
Araştırma Makalesi / Research Article

Değişken gecikmeli kısıtlı stokastik kontrol geçiş sistemleri için regülatör problemi

Çerkez AĞAYEVA^{1,2*}

¹Muş Alparslan Üniversitesi, İktisat Bölümü, 49250, Muş

²Institute of Control, Azerbaijan National Academy of Science, Baku
(ORCID: 0000-0003-0507-9785)

Öz

Bu makalede, doğrusal stokastik denklemler sınıfıyla ifade olunan geçiş sistemleri ele alınmıştır. Gecikmeli faz ve kontrol parametreleri içeren diferansiyel denklemler için karesel amaç fonksiyonu olan optimal kontrol problemi oluşturulmuş ve sağ uç noktasında kısıta sahip olan durum için optimizasyon problemi incelenmiştir. Literatürde Doğrusal Karesel Regülatör olarak bilinen ve sabit katsayılı stokastik diferansiyel denklemlerle ifade olunan bu problemin optimallığı için yeter ve gerek koşul, maksimum prensibi şeklinde ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra geçiş sistemleri için önemli olan geçiş noktalarının bulunması için karşılıklı koşulları bulunmuştur. Sonuçta ise Doğrusal Karesel Regülatör problemleri için önem taşıyan optimal kontrolün geri dönüşüm şekli bulunmuştur. Çözümü, Riccati denklemleriyle ifade olunan geri dönüşüm problemi, bu çalışmada değişken gecikmeli stokastik sistemler için uygulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Optimal kontrol problemi, gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler, geçiş sistemleri, Riccati denklemleri.

Regulator problem of restricted stochastic switching systems with variable delay

Abstract

In this paper, the switching systems expressed by the class of linear stochastic differential equations are discussed. For the differential equations containing the delayed phase and delayed control parameters, the optimal control problem with the quadratic cost function is constructed. Stochastic optimization problem is examined for the systems with the the right end point restriction. Linear Quadrature Regulator problem expressed by the stochastic differential equations is investigated. Necessary and sufficient condition in terms of maximum principle has been proven. In addition, transversation conditions have been found to establish the transition points that are important for the switching systems. It is well known that, the feedback form of optimal control important for the Linear Quadrature Regulator problems. The solution of feedback problem directly relate with Riccati equations. Mentioned problem is solved for the stochastic differential equation with variable delay.

Keywords: Optimal control problem, stochastic differential equation with delay, switching systems, Riccati equations.

1. Giriş

Gerçek problemlerde karşılaştığımız sistemlerin dinamiğinin belirlenmesinde geçmiş bilgilerin önemi bir çok çalışmada öne sürülmektedir [1]. Bu sistemlerin ifade olunması için kullanılan matematiksel modeller içerisinde gecikmeli diferansiyel denklemler öne çıkmaktadır. Aynı zamanda bir çok biyoloji, tıp, ekonomi, mekanik vb. alanlarda karşılaştığımız bir sıra sistemlerin tanımlanmasında belirsizlikleri göz önünde bulundurulmak zarureti duyulmaktadır [2-6]. Son zamanlarda yukarıda belirtilen iki önemli

*Sorumlu yazar: c.agayeva@alparslan.edu.tr

Geliş Tarihi: 15.10.2019, Kabul Tarihi: 16.06.2020

özelliği içeren sistemlerin incelenmesi için yapılan araştırmalara sık sık rastlanmaktadır [7-9]. Son birkaç yıl içinde, özellikle hayat ve hayat dışı sigortalardan, matematiksel finanstan, sağlık, ekonomi ve teknik sistemlerden kaynaklanan stokastik optimizasyon problemleri önemli ölçüde gelişmiştir.

Rastgele etkilere ve zaman gecikmesine maruz kalan dinamik sistemlerin kontrol teorisi üzerine yapılan araştırmalara örnek olarak, Ağayeva ve Allahverdiyeva [10], Balakrishnan [11], Chernousko ve Ananievski [12], Federico ve ark. [13], Larssen [14] çalışmaları gösterilebilir.

Doğrusal kontrol problemi, doğrusal stokastik diferansiyel denklemlerle ifade olunan ve belirli amaç fonksiyonunun en iyi değerinin bulunmasına dayanan ilk optimal kontrol problemi olarak bilinmektedir [15-18].

Bu problemlerin özel hali olan doğrusal karesel regülatör problemi, literatürdeki en çok çalışılan kontrol problemlerinden biri olmasına rağmen, düzgün ve düzgün olmayan doğrusal sistemler için hala açık kalan çeşitli optimal kontrol problemleri mevcuttur [19-21].

Düzgen olmayan hibrit sistemlerinin özel sınıfı olarak tanımlanan geçiş sistemleri, sürekli değişime sahip dinamiklerin modellenmesinde geniş şekilde kullanılmaktadır. Boukas [22], Kharatashvili ve Tadumadze [23], Tadumadze ve Arsenashvili [24], Aghayeva [25], Abushov ve Aghayeva [26], Ağayeva [27] ve benzer çalışmalarda bu sistemlerle bağlı çeşitli problemler ele alınmıştır.

Bu makalede değişken gecikmeli doğrusal stokastik diferansiyel denklemlerle ifade olunan sistemler için optimal kontrol problem ele alınmıştır. Sistemin sağ uç noktalarındaki kısıtlar da dikkate alınarak, optimal çözüm için gerek ve yeter koşul bulunmuştur.

2. Materyal ve Metot

2.1. Problemin tanımlanması ve ön bilgiler

Bu bölümde, çalışmada kullanılan notasyon ve tanımları belirledik. N pozitif bir sabit olsun; R^n ile n boyutlu gerçek vektör uzayını, $|\cdot|$ ile Öklid normunu ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile skaler çarpımı işaretlenmiştir. Beklenen değer E olarak, $\{1, \dots, s\}$ tam sayılarının kümesi ise $\overline{1, s}$ olarak gösterilmiştir; ' simgesi türevi, * - matrisler için transpose işlemini ifade etmektedir.

Varsayalım ki, $F_t^l = \bar{\sigma}(w_q^l, t_{l-1} \leq t \leq t_l)$, $l = \overline{1, s}$, bağımsız $w^1(t), w^2(t), \dots, w^s(t)$ Wiener süreçlerinin ürettiği akımlar; (Ω, F^l, P) , $l = \overline{1, s}$ ise $\{F_t^l, t \in [t_{l-1}, t_l]\}$ akımlarının oluşturduğu olasılık uzayı olsun. $E \int_a^b |x(t, \omega)|^2 dt < +\infty$ koşulunu sağlayan tüm öngörülebilir stokastik süreçler uzayını $L_{F^l}^2(a, b; R^n)$ olarak gösterilmiştir. R^m 'den R^n 'e yansıyan tüm lineer dönüşümler ise $R^{m \times n}$ gibi gösterilmiştir.

$U = U^1 \times U^2 \times \dots \times U^s$ ve $\pi^i = (t_0, \dots, t_i, x_{t_1}^1, \dots, x_{t_i}^1, u^1, \dots, u^i)$ elemanlarından oluşan kümeler $A_i = T^{i+1} \times \prod_{j=1}^i O_j \times \prod_{j=1}^i U^j$ olarak gösterilmiştir.

$O_l \subset R^{n_l}, Q_l \subset R^{m_l}$ açık kümeler; $T = [0, T]$ sonlu aralık ve $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = T$ olsun.

Varsayalım ki, $A^l, B^l, L^l, Q^l \in R^{n_l \times n_l}, C^l, D^l \in R^{n_l \times m_l}, \Phi^l, K^l \in R^{n_l}$ sonlu deterministik matrisler, $G^l, M^l \in R^{n_l \times n_l}$ yarı-kesin positif, $N^l \in R^{m_l \times m_l}$ kesin positif deterministik matrislerdir. Aksi belirtilmediği sürece makalede $t = (t_0, t_1, \dots, t_s)$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^s)$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^s)$ gösterimleri kullanılacaktır.

Aşağıdaki şekilde tanımlanan doğrusal geçiş sistemini ele alalım:

$$dx^l(t) = [A^l x^l(t) + B^l x^l(t - h(t)) + C^l u^l(t) + D^l u^l(t - h(t))]dt + [L^l x^l(t) + Q^l x^l(t - h(t))]dw^l(t), \quad (1)$$

$$x^{l+1}(t) = \Phi^l x^l(t) + K^l, t \in [t_l - h(t_l), t_l], l = \overline{1, s-1}, \quad (2)$$

$$x^1(t) = K^0, t \in [t_0 - h(t_0), t_0], \quad (3)$$

$$u^l(t) \equiv u^l(t, \omega) \in U^l_0 \equiv \{u^l(\cdot, \cdot) \in L^2_{F^l}(t_{l-1}, t_l; R^{m_l}) | u^l(t, \cdot) \in U^l \subset R^{m_l}\} . \quad (4)$$

Burada $U^l, l = \overline{1, s}$ boş olmayan sonlu kümelerdir. U^l_0 kümelerinin elemanlarını mümkün kontroller olarak tanımlayalım. Problem, (1)-(3) sisteminin (4) mümkün kontroller kümesinde tanımlanan çözümleri için,

$$J(u) = E \sum_{l=1}^s \{ \langle G^l x^l(t_l), x^l(t_l) \rangle + \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\langle M^l x^l(t), x^l(t) \rangle + \langle N^l u^l(t), u^l(t) \rangle) dt \} \quad (5)$$

amaç fonksiyonunu

$$E \langle q^s(t_s), x^s(t_s) \rangle \in G \quad (6)$$

koşulu altında minimize eden, $(x^1, x^2, \dots, x^s, u^1, u^2, \dots, u^s)$ optimal çözümün ve t_1, t_2, \dots, t_s geçiş dizisinin bulunmasından oluşmaktadır.

Burada $h(t) > 0, t \in [t_0, t_s]$ sürekli diferansiyellenen deterministik fonksiyon olup, $\frac{dh(t)}{dt} < 1$ koşulunu sağlamaktadır, G ise boş olmayan kapalı konveks kümedir.

Tanım 1. Eğer $x^l(t) \in O_l$ fonksiyonu $t \in [t_l - h(t_l), t_l]$ aralığında (2), (3) koşullarını tatmin ediyorsa ve nerdeyse tüm $[t_{l-1}, t_l]$ aralığında 1 olasılığıyla mutlak süreklilyse, o zaman $\{x^l(t) = x^l(t, \pi^l), t \in [t_l - h(t_l), t_l], l = \overline{1, s}\}$ fonksiyoneller kümesi (1) doğrusal stokastik diferansiyel denkleminin $\pi^s \in A_s$ elemanına uygun gelen çözümdür denir.

Tanım 2. $(x^l(t), u^l(t)), t \in [t_{l-1} - h(t_{l-1}), t_l], l = \overline{1, s}$ çiftleri (1)-(4) geçiş sisteminin çözümüyse ve (6) koşulunu sağlıyorsa, $\pi^s \in A_s$ 'ye mümkün eleman denir.

Tüm mümkün elemanlar kümesi A_s^0 olarak tanımlayalım.

Tanım 3. Eğer $\tilde{u}^l, l = \overline{1, s}$ mümkün kontrolleri ve (1)-(4), (6) sisteminin ona uygun gelen $\tilde{x}^l, l = \overline{1, s}$ çözümleri varsa ki, $(\tilde{x}^l, \tilde{u}^l)$ çiftleri (5) fonksiyonunu minimize ediyor, $\tilde{\pi}^s \in A_s^0$ elemanına (1)-(6) probleminin optimal çözümü denir.

2.2. Doğrusal geçiş sistemleri için optimallık koşulu

Ele alınan (1)-(6) kısıtlı stokastik optimal kontrol probleminin çözümü için önce (1)-(5) kısıtsız optimizasyon probleminin incelenmesi gerekiyor. Aşağıdaki teorem stokastik geçiş sistemleri için ele alınan (1)-(5) doğrusal regülatör problemi için gerek ve yeter koşulu ifade ediyor. Teoremin ispatı, Ağayeva [27] çalışmasındaki yaklaşımlara benzer yöntemler izlenmekle, Ağayeva ve Takan [28] makalesinde verilmiştir.

Teorem 1 ([28]). Varsayalım ki, $(\psi^l(t), \beta^l(t)) \in L^2_{F^l}(t_{l-1}, t_l; R^{n_l}) \times L^2_{F^l}(t_{l-1}, t_l; R^{n_l \times n_l})$ rassal süreçleri

$$\left\{ \begin{array}{l} d\psi^l(t) = -[A^{l*}\psi^l(t) + B^{l*}\psi^l(r(t))r'(t) + L^{l*}\beta^l(t) + Q^{l*}\beta^l(r(t))r'(t) - M^lx^l(t)]dt \\ \quad + \beta^l(t)dw^l(t), \quad t \in [t_{l-1}, t_l - h(t_l)], \quad l = \overline{1, s} \\ d\psi^l(t) = -[A_t^{l*}\psi^l(t) + B^{l+1*}\psi^{l+1}(t)\Phi^l + L_t^{l*}\beta^l(t) + Q^{l+1*}\beta^{l+1}(t)\Phi^l - M^lx^l(t)]dt \\ \quad + \beta^l(t)dw^l(t), \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l], \quad l = \overline{1, s} \\ \psi^l(t_l) = -G^lx^l(t_l) + \Phi^{l*}\psi^{l+1}(t_l), \quad l = \overline{1, s-1} \\ \psi^s(t_s) = -G^sx^s(t_s); \end{array} \right. \quad (7)$$

stokastik denklemler sisteminin çözümleridir ve burada $\tau = r(\tau)$ fonksiyonu $\tau = t - h(t)$ denkleminin çözümüdür. Bu zaman $\pi^s = (t_0, \dots, t_s, x_t^1, \dots, x_t^s, u^1, \dots, u^s)$ elemanının (1)-(5) probleminin optimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerdir:

a) $u^l(t)$, $l = \overline{1, s}$ optimal kontrol adayları aşağıdaki gösterimle belirleniyor:

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{l*}u^l(t) = C^{l*}\psi^l(t) + D^{l*}\psi^l(r(t))r'(t), \quad t \in [t_{l-1}, t_l - h(t_l)] \\ N^{l*}u^l(t) = C^{l*}\psi^l(t), \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l] \end{array} \right. \quad (8)$$

b) Tüm t_1, t_2, \dots, t_{s-1} noktaları için:

$$\begin{aligned} \psi^l(t_l)[A^lx^l(t_l) + B^lx^l(t_l - h(t_l)) + C^lu^l(t_l) + D^lu^l(t_l - h(t_l))] + \beta^l(t_l)[L^lx^l(t_l) + \\ Q^lx^l(t_l - h(t_l))] = \psi^{l+1}(t_l)[A^{l+1}x^{l+1}(t_l) + B^{l+1}x^{l+1}(r(t_l))r'(t_l) + \\ C^{l+1}u^{l+1}(t_l) + D^{l+1}u^{l+1}(r(t_l))r'(t_l)] + \beta^{l+1}(t_l)[L^{l+1}x^{l+1}(t_l) + Q^{l+1}x^{l+1}(r(t_l))r'(t_l)] \end{aligned} \quad (9)$$

geçiş kuralları sağlanmaktadır.

Şimdi Teorem 1'e dayanarak (1)-(6) eşitlikleriyle tanımlanan kısıtlı stokastik regülatör problemini inceleyelim. Kullanacağımız yaklaşımda ihtiyacımız olacak Ekeland Varyasyon Prensibini tanımlayalım.

Ekeland varyasyon prensibi (Ekeland, [29]). K tam metrik uzay, $f: K \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ ise alttan sınırlı ve yarısürekli fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında positif ε değeri için

$$f(x_0) \leq \inf f(x) + \varepsilon$$

koşulunu sağlasın. Bu zaman keyfi $\lambda > 0$ için $\exists \bar{x} \in K$ noktası var ki,

- 1) $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$,
- 2) $d(x_0, \bar{x}) \leq \lambda$,
- 3) $\forall x \neq \bar{x}$ için

doğru oluyor.

Teorem 2. Varsayalım ki, $(\psi^l(t), \beta^l(t)) \in L_{F^l}^2(t_{l-1}, t_l; R^{n_l}) \times L_{F^l}^2(t_{l-1}, t_l; R^{n_l \times n_l})$ rassal süreçleri ve $\lambda = (\lambda_0^s, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^s)$, $\lambda_0^s \leq 0$ vektörü:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\psi^l(t) = -[A^{l*}\psi^l(t) + B^{l*}\psi^l(r(t))r'(t) + L^{l*}\beta^l(t) + Q^{l*}\beta^l(r(t))r'(t) - M^lx^l(t)]dt \\ \quad + \beta^l(t)dw^l(t), \quad t \in [t_{l-1}, t_l - h(t_l)], \quad l = \overline{1, s} \\ d\psi^l(t) = -[A_t^{l*}\psi^l(t) + B^{l+1*}\psi^{l+1}(t)\Phi^l + L_t^{l*}\beta^l(t) + Q^{l+1*}\beta^{l+1}(t)\Phi^l - M^lx^l(t)]dt \\ \quad + \beta^l(t)dw^l(t), \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l], \quad l = \overline{1, s} \\ \psi^l(t_l) = -\lambda_1^l G^lx^l(t_l) + \Phi^{l*}\psi^{l+1}(t_l), \quad l = \overline{1, s-1} \\ \psi^s(t_s) = -\lambda_1^s G^sx^s(t_s) - \lambda_0^s q^s(t_s); \end{array} \right. \quad (10)$$

eşlenik stokastik denklemler sisteminin çözümü olsun. Bu durumda;

$\pi^s = (t_0, \dots, t_s, x_t^1, \dots, x_t^s, u^1, \dots, u^s)$ elemanın (1)-(6) probleminin optimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul, (8), t_1, \dots, t_{s-1} noktalarında (9) ve t_s noktasında ise:

$$\begin{aligned} \psi^s(t_s)[A^s x^s(t_s) + B^s x^s(t_s - h(t_s)) + C^s u^s(t_s) + D^s u^s(t_s - h(t_s))] \\ + \beta^s(t_s)[L^s x^s(t_s) + Q^s x^s(t_s - h(t_s))] + q_t^s(t_s) = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

eşitliklerinin doğru olmasıdır. Burada $q_t^s(t_s)$ ile $q^s(t)$ fonksiyonunun t_s noktasındaki türevi gösterilmektedir.

İspat. Her bir pozitif j tam sayısı için,

$$I_j(u) = \min_{(c,y) \in \varepsilon} \sqrt{\sum_{l=1}^s |c^l - 1/j - ES^l(x, u, t)|^2 + |y - E(q^s(t_s), x^s(t_s))|^2}$$

şeklinde yaklaşık fonksiyonu tanımlayalım. Burada $\varepsilon = \{c: c \leq J^0, y \in G\}$, $c = c^1 + \dots + c^s$, $S^l(x, u, t) = \langle G^l x^l(t_l), x^l(t_l) \rangle + \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\langle M^l x^l(t), x^l(t) \rangle + \langle N^l u^l(t), u^l(t) \rangle) dt$ ve J^0 ise (1)-(5) probleminde fonksiyonelin minimal değerini ifade ediyor. Varsayalım ki, $V \equiv (V^1, \dots, V^r)$, nerede ki, $V^k \equiv (U^k, d)$, $d(u^k, v^k) = (l \otimes P)\{(t, \omega) \in [t_{k-1}, t_k] \times \Omega: v_t^k \neq u_t^k\}$ metriğine göre tanımlanan kontroller uzayıdır. Ekeland Varyasyon Prensibine göre, $\exists u_t^{l,j}: d(u_t^{l,j}, u_t^l) \leq \sqrt{\varepsilon_j^l}$ kontrolü var ki, $\forall u_t^l \in V^l$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$I_j(u^j) \leq I_j(u) + \frac{1}{j} d(u^j, u), \quad d(u^j, u) = \sum_{l=1}^s d(u^{l,j}, u^l).$$

Böylece, kısıtsız

$$\left\{ \begin{aligned} J_j(u) &= I_j(u^j) + E \sum_{l=1}^s \sqrt{\varepsilon_j^l} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \delta^l(u_t^l, u_t^{l,j}) dt \rightarrow \min \\ dx_t^{l,j} &= [A^l x^{l,j}(t) + B^l x^{l,j}(t - h(t)) + C^l u^{l,j}(t) + D^l u^{l,j}(t - h(t))] dt + \\ &\quad [L^l x^{l,j}(t) + Q^l x^{l,j}(t - h(t))] dw^l(t), \quad t \in (t_{l-1}, t_l] \\ x_t^{1+1,j} &= \Phi^l x^{l,j}(t) + K^l, \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l], \quad l = 1, \dots, s - 1, \\ x_t^{1,j} &= K^0, \quad t \in [t_0 - h(t_0), t_0], \quad u_t^l \in U_\partial^l \end{aligned} \right. \quad (12)$$

doğrusal stokastik kontrol probleminin çözümünü $(t_0, t_1, \dots, t_r, x_t^{1,j}, \dots, x_t^{r,j}, u_t^{1,j}, \dots, u_t^{r,j})$ olarak göstereyim.

Varsayalım ki, $\psi_t^{l,j} \in L_{F^l}^2(t_{l-1}, t_l; R^{n_l})$, $\beta_t^{l,j} \in L_{F^l}^2(t_{l-1}, t_l; R^{n_l \times n_l})$ rassal süreçleri ve sıfır olmayan $(\lambda_0^{s,j}, \lambda_1^{1,j}, \dots, \lambda_1^{s,j})$ vektörleri var ki,

$$\left\{ \begin{aligned} d\psi^{l,j}(t) &= -[A^{l*}\psi^{l,j}(t) + B^{l*}\psi^{l,j}(r(t))r'(t) + L^{l*}\beta^{l,j}(t) + Q^{l*}\beta^{l,j}(r(t))r'(t) - \\ &\quad - M^l x^{l,j}(t)] dt dx_t^{l,j} = +\beta^{l,j}(t)dw^l(t), \quad t \in [t_{l-1}, t_l - h(t_l)], \quad l = \overline{1, s} \\ d\psi^{l,j}(t) &= -[A^{l*}\psi^{l,j}(t) + B^{l+1*}\psi^{l+1,j}(t)\Phi^l + L_t^{l*}\beta^{l,j}(t) + Q^{l+1*}\beta^{l+1,j}(t)\Phi^l \\ &\quad - M^l x^{l,j}(t)] dt + \beta^{l,j}(t)dw^l(t), \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l], \quad l = \overline{1, s} \\ \psi^{l,j}(t_l) &= -\lambda_1^{l,j} G^l x^{l,j}(t_l) + \Phi^{l*}\psi^{l+1,j}(t_l), \quad l = \overline{1, s-1} \\ \psi^{s,j}(t_s) &= -\lambda_1^{s,j} G^s x^{s,j}(t_s) - \lambda_0^{s,j} q^s(t_s); \end{aligned} \right. \quad (13)$$

sisteminin çözümüdürler. $(\lambda_0^{s,j}, \lambda_1^{1,j}, \dots, \lambda_1^{s,j})$ vektörü

$$(-y + E q^s x^{s,j}(t_s), -c^1 + \varepsilon_j^1 + ES^1(x^1, u^1, t), \dots, -c^s + \varepsilon_j^s + ES^s(x^s, u^s, t))/J_j^0 \quad (14)$$

ifadesiyle ve

$$J_j^0 = (\sum_{l=1}^s |c^l - 1/j - ES^l(x^l, u^l, t)|^2 + |y - E(q^s(t_s), x^{s,j}(t_s))|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

olarak tanımlanmışlar.

Bu durumda Teorem 1'e dayanarak, aşağıdaki sonuca varmış oluyoruz:

$u^{l,j}(t), l = \overline{1, s}$ elemanları (12) kontrol probleminin optimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{cases} N^{l*}u^{l,j}(t) = C^{l*}\psi^{l,j}(t) + D^{l*}\psi^{l,j}(r(t))r'(t), \quad t \in [t_{l-1}, t_l - h(t_l)] \\ N^{l*}u^{l,j}(t) = C^{l*}\psi^{l,j}(t), \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l] \end{cases} \quad (15)$$

sağlanmasıdır. Bunun yanı sıra , tüm t_1, t_2, \dots, t_{s-1} noktaları için:

$$\begin{aligned} &\psi^{l,j}(t_l)[A^l x^{l,j}(t_l) + B^l x^{l,j}(t_l - h(t_l)) + C^l u^{l,j}(t_l) + D^l u^{l,j}(t_l - h(t_l))] \\ &\quad + \beta^{l,j}(t_l)[L^l x^{l,j}(t_l) + Q^l x^{l,j}(t_l - h(t_l))] = \\ \psi^{l+1,j}(t_l)[A^{l+1} x^{l+1,j}(t_l) + B^{l+1} x^{l+1,j}(r(t_l))r'(t_l) + C^{l+1} u^{l+1,j}(t_l)u^{l+1,j}(r(t_l))r'(t_l)] \\ &\quad + \beta^{l+1,j}(t_l)[L^{l+1} x^{l+1,j}(t_l) + Q^{l+1} x^{l+1,j}(r(t_l))r'(t_l)]; \end{aligned} \quad (16)$$

ve t_s noktasında ise:

$$\begin{aligned} &\psi^{s,j}(t_s)[A^s x^{s,j}(t_s) + B^s x^{s,j}(t_s - h(t_s)) + C^s u^{s,j}(t_s) + D^s u^{s,j}(t_s - h(t_s)) \\ &\quad + \beta^{s,j}(t_s)[L^s x^{s,j}(t_s) + Q^s x^{s,j}(t_s - h(t_s))] + q_t^s(t_s) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

geçiş koşullarını sağlanmış oluyor.

Eşitlik (14)'den $|\lambda_0^{s,j}|^2 + \sum_{l=1}^s \langle \lambda_1^{l,j}, \lambda_1^{l,j} \rangle = 1$ olduğunu ve $(\lambda_0^{s,j}, \lambda_1^{1,j}, \dots, \lambda_1^{s,j}) \rightarrow (\lambda_0^s, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^s)$ eğer $j \rightarrow \infty$ yakınsaklığını elde etmiş oluruz.

Aynı zamanda $I_j(u)$ konveks fonksiyonunun $(ES^{1,j}(x, u, t), \dots, ES^{s,j}(x, u, t), E(q^s(t_s), x^{s,j}(t_s)))$ noktasında sonlu diferansiyelinin varlığından $\lambda_1^l \leq 0, l = 1, \dots, s$ olduğunu ve $E(q^s(t_s), x^s(t_s))$ noktasında λ_0^s 'ın \mathbf{G} kümesi için normal oluşturduğunu kanıtlamış oluyoruz. Böylece,

$\psi^{l,j}(t_l) = -\lambda_1^{l,j} G^l x^{l,j}(t_l) + \Phi^{l*}\psi^{l+1,j}(t_l)$ ve $\psi^{s,j}(t_s) = -\lambda_0^{s,j} q^s(t_s) - \lambda_1^{s,j} G^s x^{s,j}(t_s)$ ifadelerinden $\psi^l(t_l) = -\lambda_1^l G^l x^l(t_l) + \Phi^{l*}\psi^{l+1}(t_l)$ ve $\psi^s(t_s) = -\lambda_0^s q^s(t_s) - \lambda_1^s G^s x^s(t_s)$ eşitlikleri elde ediliyor. Bununla da, $\psi_t^{l,j}, \beta_t^{l,j}$ dizisinin zayıf limitininin ψ_t^l, β_t^l olduğu sağlanmış oluyor. Nihayet, (15)-(17) ifadelerinde limit alınarak, (8),(9),(11) eşitliklerini doğrulamış oluyoruz.

2.2. Gecikmeli stokastik sistemler için Riccati denklemi

Doğrusal Karesel Regülatör problemlerinin önemli yönü optimal kontrolün geri dönüşüm şeklinde ifadesinin oluna bilinmesidir. Bir başa Riccati denklemleriyle ilişkili olan problem, bu çalışmada değişken gecikmeli stokastik sistemler için Teorem 2’de eşitlik (8) ile ifade olunan optimal kontrolü ileri diferansiyel denklemlerle formüle etmekten ibarettir. Ele alınan regülatör probleminde geri dönüşüm förmülü için, (10) stokastik eklenik denkleminin çözümü faz değişkenlerinin doğrusal fonksiyonu olarak 1 olasılıkla aşağıdaki gibi aranacaktır:

$$\psi^l(t) = -p^l(t)x^l(t) \quad , \quad l = \overline{1, s} \tag{18}$$

Amacımız, bilinmeyen $p^l(t)$, $l = 1, \dots, s$ rassal süreçlerinin şeklini $dp^l(t) = \alpha^l(t)dt + \gamma^l(t)dw^l(t)$, $l = 1, \dots, s$

şeklinde tanımlayıp, uygun Riccati denklemlerini bulmaktadır. tokastik süreçlerin zamana göre diferansiyelinin bulunması için bilinen İto formülüne [3], dayanarak (18) eşitliğinden ve (1) denklemden:

$$\begin{aligned} -d\psi^l(t) &= dp^l(t)x^l(t) + p^l(t)dx^l(t) + \gamma^l(t)L^lx^l(t) + \gamma^l(t)Q^lx^l(t-h(t))dt = \\ &dp^l(t)x^l(t) + p_t^l[A^lx^l(t) + B^lx^l(t-h(t)) + C^l(t)u^l(t) + D^l(t)u^l(t-h(t))]dt + \\ &\gamma^l(t)[L^lx^l(t) + Q^lx^l(t-h(t))]dt + p^l(t)[L^lx^l(t) + Q^lx^l(t-h(t))]dw^l(t). \end{aligned} \tag{19}$$

Her bir $l = \overline{1, s}$ için (10) denklemine göre:

$$\begin{aligned} &\int_{t_{l-1}}^{t_l-h} [A^{l*} \psi^l(t) + D^{l*} \beta^l(t) + B^{l*} \psi^l(r(t))r'(t) - M^lx^l(t)]\chi_l dt + \int_{t_l}^{t_l-h} [A^{l*} \psi^l(t) + D^{l*} \beta^l(t) \\ &+ B^{l+1*} \psi^{l+1}(r(t))r'(t)\Phi^l - M^lx^l(t)](1 - \chi_l)dt - \int_{t_{l-1}}^{t_l} \beta^l(t)dw^l(t) = \\ &\int_{t_{l-1}}^{t_l} [\alpha^l(t)x^l(t) + p^l(t)A^lx^l(t) + p^l(t)B^lx^l(t-h(t)) + p^l(t)C^lu^l(t) + p^l(t)D^lu^l(t-h(t)) \\ &+ \gamma^l(t)L^lx^l(t) + \gamma^l(t)Q^lx^l(t)h(t)]dt \\ &+ \int_{t_{l-1}}^{t_l} [\gamma^l(t)x^l(t) + p^l(t)L^lx^l(t) + p^l(t)Q^lx^l(t-h(t))] dw^l(t) \end{aligned}$$

elde etmiş oluruz. Burada χ_l ise $[t_{l-1}, t_l - h(t_l)]$ aralığının gösterge fonksiyonudur.

Son işlemleri dikkate alarak, optimal kontrol için

$$\begin{cases} N^{l*}u^{l,j}(t) = C^{l*}p^l(t) + D^{l*}p^l(t-h(t)), x^l(t-h(t)), \quad t \in [t_{l-1}, t_l - h(t_l)] \\ N^{l*}u^l(t) = C^{l*}p^l(t), x^l(t) \quad t \in [t_l - h(t_l), t_l] \end{cases}$$

şeklinde geri dönüşüm ifadesini elde etmiş oluruz ki, buradaki (p_t^l, γ_t^l) rassal süreçleri aşağıdaki Riccati denkleminin çözümüdür:

$$\begin{aligned} dp^l(t) &= -[p^l(t)A^l + A^{l*}p^l(t) + \gamma^l(t)L^l + L^{l*}\gamma^l(t) + L_t^{l*}p^l(t)L^l + p^l(r(t))r'(t)B^l + \\ &B^{l*}p^l(r(t))r'(t) + \gamma^l(r(t))r'(t)Q^l + Q^{l*}\gamma^l(r(t))r'(t) + M^l - p^l(t)C^l(N^{l*})^{-1}C^{l*}p^l(t)]dt \\ &+ \gamma^l(t)dw^l(t), \quad [t_{l-1}, t_l - h] . \end{aligned}$$

$$dp^l(t) = -[p^l(t)A^l + A^{l*} p^l(t) + \gamma^l(t)L^l + L^{l*} \gamma^l(t) + L_t^{l*} p^l(t)L^l + M^l - p^l(t)C^l(N^{l*})^{-1}C^{l*} p^l(t)]dt + \gamma^l(t)dw^l(t), (t_l - h(t_l), t_l].$$

3. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, düzgen olmayan rassal sistemler için değişken gecikmeli optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. Optimal çözüm için gerek ve yeter koşulu ifade eden Teorem 2, incelenen regülatör probleminde durum ve kontrol değişkenleri arasında olan geri dönüşümü göstermektedir. Bu bilgiye dayanarak çalışmada optimal kontrol için açık analitik ifade alınmıştır. Makalede ele alınan problem Ağayeva ve Abushov [30] çalışmasının düzgen olmayan sistemler, Ağayeva ve Takan [28] makalesindeki modelin gecikmeli kontrol içeren durum için geliştirilmiş hali olarak kabul oluna bilir. Belirtilen çalışmalardaki sonuçlar ise, bu makaledeki (6), (9), (10) ve (11) eşitlikleriyle tanımlanan optimallik koşullarının özel durumu olarak yorumlana bilir.

Yazarların Katkısı

Çalışmada tüm katkı yazara aittir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

- [1] Kolmanovsky V., Myshkis A. 1992. Applied Theory of Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-234.
- [2] Anderson B., Ilchmann A., Wirth F. 2013. Stabilizability of time-varying linear systems. Systems and Control Letters, 62: 747-755.
- [3] Gikhman I., Skorokhod A. 1972. Stochastic Differential Equations. Springer, Berlin, 1-356.
- [4] Hoek J., Elliott R. 2012. American option prices in a Markov chain model. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 28: 35-39.
- [5] Mao X. 2007. Stochastic Differential Equations and Their Applications. Horwood Publication House, Chichester, 440.
- [6] Shen H., Xu Sh., Song X., Luo J. 2009. Delay-dependent robust stabilization for uncertain stochastic switching system with distributed delays. Asian Journal of Control, 5: 527-535.
- [7] Chojnowska-Michalik A. 1978. Representation theorem for general stochastic delay equations. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 7: 635-642 .
- [8] Elsanosi I., Øksendal B., Sulem A. 2000. Some solvable stochastic control problems with delay. Stochastics and Stochastics Reports, 1-2: 69-89 .
- [9] Kohlmann M., Zhou X. 2000. Relationship between backward stochastic differential equations and stochastic controls: A linear-quadratic approach. SIAM, Journal on Control and Optimization, 38: 1392-1407.
- [10] Ağayeva C., Allahverdiyeva J. 2007. On one stochastic optimal control problem with variable delays. Theory of stochastic processes, 13: 3-11.
- [11] Balakrishnan A. 1975. A note on the structure of optimal stochastic control. Applied Mathematics and Optimization, 1: 87-94.
- [12] Chernousko F., Ananievski I., Reshmin S. 2008. Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications (Communication and Control Engineering). Springer, Berlin, 1-396.

- [13] Federico S., Golds B., Gozzi F. 2011. HJB equations for the optimal control of differential with delays and state constraints, II: optimal feedbacks and approximations. *SIAM, Journal on Control and Optimization*, 49: 2378-2414.
- [14] Larssen B. 2002. Dynamic programming in stochastic control of systems with delay. *Stochastics and Stochastics Reports*, 3-4: 651-673 .
- [15] Kalman R. 1960. Contributions to the theory of optimal control. *Boletin De La Sociedad Matematica Mexicana*, 5: 102-119.
- [16] Bellman R. 1955. Functional equations in the theory of dynamic programming, positivity and quasilinearity. *Proceeding of National Academy of Science, USA*, 41: 743-746.
- [17] Bensoussan A., Delfour M., Mitter S. 1976. The linear quadratic optimal control problem for infinite dimensional systems over an infinite horizon; survey and examples. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, December 1-3, Clearwater, USA, 746-751.
- [18] Delfour M.C. 1986. The linear quadratic optimal control problem with delays in state and control variables: a state space approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24: 835-883.
- [19] Ichikawa A. 1982. Quadratic control of evolution equations with delays in control. *SIAM, Journal on Control and Optimization*, 20: 645-668.
- [20] Bismut J.M. 1976. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients. *SIAM, Journal on Control and Optimization*, 14: 419-444.
- [21] Wonham W. 1968. On a matrix Riccati equation of stochastic control. *SIAM, Journal on Control and Optimization*; 6: 312-326.
- [22] Boukas E.-K. 2006. *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*. Birkhauer, Boston, 1-376.
- [23] Kharatishvili G., Tadumadze T. 1997. The problem of optimal control for nonlinear systems with variable structure, delays and piecewise continuous prehistory. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 11: 67-88.
- [24] Tadumadze T., Arsenashvili A. 2008. Optimization of a delay variable structure system with mixed intermediate condition. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2 (3): 22-26.
- [25] Aghayeva Ch. 2014. Necessary condition of optimality for stochastic switching systems with delay. In: *International Conference on Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23-25 September, Saint Petersburg, Russia, 54-58.
- [26] Abushov Q., Aghayeva Ch. 2014. Stochastic maximum principle for the nonlinear optimal control problem of switching systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259: 371-376.
- [27] Ağayeva Ch. 2016. Linear Quadratic Control Problem of Stochastic Switching Systems with Delay. *Anadolu University Journal of Science and Technology-B, Theoretical Sciences*, 4 (2): 52-58.
- [28] Ağayeva Ç., Takan A.M. 2018. Restricted Optimal Control Problem for Stochastic Switching Systems with Variable Delay. *Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 6 (2): 565-569.
- [29] Ekeland I. 1974. On the variational principle. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 47: 324-353.
- [30] Ağayeva Ch., Abushov Q. 2005. Linear-square stochastic optimal control problem with variable delay on control and state. *Transactions ANAS, math.- ph. series, informatics and control problems*, 3: 204-208.