Trakya Eğitim Dergisi
Cilt 9, Sayı 3
Eylül 2019, 396-414

ISSN: 2630-6301

Trakya Journal of Education
Volume 9, Issue 3
September 2019, 396-414

Geliş Tarihi: 14.08.2018

Doi: 10.24315/ tred.453416

Yayına Kabul Tarihi: 18.09.2019

Araştırma Makalesi

Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Sabit Değişen Şekil Örüntüsü Genellemesini Öğretmek İçin Matematik Bilgileri[1]

Pre-Service Middle School Mathematics Teachers' Mathematical Knowledge For Teaching Linear Growth Figural Pattern Generalization

Dilek GİRİT YILDIZ[2], Funda GÜNDOĞDU ALAYLI[3]

Öz: Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme ile ilgili hem kendi bilgilerini hem de öğrenciler hakkında bilgilerini ortaya koymak, kavramsal bilgiye sahip olan öğretmenler yetiştirmek için ilk aşama sayılabilir. Bu amaçla bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının örüntü genellemesi hakkındaki konu alan ve pedagojik alan bilgileri incelenmiştir. Nitel araştırma tasarımı kapsamında, 26 öğretmen adayına sabit değişen şekil örüntüsü problemi ve bu problemle ilişkili olarak açık uçlu sorular sorulmuştur. Elde edilen veriler, Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen "Öğretmek için Matematiksel Bilgi (ÖMB)" modeli kullanılarak içerik analizi ile incelenmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının tümünün örüntüyü cebirsel olarak doğru genelleyebildiklerini ortaya koymuştur. Çoğunun genellemeye ulaşırken sayısal akıl yürütme kullandığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının, öğrencilerin problem çözme konusundaki bilgilerinin, genellikle kendi çözüm yöntemlerine dayandığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının, öğrencilerin yaşayabileceği zorluk ve kavram yanılgılarına yönelik tahminleri oldukça sınırlıdır. Dolayısıyla bunları gidermek için yaptıkları öneriler de yetersiz kalmıştır. Bulgulara dayanarak, öğretmen adaylarını yetiştirmeye yönelik öneriler yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: *Ortaokul matematik öğretmen adayları, öğretmek için matematik bilgisi, konu alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, şekil örüntüsü, cebirsel genelleme.*

Abstract: Revealing pre-service teachers' knowledge of algebra and their knowledge about students' algebraic thinking could be the first step to educate teachers who would have conceptual knowledge. In this study, pre-service middle school mathematics teachers' knowledge of pattern generalization was examined. 26 pre-service teachers were asked a linear growth figural pattern problem. Data were analyzed by content analysis using the "Mathematical Knowledge for Teaching" model developed by Ball, Thames and Phelps (2008). The findings revealed that all pre-service teachers could generalize the pattern algebraically correctly. Most of pre-service teachers used numerical reasoning while reaching generalizations. Pre-service teachers' knowledge of students' problem solving were often based on their own solution methods. Pre-service teachers had very limited predictions for difficulties and misconceptions that students may have. Therefore, the suggestions they made to remedy them were also insufficient. Based on findings, suggestions were made in order to improve pre-service teacher education.

Keywords: *Pre-service middle school mathematics teachers, mathematical knowledge for teaching, subject matter knowledge, pedagogical content knowledge, figural pattern, generalization*

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Examining teachers' knowledge can be valuable for mathematics teacher education programs and if teachers have misconceptions and lack of knowledge about algebra, teacher educators can design their programs and method courses with the aim of developing prospective teachers' knowledge of algebra. Actually, mathematics teacher educators indicated that teachers need to have conceptual and connected knowledge about algebra to support students' learning of algebra. However, the suggestions on how to develop the teachers' knowledge by educators are scarce. At that point, the current study could reveal existing pre-service middle school mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge in order to determine what their lack of was and so that to make suggestions for developing pre-service teachers' knowledge.

In this study, Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model by Ball, Thames, and Phelps (2008) was used to examine the knowledge of pre-service teachers. This model is preferred for this

[1] Bu çalışma, 12th International Balkan Education and Science Congress'de bildiri olarak sunulmuştur.

[2] Dr. Öğr. Üys. Trakya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü / E-mail:dilekgirit@trakya.edu.tr
ORCID: 0000-0003-3406-075X

[3] Dr. Öğr. Üys. Trakya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü / E-mail:fundagundogdu@trakya.edu.tr
ORCID: 0000 0002 0382 9610

study, since MKT model is a specific and detailed model of mathematics, and thus it could give rich and meaningful information about pre-service teachers' knowledge.

Methodology

The aim of this study is to reveal pre-service teachers' knowledge of generalization of linear growth figural pattern. To this end, this research question is framed, "what is the nature of pre-service teachers' knowledge of generalization of linear growth figural pattern?". In this study, qualitative research design was used. This research was carried out with 26 pre-service teachers at 3rd grade of mathematics education training in a public university. For the selection of these participants, convenient sampling method was used to provide the accessibility to them. The participants took "Methods of Mathematics Teaching" courses. They learnt methods and techniques related pattern generalization in the context of algebra learning domain.

A linear figural pattern which was suggested using in teaching pattern generalization by researchers was used in this study (Figure 2). Four open-ended questions related to this pattern generalization were asked to the participants. These questions were formed based on Ball et al.'s (2008) MKT model. In the first question, pre-service teachers were asked to solve this problem. The answer to this question is expected to show their Common Content Knowlegde (CCK). In the second question, "How can a middle school student begin to solve this question?" With this question, it was aimed to obtain the pre-service teachers' knowlegde of students' thinking (Knowledge of Content and Students). In the third question, "What are possible difficulties or misconceptions of the students in solving of this problem?" Again with this question, the teacher candidates were focused on the students' knowledge. In the fourth question, "What can you do as a teacher when you encounter with your suggested difficulties or misconceptions? (strategy, notation, material, etc.) ". With this question, it is expected to focus on pre-service teachers' Knowledge of Content and Teaching. For data analysis, an explanation which was thought to be meaningful in itself, namely a sentence or a paragraph, and the notations related to the solutions were considered as codes. In this context, content analysis was used for analysis.

Findings

In the first question, all pre-service teachers (PSTs) could generalize the pattern algebraically correctly. Most of the participants (65%) only focused on the number of chairs, and so that the difference between them. Some of them (19%) focused on the relationship between the number of table (the position number) and the number of chairs (the output values) (functional thinking). Although all PSTs solved the problem, they did not explain their solutions adequately. Most of PSTs (77%) used tables to explore relationship. Some of them (42%) extended the pattern to the next step (4th step) by drawing.

In the second question, PSTs generally proposed their own way for students' solutions. They thought that students also think as themselves. For example, the participants who used table proposed that students would use table in solving. In this question, PSTs' explanations for students' solutions were concentrated on numerical reasoning. Only one PST proposed figural reasoning that students would use. Some of them proposed that students would use trial-error method in order to get the general rule.

In the third question, PTSs proposed possible difficulties and misconceptions that students have were. PSTs (54%) generally stated the difficulty of generalizing algebraically for students. They also indicated that students could understand the change of figures and have difficulty in exploration of arithmetical relationship between the number of tables and chairs. Few of the students (23%) could state the first misconception. They thought that students would generalize «n+3» by focusing on the difference between terms (5, 8, 11, 14 …).

In the fourth question, the answers of PSTs were grouped into six groups as in Table 4. PTSs suggested these methods or techniques to overcome students misconceptions and difficulties: drawing table, emphasizing arithmetical relationship, using different teaching methods (e.g. drama, discovery learning), supporting students in entending the pattern, using manipulatives, and connecting real-life.

Conclusion and Suggestions

The findings showed that all pre-service teachers could generalize the pattern algebraically. Most of them used numerical reasoning that was seeking the arithmetical relationship in table context. Their knowledge about students' solving problem generally based on their own solution method. They thought that the students also generalized the pattern as they solved the problem. Many of the pre-service teachers could not propose students' possible misconceptions.Thus, their suggestions to overcome the difficulties and misconceptions were insufficient and superficial.

Actual or representative solutions can be used with analyzing students' understanding and conceptions in method courses. Pre-service teachers' figural reasoning can also be improved in generalizing figural patterns as well as numerical reasoning since students can have different thinking schemas. Video-based teaching that includes student-teacher interaction while working on a misconception can be used in PST trainings. As well as developing PST's knowledge, their teaching practice should also be aimed to improve in school practicum courses.

GİRİŞ

Öğretmen bilgisi, öğrencilerin öğrenmesini etkileyen önemli bir değişkendir. Öğretmenlerin bilgilerinin yeterli ve tam olması, öğrencilerin matematik öğrenmesini olumlu etkilemektedir (Hill, Rowan & Ball, 2005). Cebirsel düşünme, ortaokul ve lise düzeyinde matematik öğrenimi için gereklidir. Bu noktada, ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrencilerin cebirsel düşünmesini destekleyerek, öğrencilerini sonraki seviyelere hazırlamaları önemlidir (Malara & Navarra, 2009). Bunun için kavramsal bilgiye sahip olan öğretmenler yetiştirmek amaçlanmalıdır. Bu amaç doğrultusunda öncelikli olarak, öğretmen adaylarının var olan bilgilerini incelemek, matematik öğretmeni yetiştiren programlar için oldukça değerlidir. Öğretmen adaylarının cebire dair yanlış anlamaları ve bilgi eksikliği olması durumunda, matematik öğretmeni eğitmenleri, cebir bilgisini geliştirmeye yönelik programlarını ve özellikle özel öğretim yöntemleri derslerini tasarlayabilirler. Matematik öğretmeni eğitmenleri, öğretmenlerin öğrencilerin cebir öğrenimini desteklemek için cebir ile ilgili kavramsal ve bağlantılı

bilgiye sahip olmaları gerektiğini belirtir. Ancak, eğitmenlerin öğretmen adaylarının cebir bilgisini nasıl geliştirileceğine ilişkin önerileri azdır (Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2013; İmre & Akkoç, 2012). Bu noktada, mevcut çalışma, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının var olan cebir konu alan bilgileri ve pedagojik alan bilgileri ile bu bilgilerine ilişkin eksiklikleri belirlemeyi ve bu eksiklikleri gidermeye yönelik önerilerde bulunmayı amaçlamaktadır.

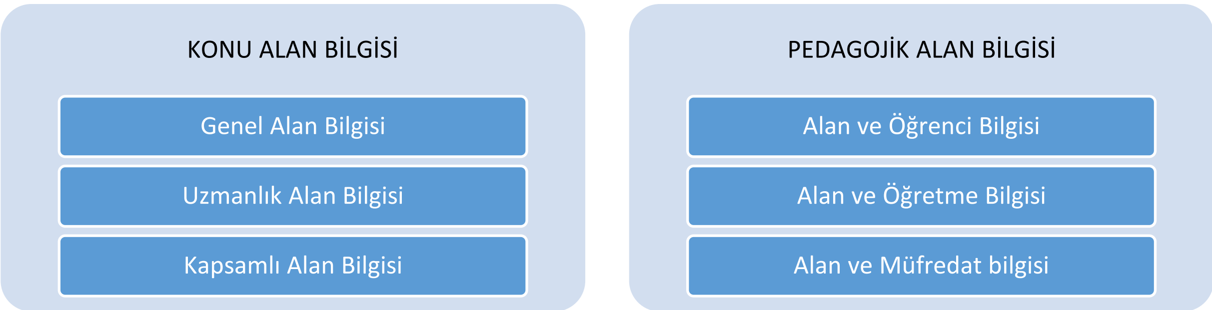
Cebir matematik öğreniminde önemlidir ve cebirsel düşünmenin gelişimi için örüntü genellemesinin önemli bir rolü vardır (Hargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrocks-Taylor, 1999). Örüntü genellemesinin bu rolü dikkate alınarak, bu çalışmada özellikle örüntü genellemesine odaklanılmıştır. Bu çalışmanın amacı, öğretmen adaylarının sabit değişen şekilsel örüntü genellemesi hakkındaki bilgilerini ortaya çıkarmaktır. Bu bağlamda, hem kendi konu alan bilgilerini hem de öğrencilere öğretmek için kullanacakları pedagojik alan bilgilerini birlikte incelemek hedeflenmiştir. Bu amaçlar doğrultusunda, bu çalışma ile "ortaokul matematik öğretmen adaylarının şekilsel örüntüleri genelleme bilgilerinin doğası nedir?" sorusuna cevap aranmıştır. Bu araştırma problemi alt alanlara göre şu şekilde düzenlenmiştir:

1. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının şekilsel örüntüleri genelleme konu alan bilgilerinin doğası nedir?
2. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının şekilsel örüntüleri genelleme alan ve öğrenci bilgisi ile alan ve öğretme bilgisini kapsayan pedagojik alan bilgilerinin doğası nedir?

1.1. Öğretmek için Matematik Bilgisi (ÖMB)

Öğretmen bilgisi kavramı önce Shulman (1986) tarafından tanımlanmış ve daha sonra birçok araştırmacı (e.g. Cochran, DeRuiter & King, 1993; Grossman, 1990) tarafından detaylandırılmış ve geliştirilmiştir. Bazı matematik eğitimi araştırmacıları bu kavramı özellikle matematik öğretmenleri için de tanımlamışlardır (An, Kulm, & Wu, 2004; Ball, Thames & Phelps, 2008; Fennema & Franke, 1992; Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009). Ball ve arkadaşlarının (2008) ortaya koyduğu "Öğretmek için Matematik Bilgisi (ÖMB)" kavramı uygulamaya ve matematiğe özgü olduğu için matematik eğitimcileri tarafından yaygın bir şekilde kabul görmüştür.

ÖMB, Konu Alan Bilgisi (KAB) ve Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) kategorilerinden oluşmaktadır (Şekil 1). ÖMB'deki konu alan bilgisinin bileşenlerinden, Genel Alan Bilgisi (GAB) matematikle uğraşan herkes tarafından kullanılan matematiksel bilgi iken, Uzmanlık Alan Bilgisi (UAB) ise matematik öğretimine özel ve matematik öğretmenlerinin sahip olması gereken bilgidir. Kapsamlı Alan Bilgisi, öğretmenin öğrettiği matematik konusunun önceki ve sonraki seviyelerdeki ilişkili konular hakkında farkındalığı ile ilgilidir. Pedagojik alan bilgisinin Alan ve Öğrenci Bilgisi (AÖB) bileşeni, öğretmenlerin, belli bir matematik konusuna özgü, öğrencinin düşünmesini, ilgisini, düzeyini, yaşayabileceği zorlukları, kavram yanılgılarını, sahip oldukları bilgilerini dikkate alarak derslerini tasarlamaları ile ilgilidir. PAB'ın ikinci bileşeni olan Alan ve Öğretme Bilgisi (AÖtB) öğretmenlerin öğretim hakkında karar verebilmesini, öğretim için konuları sıralayabilmesini, örnekleri seçebilmesini, modeller ve temsillerin etkililiği hakkında yorum yapabilmesini kapsamaktadır. PAB'ın üçüncü bileşeni olan Alan ve Müfredat Bilgisi ise, konuları öğretim programına göre sıralama, öğretim programı tarafından önerilen etkinlikler ve açıklamalar bilgisi ile ilgilidir (Aslan-Tutak & Köklü, 2016).



Şekil 1. Öğretmek için Matematik Bilgisi (Ball vd., 2008)

Bu çalışmada da öğretmen adaylarının örüntü genelleme bilgisini incelemek için ÖMB modeli kullanılmıştır. Öğretmenlerin örüntü genellemesi bilgilerini araştırmak için özel olarak kullanılacak bir modele alana yazında rastlanılmamıştır. ÖMB modeli de matematiğe özgü ve detaylı olmasından dolayı daha zengin ve anlamlı sonuçlar vereceği düşünülerek bu çalışmada tercih edilmiştir.

1.2. Öğretmen Adaylarının Örüntü Genellemesi Hakkındaki Konu Alan ve Pedagojik Alan Bilgileri

Cebir lise matematiğinin öğreniminde önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla öğrencilerin temel cebir kavramlarını ortaokul yıllarında öğrenmeleri gerekir (Rakes, Valentine, McGatha, & Ronau, 2010). Cebirsel düşünme, "bir durumdan bilgi çıkararak, bilgiyi kelimeler, diyagramlar, tablolar, grafikler ve denklemlerle temsil ederek, bilinmeyeni bulma, fonksiyonel ilişkileri tanımlama gibi matematiksel bilgileri yorumlayarak ve uygulayarak matematiksel sembol ve araçları kullanmaktır" (Herbert & Brown, 1997, s.123-124). Cebirsel düşünme, ortaokul düzeylerinde örüntü genellemesi ve değişkenlerin kullanılması ile gelişir ve bu gelişme anaokulundan lise düzeyine kadar devam eder (Milli Eğitim Bakanlığı, 2017). Cebirsel düşünmenin en önemli ve gerekli bileşeni cebirsel sembolleştirmedir (Kieran, 1989). Örüntü genellemesi de öğrencilerin değişken kullanımını kavramsallaştırmasını sağlayarak cebirsel sembolleştirmeyi sağlar (Warren, Cooper, & Lamb, 2006). Bir bağlam içinde sayıların veya şekillerin arasındaki ilişkinin analizini gerektiren durumların ilköğretim ve ortaokul öğrencilerine sunulması cebirsel düşüncelerini geliştirmek için önemlidir. Bu noktada örüntüler, öğrencilerin genelleme yapmalarını sağlayarak aritmetikten cebire geçişlerini kolaylaştırır (English & Warren, 1998). Çünkü örüntü genellemesi, cebirin de bir bileşeni olan, adım sayısı ve terim değerleri arasındaki aritmetik ilişkileri kullanmayı sağlar. (Katz, 1997; Usiskin, 1988). Terim sayısı ile terim arasındaki fonksiyonel ilişkinin anlaşılması, daha sonraki sınıflarda bulunan fonksiyon kavramının öğrenilmesini destekler (Usiskin, 1988).

Ulusal matematik öğretmenleri konseyi, öğretmenlerin ortaokul ve lise öğreniclerinin cebiri öğrenmelerini kolaylaştırmak için onlara erken yıllarda cebir öğrenmelerinin önemini vurgular (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Bu noktada Wilkie (2014) yaptığı çalışmada ÖMB modeline göre matematik öğretmenlerinin örüntü genellemesini öğretmek için sahip olması gereken bilgileri tanımlamıştır. Bu çalışmada UAB bilgi alanı için, araştırmacı, geometrik bir örüntünün genelleştirilmesi, fonksiyonel bir ilişki yazılması ve genelleme yaklaşımlarının açıklanması ile ilgili bilgiye sahip olmaları gerektiğini vurgulamıştır. Pedagojik alan bilgisi bileşenlerinden AÖB için, öğretmenlerin, farklı doğru genellemeler önerme, öğretmenlerin öğrencilerin genelleme cevaplarındaki seviyelerini tanıma ve öğrencilerin kullandıkları tekrarlı strateji ve cebirsel genellemelerine ilişkin bilgiye; AÖtB için, öğretmenlerin, bir öğrencinin genellemedeki hatasını ele almak ve fonksiyonel düşünceyi kavramsallaştırmak için uygun stratejileri belirleme bilgisine; Alan ve Müfredat bilgi alanı için, öğretmenlerin, müfredatın içerik tanım ifadelerinin değerlendirme, kolay veya zor olarak ölçeklendirme bilgisine sahip olması gerektiğini açıklamıştır (Wilkie, 2014).

Öğrencilerin cebirsel düşünmesini oluşturmada öğretmenlerin önemli bir görevi olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının bu konuda donanımlı bilgiye sahip olarak mezun olmalarının önemi de anlaşılır (Malara & Navarra, 2009). Öğretmen adaylarının örüntü genellemesi hakkındaki bilgilerine odaklanan çalışmalar (Akyüz, Coşkun, & Hacıömerliğlu, 2009; Barbosa & Vale, 2015; Callejo & Zapatera, 2017; İmre & Akkoç, 2012; Kirwan, 2015; Magiera et al., 2013; Rivera & Becker, 2007; Tanışlı & Köse, 2011; Zazkis & Liljedahl, 2002), hem konu alan bilgilerini hem de pedagojik alan bilgilerini incelemiştir. Özellikle PAB'larını inceleyen araştırmacılar (Callejo & Zapatera, 2017; İmre & Akkoç, 2012; Magiera ve ark., 2013), öğretmen adaylarına öğrencilerin cevaplarından örnekler sunmuşlardır. Bu çalışmalar, öğretmen adaylarının öğrencilerin örüntüdeki ilişkiyi bulma ve cebirsel olarak bu ilişkiyi yazma zorluklarının farkında olmadıklarını, öğretmen adayları kendilerinin kullanmadıkları stratejileri ve temsilleri (şekil ya da tablo gibi) öğrencilerin çözümlerinde de incelemediklerini, genel olarak öğrencilerin çözümlerini açıklayamadıklarını tespit etmiştir. Bu tespitler doğrultusunda araştırmacılar öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerini geliştirmeye çalışmışlar ve olumlu sonuçlar da elde etmişlerdir.

Bu çalışmalardan biri İmre ve Akkoç'un (2012), öğretmen yetiştirme programında öğretmenlik uygulaması dersi kapsamında öğretmen adaylarının örüntü genellemesine ilişkin PAB'larını incelediği araştırmadır. Araştırmacılar PAB'ın iki öğesini, öğrencilerin anlama ve zorluklarına (1) ve konuya özgü stratejiler ve sunumlara ilişkin bilgilerine (2) dayanan PAB'larını geliştirmeyi amaçlamışlardır. İmre ve Akkoç (2012), Radford'un (2008) "cebirsel örüntü genellemesi" kuramını bu çalışmaya adapte etmiştir. Araştırmacılara göre, birinci bileşen, öğrencilerin birbirini izleyen terimler arasındaki farkı kullanma konusundaki yanılgılarını ve cebirsel genellemedeki zorluklarını içerir. İkinci bileşen ise, tümevarım aşamasında aritmetik, cebirsel, resimsel ve tablo gibi genelleme kalıpları için gösterimlerin kullanılmasını içerir. Ders süresince araştırmacılar ve öğretmen adayları, bu iki bileşene dayalı olarak kendi yaptıkları mikro öğretimleri ve okullardaki öğretmenlerin uygulamalarını tartışmış ve değerlendirmiştir. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının bu dersin öncesinde öğrencilerin örüntüdeki ilişkiyi fark etme ve cebirsel olarak yazma zorluklarını dikkate almazken, bu tartışmalardan sonra adayların bunları dikkate aldıklarını belirtmiştir. Benzer şekilde, öğretmenlerin farklı temsilleri kullanmazken, tartışmalardan sonra şekilsel akıl yürütmeyi ve tablo gösterimlerini kullanmaya başladıkları belirtilmiştir.

Benzer şekilde, matematik eğitimi bağlamındaki bir derste, Magiera ve arkadaşları (2013), öğretmen adaylarının cebirsel düşünme bilgisini ve öğrencilerin cebirsel düşüncesini araştırmıştır. Veriler, öğretmen adaylarının çözümlerinden, onlarla yapılan görüşmelerden, öğrencilerin çözümlerinden, öğretmen adaylarının öğrencilerin çözümlerine yönelik yaptıkları analizlerinden ve öğrencilerle gerçekleştirdikleri görüşmelerinden elde edilmiştir. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının örüntü genelleme problemlerini kendilerinin çözmesini ve öğrencilerle yaptıkları görüşmelerde de kullanmalarını istemiştir. Bu çalışmanın sonuçları, öğretmen adaylarının cebirsel düşünme görevlerinin tüm özelliklerini belirleyemediğini veya fark edemediğini ortaya koymuştur. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının örüntü genellemesinde kendi kullanmadıkları özellikleri, öğrencilerin çözümlerinde de araştırmadıkları görülmüştür. Diğer bir bulgu, İmre ve Akkoç'un (2012) çalışmasının bulguları ile tutarlıdır. Öğretmen adaylarının örüntü genellemesi için farklı temsiller kullanmadıklarını ve bu nedenle öğrencilerin çözümlerinde bu özelliği aramadıkları görülmüştür. Akyüz ve diğerleri (2009) ayrıca, öğretmen adaylarının farklı temsiller (tablolaştırma, grafik, cebirsel ve sayısal gibi) arasında geçişi örüntü genellemesinde kullanma eğilimlerini araştırmıştır. Daha önce bahsedilen çalışmalarla tutarlı olarak, farklı temsillerin kullanılmasıyla öğrencilerin genelleme mantığını destekleyebileceklerini bulmuşlardır. Magiera ve arkadaşlarının (2013) diğer bir bulgusu da, birçok çalışmanın da (Barbosa & Vale, 2015; İmre & Akkoç, 2012; Kirwan, 2015; Rivera & Becker, 2007; Tanışlı & Köse, 2011) gösterdiği gibi, öğretmen adaylarının cebirsel düşünme özelliklerinden biri olarak genel kuralı gerekçelendirmede güçlük yaşadıklarını ortaya koymuştur.

Callejo ve Zapatera (2017) benzer bir amaçla, öğretmen adaylarının PAB'ına odaklanan bir çalışma yürütmüştür. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının, örüntü genelleştirmeye yönelik öğrencilerin cevaplarını nasıl tanımladıklarını ve yorumladıklarını inceleyerek, öğrencilerin matematiksel düşüncelerine yönelik farkındalıklarını belirlemeyi amaçlamıştır. Örüntü genelleme süreciyle ilgili üç matematiksel unsur önermişlerdir: birinci unsurda öğrencilerin örüntüyü devam ettirdikleri, ancak sayısal ve şekilsel özellikleri ilişkilendiremedikleri anlaşılmaktadır; ikinci unsur öğrencilerin sayısal ve şekilsel özelliklerle bağlantı kurabilmeleri ve sözlü veya cebirsel olarak ilişkinin genellenmesi ile ilgilidir; üçüncü unsur, belirli bir terim için konum numarasını belirleyen ters işlemdir. Bu çalışmanın bulgularına göre, öğretmen adayları öğrencilerin cevaplarında bu unsurları tanımlamış olsalar da El Mouhayar ve Jurdak'ın (2013) da bulgularında belirttikleri gibi öğrencilerin genelleme anlayışını yorumlama ve açıklama konusunda zorluk çektikleri görülmüştür.

Bu çalışmaların yanı sıra, öğretmen adaylarının farklı örüntü türlerini nasıl genellediklerini araştıran çalışmalar da olmuştur. Bazı öğretmen adayları, yinelemeli strateji kullanarak, yani sadece terimlerin arasındaki farka odaklanarak, sayısal örüntünün genel kuralını bulmaya çalışmıştır (Zazkis & Liljedahl, 2002). Öte yandan, bazı öğretmen adayları şekillerin özelliklerini kullanarak şekilsel akıl yürütmeye gitmişlerdir (Barbosa & Vale, 2015; Rivera & Becker, 2007). Yapılan çalışmalar, şekilsel düşünme bağlamında ilişki kurmanın öğrencilerin genellemeye yönelik düşüncelerini geliştireceğini göstermiştir. Özellikle, şekilsel akıl yürütme kullanan öğretmenlerin fonksiyonel düşünceyi kullanabildikleri görülmüştür (Tanışlı & Köse, 2011). Bununla birlikte, Kirwan (2015), öğretmen adaylarının genellemede şekilsel özellikleri ve genellemeyi doğrulamak için sayısal özellikleri kullanabileceğini belirtmiştir. Walkowiak (2014) de genellemeye ulaşmada sayısal ve şekilsel akıl yürütme olarak iki akıl yürütme stratejisi önermiştir. Sayısal akıl yürütmede öğrenciler terimlerin arasındaki farka ve terim sayısı ile terim arasındaki ikişkiye odaklanırken, şekilsel akıl yürütmede ise şekiller arasındaki değişimleri inceleyerek şeklin sırası ile ilişki kurarak genellemeye ulaşırlar. Bu çalışmada ise öğretmen adaylarının her iki akıl yürütmeyi kullanmalarını sağlayabilecek bir şekil örüntüsü genellemesi problemi kullanılmıştır.

Genel olarak çalışmalara bakıldığında, öğretmen adaylarının örüntü genellemesine ilişkin hem konu alan bilgisini hem de pedagojik alan bilgisini aynı anda ele alarak inceleyen çalışmaların az olduğu söylenebilir. Bu noktada mevcut çalışma iki bilgi türüne de aynı anda odaklanarak bu bilgi türlerinin birbiriyle ilişkisini de ortaya koymayı amaçlamıştır. Ayrıca çalışmalarda çoğunlukla gerçek ya da temsili öğrenci çözümleri verilerek bu çözümler üzerinden öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisi incelenmiştir. Mevcut çalışmada ise öğretmen adaylarının sahip oldukları Alan ve Öğrenci Bilgisi ortaya çıkarılmak istendiği için örnek çözüm verilmeden açık uçlu bir soru üzerinden araştırma yapılmıştır.

1. YÖNTEM

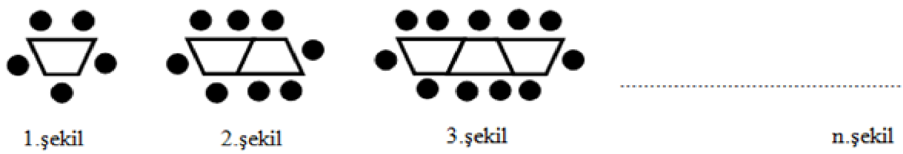
Bu araştırma için, nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Nitel araştırmalar, bir sorun ya da bir konunun detaylı bir şekilde, katılımcıların yorumları ve kattığı anlamlar ile birlikte araştırılmasını sağlamaktadır. Nitel araştırma, bir araştırma sorusu için varsayımlar ve kuramsal bir perspektifle başlar ve bu problemle ilgili bireylerin veya grupların anlamlarını sorgular (Creswell, 2007). Bu çalışmada öğretmen adaylarının şekil örüntü genellemesini öğretmek için yeterli konu alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olup olmadığı araştırma sorusu ele alınmıştır. Bunu araştırmak için "Öğretmek için Matematik Bilgisi Modeli" temel alınmış ve öğretmen adaylarının çözümleri ve açıklamaları incelenmiştir.

2.1. Katılımcılar

Araştırma, bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliğinde 3.sınıf öğrencisi olan 26 öğretmen adayının katılımıyla gerçekleşmiştir. Bu çalışmada amaçsal örnekleme kullanılmıştır. Bu şekilde amaca yönelik belli ölçütler dikkate alınarak seçilen örneklemler amaçsal örnekleme olarak belirtilir (Merriam, 2009). Bu ölçütler a) "Özel Öğretim Yöntemleri I ve II" dersini almış olmak, b) bu ders kapsamında cebir öğrenme alanı içinde örüntü genellemesi ile ilgili öğretim yöntem ve tekniklerini görmüş olmak ve c) çalışmaya katılmaya gönüllü olmak şeklinde ifade edilebilir. Bulgular kısmında öğretmen adayları kısaca "ÖA" şeklinde ifade edilmiştir.

2.2. Veri Toplama

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının örüntü genellemesi ile ilgili bilgileri hakkında veri toplamak amacıyla, matematik eğitimi araştırmacıları tarafından örüntü genelleme öğretiminde kullanılması önerilen sabit değişen bir şekil örüntüsü kullanılmıştır (Şekil 2). Genellikle alan yazında bu problem "yemek masası problemi (lunchroom table problem)" olarak bilinmektedir (Blanton & Kaput, 2003). Problemde, yemek masaları yamuk şeklinde olup, uzun kenara 2 sandalye, diğer kenara ise 1'er sandalye gelmektedir. Bu problemde amaçlanan, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi keşfettirmektir. Araştırmacılar (Moss, Beatty, Barkin, & Shillolo, 2008) masa sayısı ve sandalye sayısı arasındaki ilişkiyi sorduğu için, bu problemi öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerini geliştirmek için kullanmayı önermiştir.



Yukarıdaki yamuk şeklindeki masalara şekildeki gibi sandalyeler yerleştirilecektir. Her şekil, önceki şekle bir yamuk masa daha eklenerek devam etmektedir. Bu örüntüde 1., 2. ve 3. şekiller, örüntünün ilk üç şeklidir.

Örüntüdeki n.şekil ile çevresine yerleştirilebilecek sandalye sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

Şekil 2. Veri toplamada kullanılan problem

Öğretmen adaylarına bu problemle ilgili dört tane açık uçlu soru sorulmuştur. Bu sorular da Ball ve diğerlerinin (2008) önerdiği "Öğretmek için Matematik Bilgisi (ÖMB)" modeli temel alınarak oluşturulmuştur. Sorular hazırlandıktan sonra matematik eğitimindeki bir uzmandan soruların içeriği ve anlaşılabilirliği ile ilgili görüş alınmıştır ve sorulara son şekli verilmiştir. İlk soruda öğretmen adaylarından bu problemi çözmeleri istenmiştir. Bu soruyla, öğretmen adaylarının Genel Alan Bilgisi'ni (GAB) belirlemek amaçlanmıştır. İkinci olarak öğretmen adaylarına "Ortaokul öğrencisi bu soruyu çözmeye başlarken sizce nasıl bir yol izleyebilir?" sorusu sorulmuştur. Bu soru ile öğretmen adaylarının öğrencilerin düşünmesi ile bilgilerini elde etmek amaçlanmıştır (Alan ve Öğrenci Bilgisi). Üçüncü olarak "Bu problemin çözümünde, öğrencinin yaşayabileceği zorluklar ya da kavram yanılgıları neler olabilir?" sorusu yer almıştır. Bu soru ile yine öğretmen adaylarının öğrencilerle ilgili bilgisine odaklanılmıştır. Dördüncü soruda ise "Belirttiğiniz zorluklar ya da kavram yanılgıları ile karşılaştığınızda, öğretmen olarak neler yapabilirsiniz? (strateji, gösterim, materyal vb.)" ifadesi yer almıştır. Bu soru ile öğretmen adaylarının Alan ve Öğretme Bilgisi'ne odaklanılmak istenmiştir. Öğretmen adaylarından bu soruları cevaplamaları ve cevaplarla ilgili açıklamaları da yazmaları istenmiştir. Bunun için yaklaşık 40 dakika verilmiştir.

2.3. Veri Analizi

Bu çalışmanın verileri öğretmen adaylarının açık uçlu sorulara verdiği cevaplardan oluşmuştur. Nitel araştırmalarda, analiz geçici kodlamalar ile başlar, kodlar benzerliklerine göre temalar ya da kategoriler altında toplanır ve verilerin raporlanmasıyla sona erer (Merriam, 2009). Nitel analizin bir çeşidi olan içerik analizinde de, elde edilen verilerde kendi içinde anlamlı olduğu düşünülen bir açıklama, yani bir cümle ya da paragraf ve çözümle ilgili gösterimler kodlar haline dönüştürülür (Strauss & Corbin, 1990). Elde edilen veriler, Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen "Öğretmek için Matematiksel Bilgi (ÖMB)" modeli kullanılarak içerik analizi ile incelenmiştir. Verilerden yola çıkarak her bir sorunun cevabı için kodlar oluşturulmuştur. Bu durum, Yıldırım ve Şimşek'e (2013) göre tümevarımcı bir yaklaşımla yapılan bir içerik analizi türüdür. Çıkarılan kodlar, bulgular kısmında sunulmuştur.

Araştırmanın güvenirliğini sağlamak için veriler araştırmacılar tarafından ayrı ayrı kodlanmıştır. Ardından araştırmacılar bir araya gelerek kodlamalarını değerlendirmiştir. Kodlar üzerine tartışılmış ve tamamen anlaşmaya ulaşılmıştır.

3. BULGULAR

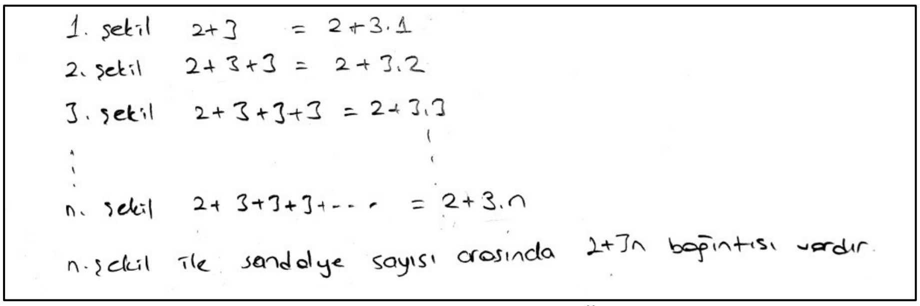
3.1. Öğretmen Adaylarının Genel Alan Bilgisi (GAB)

ÖA'ların birinci soruyla ilgili çözümleri ve açıklamaları aşağıda Tablo 1'de gruplanmıştır:

Tablo 1. ÖA'ların birinci soruya verdiği cevapların kodları

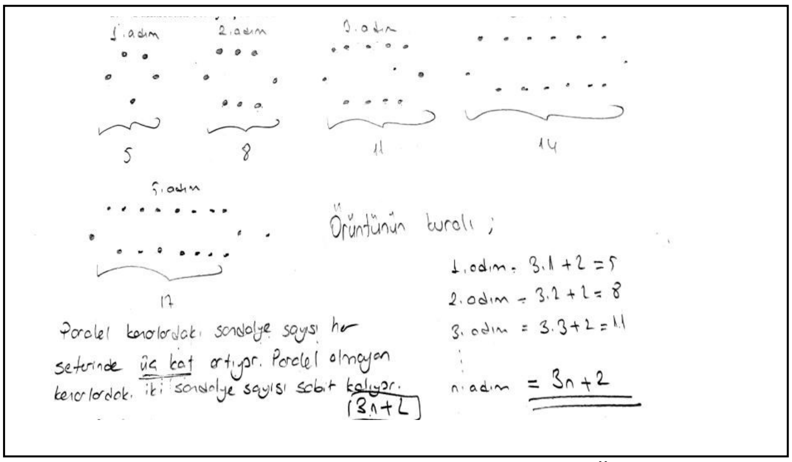
Tema	Kodlar	Frekans	Yüzde (%)
Genel Alan Bilgisi (GAB)	Tablo kullanma	20	77
	Sandalye sayıları arasındaki farka odaklanma	17	65
	Şekli devam ettirme	11	42
	Örüntü kuralı bulma ile ilgili açıklama yapma (sayısal –şekilsel)	8	31
	Masa ve sandalye sayıları arasındaki farka odaklanma	5	19

Tablo 1’de ÖA’ların genelleme sürecinde kullandığı farklı stratejiler verilmiştir. Bütün ÖA’lar örüntüyü cebirsel olarak doğru biçimde (3n+2) genelleyebilmişlerdir. Fakat az bir kısmı (%31) çözümleriyle ilgili açıklama yapmıştır. Genellemelerini açıklarken ve gerekçelendirirken ise genellikle sayısal akıl yürütme içeren ifadeler ve gösterimler kullanmıştır (Şekil 3). Genellikle 2’yi sabit olarak düşünmüşler, eklenen 3’lerin de şekil sırası ile doğru orantılı olduğunu fark etmişler ve buradan 2+3n bağıntısına ulaşmışlardır.



Şekil 3. Sayısal düşünme ile ilgili gösterim - ÖA12’nin çözümü

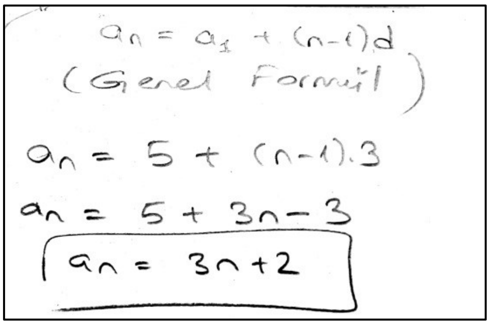
Şekilsel olarak akıl yürütme kullanarak genellemeleri açıklayan 4 öğretmen adayı olduğu görülmüştür. Bu çözümler de genellikle yamuğun kenarlarına göre gelen sandalye sayısı ile ilgilidir. Örneğin, ÖA3 çözümünü yamuğun paralel olan kenarlarındaki toplam sandalye sayısının üçün katları şeklinde arttığını, paralel olmayan kenarlarına ise sabit olarak iki sandalye geldiğini Şekil 4’teki gibi belirtmiştir:



Şekil 4. Şekilsel düşünme ile ilgili gösterim - ÖA3’ün çözümü

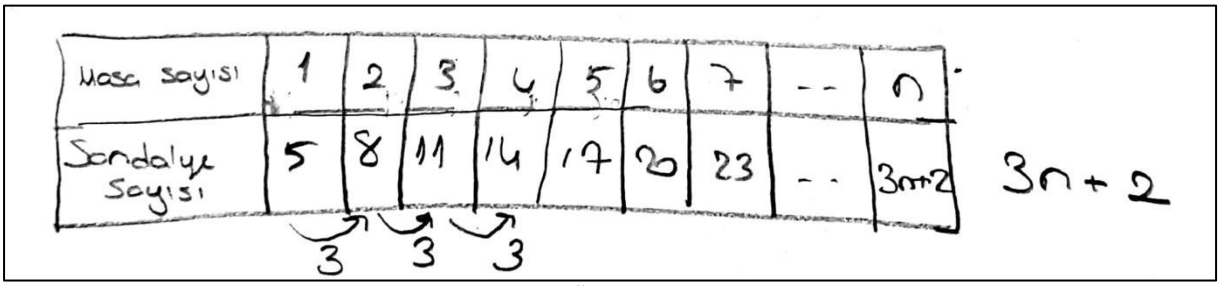
Katılımcıların çoğu (%65) sadece sandalyelerin sayısına ve dolayısıyla aralarındaki farka odaklanmıştır. ÖA’lardan çok azı (%19) masa ile sandalye sayılarını birlikte dikkate alarak aradaki ilişkiye odaklanmıştır. Bu ilişkiye odaklanarak genel kurala ulaşan ÖA’lar fonksiyonel olarak düşünebilmişlerdir.

Bunların dışında farklı bir çözüm yolu olarak iki öğretmen adayının, Şekil 5’teki gibi geometrik seri formülü kullandığı da görülmüştür.



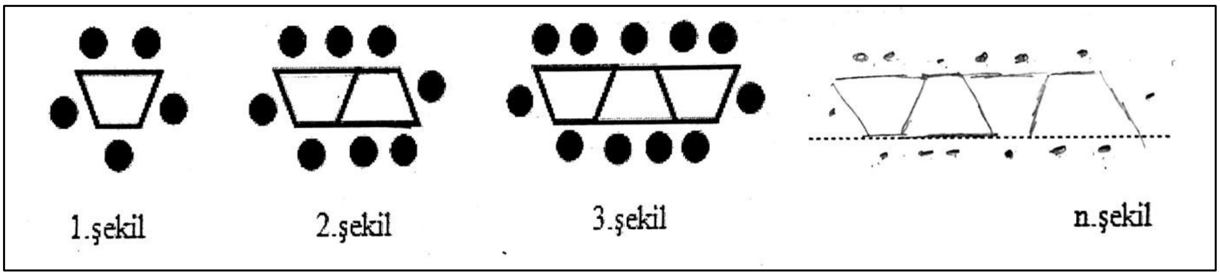
Şekil 5. Geometrik seri formülü kullanımı ile ilgili gösterim - ÖA6'nın çözümü

Genellikle, öğretmen adaylarının büyük bir kısmı genel kuralı bulurken tablo kullanmış (%77), bir kısmı şekli devam ettirmiş (%42) ve bazıları da her iki yöntemi de kullanmıştır. Aradaki ilişkiyi keşfetmek için tabloyu kullanan ÖA14'ün tablosu aşağıda şekildeki gibidir:



Şekil 6. Tablo kullanımı ile ilgili gösterim - ÖA14'ün çözümü

Bu tabloya bakıldığında ÖA14'ün masa sayısı ve sandalye sayısı için ayrı iki satır yaptığı, daha sonra sandalye sayısı arasındaki farkı 3 olarak belirttiği ve son olarak da genel terim yerine n ve genel kural yerine de 3n+2'yi doğru bir şekilde yazdığı görülmüştür. Bu ÖA'nın "n"yi yani genel terimi masa sayısı satırına, "3n+2"yi n'ye karşılık gelen sandalye sayısı satırına yazarak fonsiyonel düşündüğü söylenebilir. Bu ÖA'da fonksiyonda giren ve çıkan değerlerin anlamı ve görevi ile ilgili bir kavrama olduğu ifade edilebilir. Şekli devam ettiren ÖA'lar ise örüntüdeki 4.şekli aşağıdaki gibi çizmişlerdir:



Şekil 7. Şekli devam ettirme ile ilgili gösterim – ÖA3'ün çözümü

Bu ÖA'ların da şekillerdeki değişimi doğru bir şekilde algılayabildikleri ve şekli doğru devam ettirebildikleri söylenebilir. Yani uzun kenara 2 sandalye, kısa kenara 1 sandalye gelmesi gerektiğini ve ortak kenarlara hiç sandalye gelmemesi gerektiğini fark ederek çizimlerini yapmışlardır. Ancak bu gösterimin Şekil 4'teki çözümden farkı, bu gösterimi tercih eden ÖA'lar n.şekil yerine direkt 4.sırada olan şekli çizmişlerdir. Bu durumda da n.şekil 4.şekilmiş gibi algılanabilir.

3.2. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Düşünmesi Hakkında Bilgisi (AÖB)

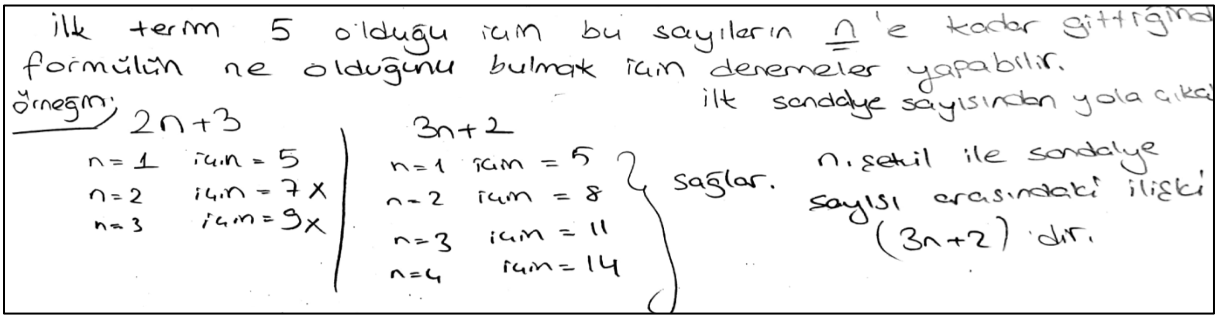
ÖA'ların ikinci soruyla ilgili çözümleri ve açıklamaları aşağıda Tablo 2'de gruplanmıştır:

Tablo 2. ÖA'ların ikinci soruya verdiği cevapların kodları

Tema	Kodlar	Frekans	Yüzde (%)
Alan ve Öğrenci Bilgisi (AÖB)	Örüntü kuralı bulma ile ilgili açıklama yapma (sayısal – şekilsel-deneme/yanılma)	22	88
	Sandalye sayıları arasındaki farka odaklanma	20	77
	Tablo kullanma	12	46
	Şekli devam ettirme	10	38
	Masa ve sandalye sayıları arasındaki farka odaklanma	8	31

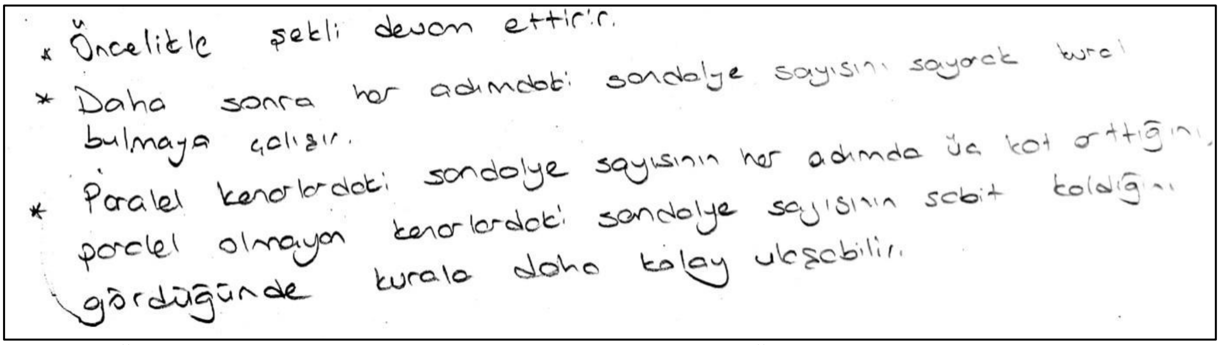
Bu sorunun cevaplarında, ÖA'ların kendi çözümleri ile öğrencilerin çözümü için önerdiği yollar benzer olduğu için aynı kodlar ortaya çıkmıştır. ÖA'ların büyük çoğunluğu (%77) öğrencilerin sandalye sayıları arasındaki farka odaklanacaklarını belirtmiştir. Az bir kısmı (%31), masa ve sandalye sayısı arasındaki farka odaklanabileceğini belirtmiştir. Yani, ÖA'lar öğrencilerin çoğunun fonksiyonel olarak düşünemeyeceğini belirtmiştir.

Önemli bir nokta da, bu problemin bir şekil örüntüsü olmasına rağmen, öğrencilerin sayısal olarak akıl yürüteceklerini yani sadece sayılara odaklanacağını belirtmiş olmalarıdır. Zaten kendileri de sayılara odaklanarak genel kural elde etmişlerdir. Bu ÖA'lar Tablo 2'deki "örüntü kuralı ile ilgili açıklama yapma" kategorisindedir. Bu ÖA'ların da bir kısmı aşağıdaki şekilde de belirttikleri gibi açıklamalarında öğrencilerin deneme-yanılma ile genel kurala ulaşacaklarını belirtmiştir.



Şekil 8. Örüntü kuralı bulma ile ilgili açıklama yapma - ÖA6'nın önerdiğini deneme-yanılma yöntemi

Yine aynı kategorideki sadece bir ÖA öğrencinin şekillerin değişimine odaklanan bir akıl yürütme kullanabileceğini ifade etmiştir:


* Öncelikle şekli devam ettirir.
* Daha sonra her adımdaki sandalye sayısını sayarak kural bulmaya çalışır.
* Paralel kenarlardaki sandalye sayısının her adımda üç kat arttığını, paralel olmayan kenarlardaki sandalye sayısının sabit kaldığını gördüğünde kurala daha kolay ulaşabilir.

Şekil 9. Örüntü kuralı bulma ile ilgili açıklama yapma - ÖA3'ün önerdiği şekilsel düşünme yöntemi

Bununla birlikte ÖA'ların kendilerinin tablo kullanma oranları (%77) ile öğrencilerin için önerdikleri tablo kullanma arasında fark görülmüştür (%46). Yani çözümlerinde tablo kullanan her ÖA, öğrencilerin tablo kullanması ile ilgili açıklama yapmamıştır.

3.3. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Kavram Yanılgıları ve Zorlukları Hakkında Bilgisi (AÖB)

ÖA'ların üçüncü soruyla ilgili çözümleri ve açıklamaları Tablo 3'teki gibi gruplanmıştır:

Tablo 3. ÖA'ların üçüncü soruya verdiği cevapların kodları

	Kodlar	Frekans	Yüzde (%)
Kavram yanılgıları	Artışa göre genelleme (n+3)	6	23
	İlk terimdeki sandalye sayısına odaklanarak cebirsel ifadeler yazma	2	8
	n kavramına ilişkin algı	2	8
Zorluklar	Cebirsel genellemeye ulaşma	14	54
	Şekli kullanarak aritmetik ilişkiye ulaşma	14	54
	Şekli devam ettirme	5	19
	Masa ve sandalye sayıları arasındaki ilişkiyi görme	1	4

Öğretmen adaylarından muhtemel kavram yanılgıları ile ilgili gelen tahminler azdır. ÖA'ların çok az bir kısmı öğrencilerin 5, 8, 11, 14 … örüntüsünde sandalye sayısı artışına yani aradaki farka bakarak genel kuralı "n+3" şeklinde bulacaklarını belirtmiştir. Bunun yanında, iki ÖA'nın da muhtemel kavram yanılgısı ile ilgili cevap kâğıdında şöyle bir tahmini görülmüştür:

ÖA6: "… İlk sandalye sayısı 5 olduğu için 5 elde etmesini sağlayan cebirsel ifadeler yazabilir, örneğin 2n+3, n+4 gibi."

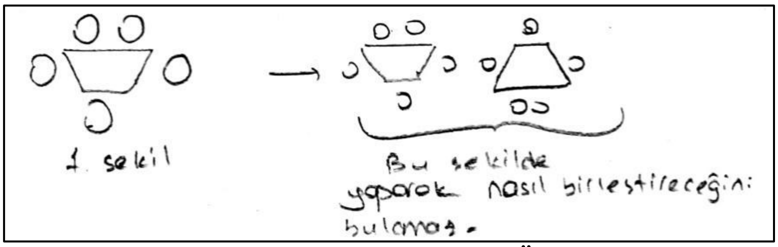
ÖA20: "Öğrencilerimiz 1.şekilde 1 yamuk var 5 sandalye var deyip, n.şekilde n tane yamuk olur ve 5.n tane sandalye olur diyebilirler.."

İki ÖA, öğrencilerin n kavramı ile bilgilerinin yanlış olabileceğini ve bu durumun öğrencinin genellemeye ulaşmasında bir engel olabileceğini cevap kâğıdında aşağıdaki şekilde belirtmiştir:

ÖA8: "…n.masa derken oradaki "n" kavramı/sembolü öğrenciye bir belirsizlik veya bir sonsuzluk düşüncesi oluşturmuş olabilir.."

ÖA22: "n ifadesinin neyi belirttiğini doğru ifade edip öğrencinin anlaması sağlanmalıdır, n şekil sayısıdır."

Öğretmen adayları, genellikle öğrencilerin örüntü kuralını cebirsel olarak yazmakta zorluk yaşayacaklarını belirtmişlerdir. Bununla birlikte, yine çoğu ÖA, öğrencilerin şekli kullanarak masa sayısı ve sandalye sayısı arasında bir aritmetik ilişkiye ulaşmada da sıkıntı yaşayacaklarını ifade etmiştir. Bu zorluğu da iki şekilde açıklamışlardır. Birinci durumda, öğrencilerin şekli devam ettirirken uzun kenara 2 sandalye kısa kenara 1 sandalye geleceğini fark etmezlerse 4.şekli çizmede zorluk yaşayabileceklerini belirtmişlerdir. İkinci durumda ise, öğrencilerin iki yamuk şeklindeki masayı yan yana koyunca ortak kenarlara gelecek sandalyeleri nereye koyacaklarını düşünebileceklerini ve burada zorluk yaşayacaklarını belirtmişlerdir. ÖA17, bu durumu aşağıda şekildeki gibi çizerek göstermiştir:



Şekil 10. Şekli devam ettirme zorluğu - ÖA17'nin gösterimi

Bununla birlikte sadece bir öğretmen adayı (ÖA1) öğrencilerin masa ve sandalye sayısı arasındaki ilişkiyi görmede zorluk yaşayabileceğini belirtmiştir. Bu durum fonksiyonel düşünme ile ilgili ve öğrencilerin esas sıkıntı yaşadığı nokta olduğundan, sadece bir ÖA'nın bunu önermesi de dikkat çekicidir.

3.4. Öğretmen Adaylarının Alan ve Öğretme Bilgisi (AÖtB)

Öğretmen adayları üçüncü soruda belirttikleri kavram yanılgıları ve zorlukların üstesinden gelmek için Tablo 4'teki önerileri sunmuşlardır:

Tablo 4. ÖA'ların kavram yanılgıları ve zorlukları gidermek için önerileri

Öneriler	Frekans	Yüzde (%)
Farklı öğretim yöntemleri kullanma	17	65
Şekli devam ettirmeyi destekleme	17	65
Sayısal ilişkileri vurgulama	11	42
Somut materyal kullanma	11	42
Tablo yapma	7	27
Günlük yaşamla ilişkilendirme	3	12

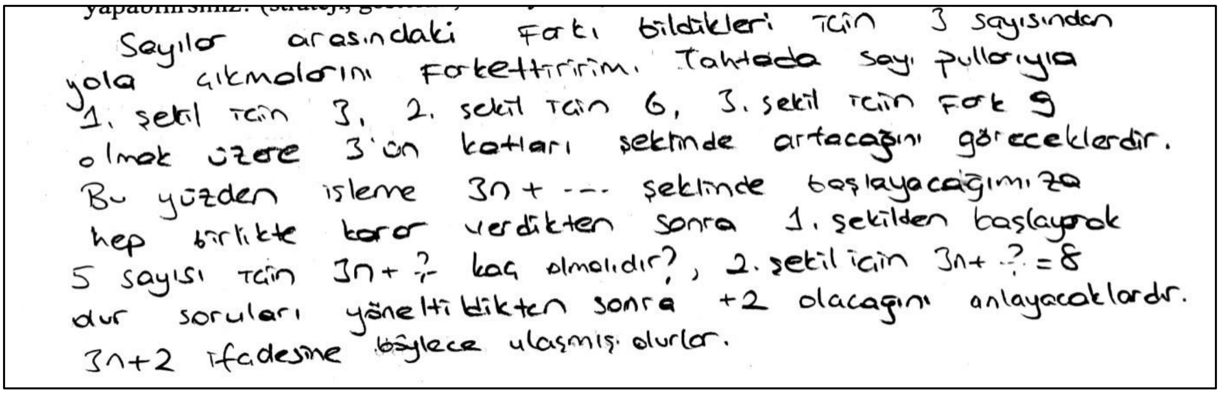
ÖA'ların büyük çoğunluğu örüntülerin öğretimini düşünerek farklı öğretim yöntem ve teknikleri önermiştir. Fakat bu önerileri çok detaylandırmamışlardır. Bu önerilerin çoğunda buluş yolu yaklaşımı vardır. ÖA'lar genellikle "…buluş yolunu kullanırım.." diyerek belirtmişlerdir. Hatta ÖA23, "Her öğrencinin kendi çözüm yolunu göstermesini sağlarım ve bu şekilde buluş yolunu kullanmış olurum" şeklinde açıklama yapmıştır. Bir kısmı da drama ile öğretimi önermiştir. Bununla ilgili ÖA5'in önerisi şu şekildedir:

ÖA5: "…sınıftaki masalar birleştirilerek, birleştirilen yerlerde kimsenin oturamayacağı gösterilir. Özellikle yamuk şeklinde masalar olduğunda uzun kenara 2 kişi, kısa kenara 1 kişi oturacağı belirtilir."

Bu yöntem ve tekniklerin yanında daha basit bir örüntü kullanma (ör. 1,3,5..), tartışma yapma, yöntemleri de önerilmiştir. Bunlarla birlikte, gösterip yaptırma (sandalye sayısını sayarak ve çizerek şeklin nasıl devam ettiğini gösterme) "şekli devam ettirmeyi destekleme", liste yöntemi ise "tablo yapma" kategorisinde değerlendirilmiştir.

Özellikle ÖA'lar sınıftaki masalarla gösterimin zor olduğu durumlarda kartondan yamuk masalar ve sandalyeler kesebileceklerini ve şeklin değişimini bunları kullanarak göstereceklerini ifade etmiştir. ÖA'lar şekli devam ettirme konusuna vurgu yapmışlar ve bunun için de ortak kenarlara sandalye gelmediğini göstermenin önemini belirtmişlerdir.

Sayısal ilişkileri göstermek isteyen ÖA'lar ise genellikle sandalye sayıları arasındaki farka vurgu yapacaklarını belirtmişlerdir. Örneğin, ÖA12 Şekil 11'deki yöntemi kullanacağını açıklamıştır:


Sayılar arasındaki farkı bildikleri için 3 sayısından yola çıkmalarını farkettiririm. Tahtada sayı pullarıyla 1. şekil için 3, 2. şekil için 6, 3. şekil için fark 9 olmak üzere 3'ün katları şeklinde artacağını göreceklerdir. Bu yüzden işleme 3n + --- şeklinde başlayacağımıza hep birlikte karar verdikten sonra 1. şekilden başlayarak 5 sayısı için 3n+ ? kaç olmalıdır?, 2. şekil için 3n+ ? = 8 dur soruları yönelttikten sonra +2 olacağını anlayacaklardır. 3n+2 ifadesine böylece ulaşmış olurlar.

Şekil 11. Cebirsel kurala ulaşma yöntemi - ÖA12'nin açıklaması

ÖA12 önce aradaki farkın 3'ün katı şeklinde 3n olarak yazılabileceğini, n yerine şekil sırasını yazarak da kuraldaki sabit sayının tahmin ile bulunabileceğini açıklamıştır.

Hem sandalye sayıları arasındaki farka hem de masa-sandalye sayısı arasındaki ilişkiye vurgu yapmak isteyenler ise tablo yapmayı önermişlerdir. Tabloda masa sayısı ve sandalye sayıları arasındaki ilişkiyi ifade edebileceklerini ve böylece öğrencinin aritmetik ilişkiyi keşfetmesini sağlayabileceklerini vurgulamışlardır.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının, örüntü genellemesi konusunda var olan bilgilerini ortaya koymaktır. Çalışma sonucu ortaya çıkan bulgular, öğretmen adaylarının tümünün örüntüyü cebirsel olarak doğru bir şekilde genelleyebildiğini ortaya koymuştur. Bu durum ÖA'ların örüntü genellemesi ile ilgili konu alan bilgilerinin yeterli olduğunu gösterebilir. Genellemeye ulaşırken çoğu ÖA tablo kullanmıştır. Tabloyu yatay ya da dikey olarak çizenler görülmüştür. Genel olarak tabloları bir sütuna ya da bir satıra masa sayısı diğerine de sandalye sayısını yazarak oluşturmuşlardır. Bu tablolarda hem sandalye sayısı arasındaki farkı, hem de masa ile sandalye sayısı arasındaki farkları ok ile göstermişlerdir. Aslında kullanılan problem bir şekil örüntüsüdür, ama ÖA'ların çoğu sayısal ilişkilere odaklanmış, çok az bir kısmı şeklin değişiminden yararlanarak genel kurala ulaşabilmişlerdir. Daha önceki çalışmalarda (Barbosa & Vale, 2015; Rivera & Becker, 2007; Zazkis & Liljedahl, 2002) da öğretmen adaylarının çoğunlukla sayısal ilişkilere odaklandığı görülmüştür.

Öğretmen adaylarının Alan ve Öğrenci Bilgisini (AÖB) incelemek için ikinci ve üçüncü soruların sonuçları değerlendirilmiştir. İkinci sorunun bulgularına göre, ÖA'ların öğrencilerin problemi çözme konusundaki bilgileri genellikle kendi çözüm yöntemlerine dayanmaktadır. Magiera ve arkadaşları (2013) da benzer şekilde öğretmen adaylarının örüntü genellemesinde kendi kullanmadıkları özellikleri öğrencilerin çözümlerinde de araştırmadıkları sonucuna ulaşmıştır. Örneğin kendileri tablo kullanmışlarsa, öğrencilerin de tablo kullanacağını düşünmektedirler. İmre ve Akkoç (2012) örüntü genellemesi için farklı temsiller kullanmayan öğretmen adaylarının, öğrencilerin çözümlerinde bu özelliği araştırmadıklarını ifade etmiştir. Zaten bu çalışmada da tablo kullanmayan ÖA'lar öğrenciler için de tablo kullanmayı düşünmemişlerdir. Ya da kendileri şeklin değişimini dikkate almışlarsa, yani ortak kenarlara sandalye gelmeyeceğini, uzun kenara 2 sandalye kısa kenara 1 sandalye geleceğini belirtmişlerse, öğrencinin de bu şekilde düşüneceğini ifade etmişlerdir.

Üçüncü sorunun bulgularına göre ise, öğretmen adaylarının çoğu öğrencilerin yaşayabileceği zorluklar hakkında fikir sahibi olmalarına rağmen, muhtemel kavram yanılgılarına ilişkin çok az tahminde bulunabilmiştir. ÖA'ların önerdiği zorluklar, ilgili araştırmalarda da ortaya çıkmıştır (Becker & Rivera, 2005; Çayır & Akyüz, 2015; Jurdak & El Mouhayar, 2014). Bununla birlikte öğrencilerin esas sıkıntı yaşadığı nokta olan "masa ve sandalye sayısı arasındaki ilişkiyi görmede zorluk" durumunu sadece bir ÖA'nın belirtmiş olması ilginçtir. ÖA'ların örüntü genellemesi ile ilgili öğrencilerin muhtemel zorluklarına ilişkin bilgilerinin yeterli olmadığı söylenebilir. Özellikle alan yazında bu problemin çözümünde "aradaki farka odaklanarak n+3 genellemesine ulaşma" kavram yanılgısının sık ortaya çıktığı belirtilmiştir. (Girit & Akyüz, 2016; Moss ve ark., 2008) Ancak öğretmen adaylarıyla yapılan bu çalışmada bu kavram yanılgısını sadece 6 öğretmen adayı önerebilmiştir.

Öğretmen adaylarının Alan ve Öğretme Bilgisi (AÖtB) incelendiğinde öğrencilerin muhtemel zorluk ve kavram yanılgılarını gidermek için sundukları yöntem ve tekniklerin yetersiz ve yüzeysel olduğu görülmüştür. ÖA'ların çoğu özellikle buluş yoluyla öğrenme yaklaşımını esas alacaklarını ifade etmiş fakat bunu nasıl yapacaklarını anlatmamışlardır. Ayrıca önerilerinin örüntü genellemesine özel olmadığı genel olarak bütün konularda etkili olabilecek yöntemler olduğu görülmüştür. Bu durum ÖA'ların alana özgü öğretme bilgilerinin yeterli olmadığını gösterir. Hatta Wilkie (2014) görev yapan öğretmenlerin de örüntülerdeki fonksiyonel ilişkiyi öğretmek için yeterli öğretme bilgisine sahip olmadığını vurgulamıştır. Depeape ve arkadaşlarının (2015) da belirttiği gibi ÖA'ların öğretimle ilgili tecrübelerinin az olması bu durumun sebeplerinden biri olabilir. Bununla birlikte drama tekniğini öneren ÖA'lar bu tekniği sınıftaki sıraları kullanarak ve öğrencilere rol vererek nasıl yapacaklarını yeterli bir şekilde açıklayabilmişlerdir. Şekil örüntülerinde şeklin değişimini göstermek için drama farklı ve etkili bir teknik olabilir.

Öğrenciler farklı düşünce şemalarına sahip olabileceği için öğretmen adaylarının genelleştirmede sayısal akıl yürütmelerinin yanında şekilsel düşünmeleri de geliştirilebilir. Öğrencilere ait gerçek veya temsili çözümler, özel öğretim yöntemleri derslerinde öğrencilerin anlayışlarını ve kavramlarını analiz etmek için kullanılabilir. Carpenter ve Fennema (1992), öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini geliştirmede, öğrencilerin anlamalarını ve kavramalarını analiz etmenin önemini vurgular. Ayrıca, kavram yanılgıları üzerinde çalışırken öğrenci-öğretmen etkileşimini içeren video temelli öğretimden de yararlanılabilir. Öğretmen adaylarının bilgilerinin geliştirilmesinin yanı sıra, öğretim pratiklerinin de öğretmenlik uygulama derslerinde iyileştirmesi amaçlanmalıdır.

5. KAYNAKLAR

Akyüz, D., Coşkun, Ş., & Hacıömerliğlu, E. S. (2009). An investigation into two preservice teachers' use of different representations in solving a pattern task. In Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1261-1265). Atlanta, GA: Georgia State University.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 145-172.

Aslan-Tutak, F. & Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. In E. Bingölbali, A. Arslan, & İ. Ö. Zembat (Eds.). *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 701- 719). Ankara: Pegem Akademi.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389- 407.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization schemes in algebra of beginning high school students. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for psychology of mathematics education* (vol. 4, pp. 121–128). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers: Algebra eyes and ears, *Teaching children mathematics, 10,* 70-77.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2*0*(4). 309-333.

Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Educational Research*, *17*(5), 457-470.

Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education, 44*, 263-272.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Çayır, M. Y., & Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 9*(2), 205-229.

Depeape, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education, 47*, 82-92.

El Mouhayar, R. R., & Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 379-396.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Girit, D. & Akyüz, D. (2016). Algebraic thinking in middle school students at different grades: Conceptions about generalization of patterns. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 10*(2), 243-272.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Eds.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-83). London: Cassell.

Herbert, K., & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3,* 340-344.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

İmre, S. Y., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(3), 207-226.

Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 75-92.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, 4*, 33-56.

Kirwan, J. V. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks* (Unpublished Doctoral Dissertation). Illinois State University, ABD.

Magiera, M. T., van den Kieboom, L. A., & Moyer, J. C. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 93–113.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2009). The analysis of classroom-based processes as a key task in teacher training for the approach to early algebra. In B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 235–262). Berlin: Springer.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation: Revised and expanded from qualitative research and case study applications in education*. San Franscisco: Jossey-Bass.

Milli Eğitim Bakanlığı (2017). *İlkokul ve ortaokul 1-8.sınıflar matematik öğretim programı.* 15 Ekim 2017 tarihinde, http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=191 adresinden alınmıştır.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S., & Shillolo, G. (2008). "What is your theory? what is your rule?" fourth graders build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: 70th NCTM Yearbook* (pp. 155–168). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalization of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83–96.

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research, 80*(3), 372–400.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 26,* 140–155.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet.* London: Sage.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Strauss, A. L. & Corbin, J. (1990*). Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques.* Newburry Park, CA: Sage.

Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim, 36*(160).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, (Ed.). *The ideas of algebra, K-12. 1988 Yearbook* (pp. 8-19). Reston, VA; National Council of Teachers of Mathematics.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns, *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 56-71.

Warren, E. A., Cooper, T. J., & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 208-223.

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(5), 397-428.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9.baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 379–402.