mu(x \in X : |f(x)| > a) = 0\right\}$$

olup her iki tarafın infimumu alınırsa

$$\inf\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(x \in X : |f(x)| > a) = 0\right\} \le \inf\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(u \in X : |f(T(u))| > a) = 0\right\}$$

elde edilir. Buradan $\|f\|_\infty \le \|C_T f\|_\infty$ dir. Dolayısıyla C_T bir izometridir

Uyarı 3.6: T 'nin tekil olmayan bir dönüşüm olması $1 \le p < \infty$ için $L^p(\mu)$ uzayı üzerinde bir bileşke operatörünü indirgemek için tek başına yeterli değildir. $X = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde Lebesgue ölçümü alalım ve her $x \in \mathbb{R}$ için $T(x) = e^x$ olsun. Buradan T tekil olmayan bir dönüşümdür. Ancak $C_T f \notin L^p(\mathbb{R})$ dir. Gerçekten $f = \chi_{[0,1]}$ alınırsa her $x \in X$ için

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{[0,1]} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{[0,1]^c} |f(x)|^p d\mu(x) = 1 + 0 = 1 < \infty$$

olup $f \in L^p(\mathbb{R})$ olur. Fakat $C_T f = f \circ T = \chi_{[0,1]} \circ T = \chi_{[-\infty,0]}$ olup

$$\|C_T f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |(\chi_{[-\infty,0]}(x))|^p d\mu(x) = \int_{-\infty}^{0} 1^p d\mu(x) = \infty$$

olur. Dolayısıyla $C_T f \notin L^p(\mathbb{R})$ elde edilir.

Teorem 3.7: (X, Σ, μ) bir σ-sonlu ölçüm uzayı ve $T : X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Bu takdirde T 'nin $L^p(\mu)$ üzerinde bir C_T bileşke operatörü indirgemesi için gerek ve yeter koşul her $S \in \Sigma$ ve $b > 0$ için $\mu T^{-1}(S) \le b\mu(S)$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki C_T, T tarafından indirgenen bir bileşke operatör olsun. O zaman $C_T : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ sürekli bir lineer dönüşüm olur. $\mu(S) < \infty$ olan bir $S \in \Sigma$ için

$$\|\chi_S(x)\|_p^p = \int_X |\chi_S(x)|^p d\mu(x) = \int_S |\chi_S(x)|^p d\mu(x) + \int_{S^c} |\chi_S(x)|^p d\mu(x) = \mu(S) < \infty$$

olduğundan $\chi_S \in L^p(\mu)$ olur. Ayrıca $C_T \chi_S = \chi_{T^{-1}(S)}$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\mu T^{-1}(S) = \left\|\chi_{T^{-1}(S)}\right\|_p^p = \|C_T(\chi_S)\|_p^p \le \|C_T\|_p^p \|\chi_S\|_p^p = \|C_T\|_p^p \mu(S)$$

yazılır. $b = \|C_T\|_p$ alınırsa $\mu T^{-1}(S) \le b\mu(S)$ olur. $\mu(S) = \infty$ olması durumunda eşitsizlik açıktır.

Tersine, $b > 0$ olmak üzere her $S \in \Sigma$ ve $\mu T^{-1}(S) \le b\mu(S)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\mu(S) = 0$ iken, $\mu T^{-1}(S) = 0$ olur. Dolayısıyla $\mu T^{-1} \ll \mu$ olup buradan μT^{-1}'in, μ' ye göre Radon-Nikodym türevi ortaya çıkar ve

$$\mu T^{-1}(S) = \int_S f_T d\mu \le b\mu(S) = b\int_S 1 d\mu = \int_S b d\mu$$

olup hemen hemen her yerde $f_T \le b$ olur. Şimdi herhangi bir $f \in L^p(\mu)$ alalım. Buradan her $x \in X$ için $T(x) = u$ dönüşümü yapılır ve $d\mu T^{-1} = f_T d\mu$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\|C_T(f(x))\|_p^p = \int_X |(f\circ T)(x)|^p \, d\mu(x) = \int_X |(f(T(x))|^p \, d\mu(x)$$
$$= \int_X |f(u)|^p \, d\mu T^{-1}(u) = \int_X |f(u)|^p \, f_T d\mu(u) \le b\|f\|_p^p$$

elde edilir. Bu ise C_T 'nin $L^p(\mu)$ üzerinde sınırlı bir operatör olduğunu söyler.

Yukarıdaki teorem bize $L^p(\mu)$ üzerinde bir bileşke operatörü indirgeyen T dönüşümü μT^{-1}'in mutlak sürekliliğini ve onun Radon-Nikodym türevi olan f_T'yi karakterize etmeye yardımcı olmuştur. Eğer bir operatör bileşke operatör ise $L^p(\mu)$'deki karakteristik fonksiyonları alıp yine karakteristik fonksiyonlara götürür. Bu durum

$$(C_T\chi_S)(x) = (\chi_S \circ T)(x) = \chi_S(T(x)) = \begin{cases} 1 \ , & T(x)\in S \\ 0 \ , & T(x)\notin S \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 \ , & T(x)\in S \\ 0 \ , & T(x)\notin S \end{cases} = \begin{cases} 1 \ , & x\in T^{-1}(S) \\ 0 \ , & x\notin T^{-1}(S) \end{cases}$$
$$= \chi_{T^{-1}(S)}(x)$$

olduğundan açıktır.

Sonuç 3.8: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı olsun. $T: X\to X$ ölçülebilir dönüşümünün $1\le p<\infty$ için $L^p(\mu)$ üzerinde C_T bileşke operatörü indirgemesi için gerek ve yeter koşul $\mu T^{-1} \ll \mu$ ve $f_T\in L^\infty(\mu)$ olmasıdır. Bu durumda $\|C_T\|_p = \|f_T\|_\infty^{\frac{1}{p}}$ dir.

Örnek 3.9: $X=\mathbb{R}$ üzerindeki ölçüm Lebesgue ölçümü ve T', T 'nin türevi olmak üzere $\frac{1}{T'}$ esas sınırlı olacak şekilde T monoton bir fonksiyon olsun. O zaman C_T, $L^p(\mathbb{R})$ üzerinde sürekli bir operatördür. Özel olarak $a>0$ ve $T(x)=ax$ alınırsa C_T, $L^p(\mathbb{R})$ üzerinde bir bileşke operatörüdür.

Çözüm: Herhangi bir $f\in L^p(\mathbb{R})$ ve $\|C_T\|_p = \sup_{\|f\|_p\le 1}\|C_T f\|_p$ göz önüne alınırsa

$$\|C_T f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |(f\circ T)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(T(x))|^p dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |f(T(x))|^p \frac{T'(x)}{T'(x)} dx$$

olur. Burada $T(x)=u$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_{\mathbb{R}} |f(T(x))|^p \frac{T'(x)}{T'(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{T'(x)} |f(u)|^p du \le \left\|\frac{1}{T'}\right\|_\infty \|f\|_p^p < \infty$$

Olup $\|C_T\|_p^p \le \frac{1}{\|T'\|_\infty}$ yazılır. Özel olarak $T(x)=ax$ alınırsa

$$\|C_T f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |(f\circ T)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(T(x))|^p dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |f(ax)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p \frac{du}{a}$$
$$= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p du < \infty$$

olup $C_T f \in L^p(\,)$ elde edilir.

Tanım 3.10: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı, $Y \subset X$ ve $T: Y \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $f \in L^p(\mu)$ için

$$C_T(f) = \begin{cases} f(T(x)) \ , & x \in Y \\ 0 \ , & x \in X - Y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. C_T 'nin $L^p(\mu)$ üzerinde sürekli olması durumunda bu operatöre T ve Y tarafından indirgenen genelleştirilmiş bileşke operatörü denir. Açıktır ki $Y = X$ alınırsa her bileşke operatörü genelleştirilmiş bileşke operatörüdür.

(X,Σ,μ) bir σ-sonlu ölçüm uzayı olmak üzere ölçülebilir kümelerin bir σ-cebiri Σ ailesi simetrik fark ve arakesit cebirsel işlemleri altında bir halkadır. $\Im = \{S \in \Sigma \mid \mu(S) = 0\}$ olmak üzere $\Im$, Σ halkasının bir idealidir. Σ Boolean halkası olduğundan $\Sigma/\Im$ bölüm halkası da bir Boolean halkasıdır. $h: \Sigma \to \Sigma$ dönüşümü simetrik fark, arakesit, sayılabilir toplamsallık ve maksimal eleman işlemlerini korursa bu dönüşüme σ-endomorfizması denir. Σ üzerindeki her σ-endomorfizması $\Sigma/\Im$ üzerinde bir h' σ-endomorfizması doğurur ve $h'(S\Delta\Im) = h(S)\Delta\Im$ olarak tanımlanır. $T: X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm ise $h_T(S) = T^{-1}(S)$ ile tanımlı $h_T: \Sigma \to \Sigma$ dönüşümü bir σ-endomorfizmasıdır; dolayısıyla h_T' $\Sigma/\Im$ üzerinde bir σ-endomorfizmasıdır. O halde her ölçülebilir dönüşüm Σ ve $\Sigma/\Im$ üzerinde bir σ-endomorfizması indirger. Daha genel bir ifadeyle (X',Σ',μ') bir ölçüm uzayı ve $T: X' \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm ise bu dönüşüm $h_T: \Sigma \to \Sigma'$ ve $\Im'$, Σ' σ-cebirinde sıfır ölçümlü kümelerin ideali olmak üzere $h_T': \Sigma/\Im \to \Sigma'/\Im'$ σ-endomorfizması indirger.

Teorem 3.11: (X,Σ,μ) standart Borel uzayı, σ bir ölçüm uzayı ve $\phi: (X,\Sigma,\mu) \to (X',\Sigma',\mu')$ bir σ-endomorfizması olsun. Bu takdirde $\phi = h_T'$ olacak şekilde $T: X' \to X$ bir ölçülebilir dönüşümü vardır.

Aşağıdaki teoremde K ile Σ σ-cebirinin tüm karakteristik fonksiyonları temsil etmek üzere yani $\mathrm{K} = \{\chi_S : S \in \Sigma\}$ olmak üzere $\mathrm{K}^p = \mathrm{K} \cap L^p(\mu)$ olarak alınacaktır.

Teorem 3.12: (X,Σ,μ) standart Borel uzayı ve A, $L^p(\mu)$ üzerinde bir operatör olsun. A 'nın bir (genelleştirilmiş) bileşke operatörü olması için gerek ve yeter koşul K^p 'nin A altında değişmez sabit kalmasıdır. Yani $A\mathrm{K}^p \subseteq \mathrm{K}^p$ dir.

İspat: Kabul edelim ki A, $L^p(\mu)$ üzerinde bir (genelleştirilmiş) bileşke operatör olsun. O halde $Y \in \Sigma$ için $A = C_T$ olacak şekilde bir $T: Y \to X$ ölçülebilir dönüşümü vardır. $\chi_S \in \mathrm{K}^p$ için $A\chi_S \in L^p(\mu)$ olur. Dolayısıyla $A\chi_S \in AK^p$ dir. Ayrıca

$$A\chi_S = C_T\chi_S = \chi_S \circ T = \begin{cases} 1 \ , & T(x) \in S \\ 0 \ , & T(x) \notin S \end{cases} = \begin{cases} 1 \ , & x \in T^{-1}(S) \\ 0 \ , & x \notin T^{-1}(S) \end{cases} = \chi_{T^{-1}(S)}$$

olup T 'nin ölçülebilir olması dikkate alınırsa $A\chi_S \in \mathrm{K}^p$ elde edilir. Dolayısıyla $A\mathrm{K}^p \subseteq \mathrm{K}^p$'dir. Tersine, kabul edelim ki $A\mathrm{K}^p \subseteq \mathrm{K}^p$ ve $\mu(S) < \infty$ olacak şekilde $S \in \Sigma$ olsun. Buradan $\chi_S \in \mathrm{K}$ ve

$$\|\chi_S\|_p^p = \int_X |\chi_S|^p \, d\mu = \int_S |\chi_S|^p \, d\mu + \int_{S^c} |\chi_S|^p \, d\mu = \mu(S) < \infty$$

olup $\chi_S \in L^p(\mu)$ elde edilir. O halde $\chi_S \in K^p$ elde edilir. $A\chi_S \in AK^p \subseteq K^p$ olup $A\chi_S \in K^p$'dir. Bu takdirde $\mu(W) < \infty$ için $A\chi_S = \chi_W$ olacak şekilde $W \in \Sigma$ vardır. Şimdi $\phi_0(S) = W$ olsun. Buradan ϕ_0 sonlu ölçüme sahip kümelerin birleşimi üzerinde tanımlanır. S_1 ve S_2 sonlu ölçüme sahip ayrık iki küme olmak üzere bileşke operatörünün lineer olması dikkate alınırsa

$$A(\chi_{S_1 \cup S_2}) = A(\chi_{S_1} + \chi_{S_2}) = A\chi_{S_1} + A\chi_{S_2} = \chi_{W_1} + \chi_{W_2}$$

olup $\mu(W_1 \cap W_2) = 0$ ve $\phi_0(S_1 \cup S_2) = \phi_0(S_1) \cup \phi_0(S_2)$ dir. Ayrıca X, σ-sonlu ölçüm olduğundan $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ olacak şekilde sonlu ölçüme sahip ve ikişerli ayrık bir $\{S_i\}$ dizisi vardır. Kabul edelim ki $X_i = \phi_0(S_i)$ yani $i \in \mathbb{N}$ için $A\chi_{S_i} = \chi_{X_i}$ ve $X' = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ olsun. Herhangi bir $S \in \Sigma$ için $\phi_0(S) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi_0(S \cap S_i)$ olarak tanımlanır. Σ', X'nün ölçülebilir alt kümelerinin σ-cebiri olmak üzere $\phi_0 : \Sigma \to \Sigma'$ bir σ-homomorfizmasıdır. Bu σ-homomorfizması $\phi(S \Delta \Im) = \phi_0(S) \Delta \Im'$ olacak şekilde $\phi : \Sigma/\Im \to \Sigma'/\Im'$ bir σ-homomorfizmasını doğurur. Teorem 3.11'den $\phi = h_T'$ olacak şekilde bir $T : X' \to X$ ölçülebilir dönüşümü vardır. Eğer $\mu(S) < \infty$ ise $A(\chi_S) = \chi_{T^{-1}(S)} = C_T \chi_S$ olup A ve C_T, K^p üzerinde dolayısıyla $L^p(\mu)$ üzerinde çakışırlar. Buradan $A = C_T$ olup teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.13: (X, Σ, μ) standart Borel uzayı olsun. Bu takdirde A'nın $L^p(\mu)$ üzerinde bir (genelleştirilmiş) bileşke operatörü olması için gerek ve yeter koşul her f, g ve $f.g \in L^p(\mu)$ için $A(f.g) = A(f).A(g)$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki A, $L^p(\mu)$ üzerinde bir genelleştirilmiş bileşke operatörü olsun. Bu takdirde $A = C_T$ olacak şekilde bir $T : Y \to X$ dönüşümü vardır. Her $f, g \in L^p(\mu)$ için

$$\begin{aligned} A(f.g) &= C_T(f.g) = (f.g)(T(x)) = f(T(x))g(T(x)) \\ &= C_T(f)C_T(g) = A(f).A(g) \end{aligned}$$

elde edilir. Aksine, $\chi_S \in K^p$ alalım. Buradan $A\chi_S \in AK^p$ olduğu açıktır. Ayrıca $\chi_S \in K^p$ ise $\chi_S \in K$ ve $\chi_S \in L^p(\mu)$ dir. O zaman $S \in \Sigma$ için $\mu(S) < \infty$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \|\chi_S{}^2\|_p^p &= \int_X |\chi_S{}^2|^p d\mu = \int_X |\chi_S \chi_S|^p d\mu = \int_X (|\chi_S|^p . |\chi_S|^p) d\mu \\ &= \int_S (|\chi_S|^p . |\chi_S|^p) d\mu + \int_{S^c} (|\chi_S|^p . |\chi_S|^p) d\mu = \mu(S) = \|\chi_S\|_p^p \end{aligned}$$

olup $\chi_S^2 = \chi_S$ dir. Ayrıca $A(\chi_S) = A(\chi_S{}^2) = A(\chi_S \chi_S) = A(\chi_S).A(\chi_S) = (A(\chi_S))^2$

elde edilir. O halde $A\chi_S \in K$ olup $A\chi_S \in K^p$ olur. Dolayısıyla $AK^p \subseteq K^p$'dir. Teorem 3.12'ten A, $L^p(\mu)$ üzerinde bir genelleştirilmiş bileşke operatörüdür.

Not 3.14: Teorem 3.12'den açıktır ki $AK^p \subseteq K^p$ ve $X' = X$ alınırsa A, $L^p(\mu)$ üzerinde genelleştirilmiş bileşke operatörü yerine bir bileşke operatörüdür. Eğer $AK^p \subseteq K^p$ koşulu ile A birebir bir operatör ise $X' = X$ olup A bir bileşke operatörüdür.

4. Sonuç

Bu çalışmada $T: X \to X$ ölçülebilir bir dönüşüm olmak üzere $1 \le p \le \infty$ için uzayı $L^p(\mu)$ üzerinde C_T bileşke operatörü tanımlandı. Bu operatörün $L^p(\mu)$ uzayına genellemesi yapılırken hangi şartların sağlaması gerektiği irdelendi. Bu çalışmada yapılanlar ağırlıklı Lebesgue $L_w^p(\mu)$ uzaylarında ağırlıklı bileşke operatörlerinin özellikleri olarak incelenebilir. Yine ağırlıklı Lebesgue $L_w^p(\mu)$ uzaylarında Lambert tipi bileşke operatörler ve bunların ağırlıklı uzaylarında indirgenebilirliği incelenebilir. Ağırlıklar değiştirilerek Lebesgue uzaylarında tanımlanan ağırlıklı bileşke operatörleri incelenebilir. Ayrıca Orlicz uzayı, Orlicz-Lorentz uzaylarında da bu operatörlerin özelliklerini sağlayıp sağlamadığı araştırılabilir. Ölçülebilir yerine zayıf veya kuvvetli ölçülebilir fonksiyonlar uzaylarında da ağırlıklı bileşke operatörlerinin özelliklerine bakılabilir.

5. Kaynaklar

Bartle R. G. (2014). The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sons,

Boyd D. M. (1974). Composition operators on the Bergman space and analytic function spaces on the annulus. University of North Carolina at Chapel Hill

Caughran J. G. and Halmos P. (1971). Polynomial approximation and spectral properties of composition operators on H 2. Indiana University Mathematics Journal, 21(1): 81-84

Caughran J. G. and Schwartz H. J. (1975). Spectra of compact composition operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 51(1): 127-130

Choksi J. (1966). Unitary operators induced by measure preserving transformations. Journal of Mathematics and Mechanics, 16(1): 83-100

Cima J. and Wogen W. (1974). On algebras generated by composition operators. Canad. J. Math, 26: 1234-1241

Cima J. A., Thomson J. and Wogen W. (1974). On some properties of composition operators. Indiana University Mathematics Journal, 24(3): 215-220

Halmos P. R. (1956). Lectures on ergodic theory. American Mathematical Soc.,

Halmos P. R. and von Neumann J (1942). Operator methods in classical mechanics, II. Annals of Mathematics: 332-350

Harrington, D. J. and Whitley, R. (1984). Seminormal composition operators. Journal of Operator Theory, 125-135.

Johnson R. A. (1970). Atomic and nonatomic measures. Proceedings of the American Mathematical Society, 25(3): 650-655

Kamowitz H. (1981). Compact weighted endomorphisms of Proceedings of the American Mathematical Society, 83(3): 517-521

Kaptanoglu,T.(2003) Dinamik Sistemler, Garip Çekerler ve Kaos.

Kızmaz H. (1993). Fonksiyonel Analize Giriş. Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi, Trabzon

Koopman B. and Neumann J. v (1932). Dynamical systems of continuous spectra. Proceedings of the National Academy of Sciences, 18(3): 255-263

Koopman B. O. (1931). Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space. Proceedings of the National Academy of Sciences, 17(5): 315-318

Littlewood J. E. (1925). On inequalities in the theory of functions. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1): 481-519

Nordgren E. A. (1968). Composition operators. Canad. J. Math, 20: 442-449

Nordgren E. A. (1978). Hilbert space operators. Springer, 37-63.

Rudin W. (1987). Real and complex analysis. Tata McGraw-Hill Education,

Rynne B. P. and Youngson M. A. (2000). Linear functional analysis. Springer Science and Business Media,

Singh, R. K. (1975). Normal and Hermitian composition operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 47(2), 348-350.

Singh, R. K. (1976a). Composition operators induced by rational functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 59(2), 329-333.

Singh R.K. (1976b). İnvertible composition operators on . Proceedings of the American Mathematical Society, 56: 1, 127-129.

Singh, R. K. and Kumar, A. (1977). Multiplication operators and composition operators with closed ranges. Bull. Austral. Math. Soc, 16, 247-252.

Singh, R. K., and Kumar, A. (1978). Characterizations of invertible, unitary, and normal composition operators. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 19(1), 81-95.

Singh, R. K. and Kumar, A. (1979). Compact composition operators. Journal of the Australian Mathematical Society, 28(3), 309-314.

Singh R. K. and Manhas J S (1993). Composition operators on function spaces, North-Holland Mathematics Studies, 179.