

Kapula Modelinin Belirlenmesinde AIC Değerinin Hatalı Seçimi

Incorrect Model Selection of AIC Value When Determining Copula Model

Öz

Kapular, tesadüfi değişkenler arasındaki bağımlılığı ortaya koyan, tek değişkenli marjinaleri $[0,1]$ üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları kendi tek değişkenli marjinallerine bağlayan fonksiyonlardır. Kapula ile bağımlılık yapısı ortaya konulurken, farklı modeller kurularak aralarından uygun olan tercih edilmelidir. Bu tercih yapılırken kullanılan farklı kriterler mevcuttur. Bu kriterler arasında en çok tercih edilen AIC değeri, farklı gözlem sayılarında ve farklı ilişki seviyelerinde hatalı Kapula modelinin seçilmesine neden olabilmektedir. Bu problemi daha iyi anlamak amacıyla, AIC değerine göre farklı kombinasyonlarda yapılan model tercihleri incelenmiştir. Modeller içerisindeki hatalı tercihler ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Ayrıca hatalı Kapula ailelerini seçmeye yönelik yatkınlıklar ortaya konulmuştur.

Abstract

Copulas are functions that reveal the dependence between random variables, have uniform distribution on univariate margins $[0,1]$ and link multivariate distributions to their univariate margins. When establishing the dependency structure with Copula, different models should be established and the appropriate one among them should be preferred. There are different criteria used to make this choice. Among these criteria, the most preferred AIC value may lead to the selection of incorrect Copula model at different observation numbers and different correlation levels. In order to understand this problem better, model choices made in different combinations according to AIC value were examined. Incorrect selections in the models are discussed in detail. In addition, the predisposition to select incorrect Copula families has been revealed.

Giriş

Marjinal olasılık dağılımları için herhangi bir varsayım gerektirmeyen kapula yaklaşımı, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyar. Bağımlılık yapısının doğru tespit edilebilmesi için doğru kapula modelinin seçilmesi gerekmektedir. Bu seçim yapılırken log-olabilirlik fonksiyonu ile kullanılan AIC (Akaike Information Criteria), en çok kullanılan kriterdir. Bu kriter, oluşturulan kapula yoğunluk fonksiyonunu kullanır ve en düşük AIC değerine sahip olan model tercih edilir.

Bu kriter, kapula seçiminde çokça kullanılsa da özellikle gözlem sayısı ve ilişki kuvveti azaldığında doğru kapula türünü seçmekte zorlanmaktadır. Bu problemin çözülebilmesi için farklı yaklaşımlar önerilebilir. Fakat bu yaklaşımların belirlenebilmesi için, yapılan hatalı seçim işleminin yapısı anlaşılmalıdır. Bu nedenle bu yapının ortaya çıkarılabilmesi için farklı ilişki seviyelerinde ve farklı gözlem sayılarında AIC değerine göre seçilen kapula modellerini incelemek amaçlanmıştır. Bu amaçla parametreleri belirlenen Gaussian kapulaya göre farklı sayıda veriler türetilerek, yapılan hatalı tercihlerin gözlemlenmesi hedeflenmiştir. Böylece AIC'nin farklı gözlem sayısı ve ilişki seviyelerinde doğru kapula modeli (Gaussian) dışındaki kapula türlerine olan yatkınlığının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.



Mervenur Pala

Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi
mervenur.pala1@gmail.com



Fatih Sağlam

Arş. Gör., Ondokuz Mayıs
Üniversitesi
saglamf89@gmail.com



Çağlar Sözen

Dr., Giresun Üniversitesi
cağlar.sozen@giresun.edu.tr

Article Type / Makale Türü

Research Article / Araştırma Makalesi

Anahtar Kelimeler

Kapula, AIC, Model Seçimi

Keywords

Copula, AIC, Model Section

JEL: C10, C13, C15

Submitted: 03 / 10 / 2019

Accepted: 21 / 10 / 2019

2. Materyal ve Metot

2.1. Kapula

Kapular değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirlerken, bazı korelasyon ölçümleri ya da parametrik yöntemlerin sahip olduğu varsayımlara ihtiyaç duymadan, değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu ile marjinalleri arasında bağlantı kurar. Bu sayede, kapula ile değişkenler arasında bağımlılık yapısı belirlenirken diğer taraftan da değişkenlere uygun düşen çok değişkenli dağılım elde edilir. Kapular ile verilerin normal dağılmadığı ya da dağılımın bilinmediği durumlarda çok değişkenli bir modelle, bağımlılık yapısını yansıtan parametreler elde edilebilir.

p -boyutlu bir kapula, uniform (0,1) marjinal dağılımlara sahip, çok değişkenli bir dağılım fonksiyonudur. F_1, F_2, \dots, F_p marjinal dağılımlara sahip H çok değişkenli ortak dağılım fonksiyonu için;

$$H(x) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_p(x_p)) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^p \quad (1)$$

olacak şekilde bir C kapulası mevcuttur (Sklar, 1959). Tüm marjinaller süreklirse C tektir. Sklar teoreminin sonucu olarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_p) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_p^{-1}(u_p)) \quad (2)$$

Burada, $u_i \in [0,1], \forall i = 1, \dots, p$ için $F_i^{-1}(\cdot)$ marjinal dağılımların inversi olmak üzere kapula yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$c(u_1, u_2, \dots, u_p) = \frac{h(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_p^{-1}(u_p))}{\prod_{i=1}^p f_i(F_i^{-1}(u_i))} \quad (3)$$

Burada, $F_i^{-1}(u_i)$ değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(\cdot)$ ve $(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_p^{-1}(u_p))$ değişkeni için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(\cdot)$ 'dir (Fang vd, 2014).

Φ tek değişkenli standart normal dağılım fonksiyonu, Φ_R n -değişkenli standart normal dağılım fonksiyonu ve Φ^{-1} standart tek değişkenli normal dağılımın tersi olmak üzere, (X_1, X_2, \dots, X_n) değişkenine karşılık gelen, n -boyutlu Gaussian kapula aşağıdaki gibi tanımlanır (Kaishev vd, 2007).

$$\begin{aligned} C_R(u_1, \dots, u_n) &= \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \phi_R(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (4)$$

2.2. Kapula Tahmini

Değişkenler arasındaki bağımlılığın kapula ile modellenmesinde ilk olarak, bağımlılık yapısını yansıtan parametreler kapula tahmin yöntemleri ile tahmin edilmelidir. Böylece iki ya da çok değişkenli dağılım elde edilerek, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı ortaya konulmalıdır. Daha sonra bağımlılık yapısına uygun olan birden fazla kapula modelinden bağımlılığı en iyi karakterize eden kapula modeli, uyum iyiliği testleriyle elde edilmelidir (Joe, 1997).

İstatistikte geliştirilen birçok tahmin yöntemi, minimum hata ile gerçeğe en yakın tahmini elde etmeyi amaçlar. Bu amaç doğrultusunda kapula tahmin yöntemleri de değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirleyen parametrelerin tahmini için geliştirilmiştir. Kapula tahmin yöntemleri parametrik, yarı-parametrik ve parametrik olmayan olmak üzere üç gruba ayrılır (Alhan, 2008).

Sözde en çok olabilirlik yöntemi yarı-parametrik bir yöntem olup, kapulaya ait yoğunluk fonksiyonunun bilinmesini gerektirir.

$$c_\theta, \text{ bir } C_\theta \text{ kapulasının yoğunluk fonksiyonu olmak üzere;} \quad (5)$$

$$F_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_\theta(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (5)$$

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln \{c_\theta(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} \quad (6)$$

fonksiyonunu maksimum yapan değer sözde en çok olabilirlik tahmin edicisidir (Genest vd, 1995).

En çok olabilirlik yöntemi parametrik bir yöntem olup, değişkenlere ait marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonunun bilinmesini gerektirir.

$S = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ örnek veri matrisi olmak üzere, log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln\{c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}) \quad (7)$$

Kapula ve marjinallere ilişkin parametreler vektörü θ olmak üzere, marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonu biliniyorsa (7) eşitliğindeki log-olabilirlik fonksiyonu yazılır ve en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MLE} = \max l(\theta)$ ile bulunur (Cherubini vd, 2004).

2.3. Kapula Seçimi

Tahmin edilen kapula modelinin, veriye uygun olup olmadığının test edilmesi de önemli bir adımdır. Değişkenlerin bağımlılık yapısı araştırılmak istenildiğinde, birden fazla kapula modelinin belirlenerek, uyum iyiliği testleriyle bağımlılık yapısını en iyi yansıtan modeli bulmak en etkili stratejidir (Trivedi ve Zimmer, 2005). Bunun için Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling ve minimum uzaklık ölçülerini kullanan uyum iyiliği testleri ile beklenen ve gözlenen frekanslar üzerinden ki-kare istatistikleri hesaplanmıştır. Genest ve Rivest (1993), iki değişkenli Arşimedyen kapulalar arasında seçim yaklaşımını ele almışlardır. Bunun yanısıra, en çok olabilirlik değeriyle hesaplanan AIC ve BIC değerleri ile modelin uygunluğu test edilmiştir. AIC değeri, yarı-parametrik kapula tahmininde sıkça kullanılan bir kriter olmasına rağmen parametrik kapula tahminlerinde de kullanılır.

$X_n = \{x_i\}_{i=1}^n$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{it})$ olmak üzere bir dizi bağımsız gözlem ve α parametresine sahip belirli bir F dağılımı için Akaike (1974) tarafından tanıtılan AIC değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$AIC_F = 2l_F(\hat{\alpha}) - 2\dim(\alpha) \quad (8)$$

l_F , log-olabilirlik fonksiyonu, X_n bağımsız gözlemlere dayalı α parametresinin en çok olabilirlik tahmini $\hat{\alpha}$ ve $\dim(\alpha)$ modeldeki parametre sayısıdır.

Tahmin edilen kapula modellerinden değişkenlere en uygun olanı seçerken kullanılan AIC değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$AIC_C = 2l_C(\hat{\theta}) - 2\dim(\theta) \quad (9)$$

Burada θ , C kapula parametresi, $\hat{\theta}$ sözde en çok olabilirlik tahmini ve l_C ise sözde log-olabilirlik fonksiyonudur (Jordanger ve Tjøstheim, 2014). En küçük AIC değerine sahip olan kapula, değişkenler arasındaki bağımlılığı yansıtan en uygun kapula modeli olarak seçilir.

3. Uygulama

Bu simülasyon çalışmasında farklı tau seviyesi ve farklı gözlem sayılarına göre Gaussian kapulaya uygun, 1000 iterasyon ile iki boyutlu veriler türetilmiştir. AIC değerine göre bu veriler arasındaki bağımlılığı yansıtan kapula modelleri belirlenmiştir. Belirlenen kapula modellerine ait seçilme sayıları, doğru ve hatalı seçim sayıları Ek 1'de verilmiştir. Doğru model seçim oranları ise Tablo 1'de gösterilmiştir.

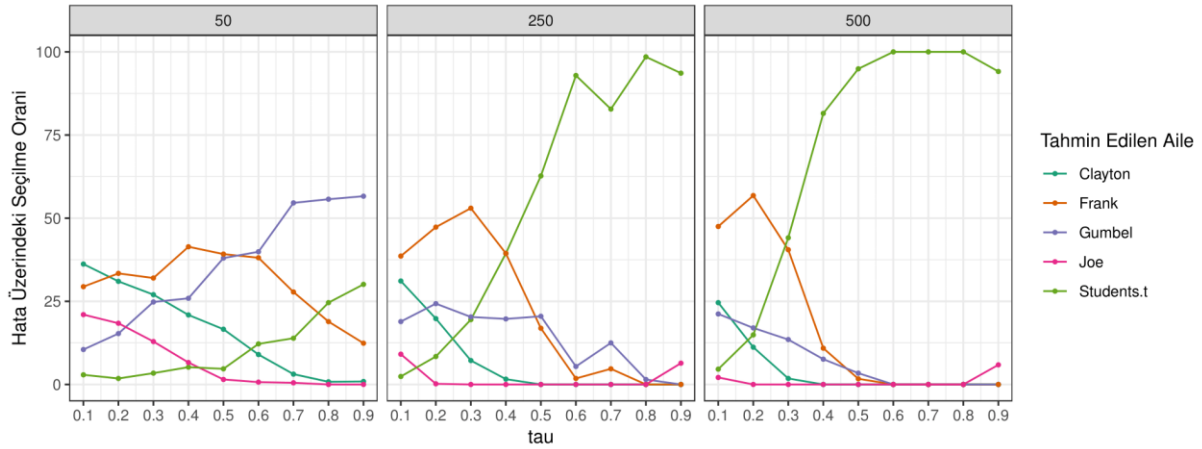
Tablo 1. Farklı Tau Seviyelerinde ve Gözlem Sayılarında AIC Değerine Göre Doğru Model Seçim Oranları

| Kapula | τ | n | | | | | | | | | |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |
| Gaussian | 0.1 | 0.229 | 0.24 | 0.303 | 0.292 | 0.327 | 0.374 | 0.412 | 0.418 | 0.457 | 0.434 |
| | 0.2 | 0.294 | 0.407 | 0.491 | 0.533 | 0.581 | 0.618 | 0.66 | 0.722 | 0.727 | 0.759 |
| | 0.3 | 0.403 | 0.555 | 0.64 | 0.711 | 0.764 | 0.809 | 0.804 | 0.859 | 0.85 | 0.889 |
| | 0.4 | 0.517 | 0.662 | 0.743 | 0.823 | 0.873 | 0.893 | 0.895 | 0.9 | 0.915 | 0.908 |
| | 0.5 | 0.663 | 0.799 | 0.854 | 0.894 | 0.917 | 0.92 | 0.934 | 0.945 | 0.942 | 0.941 |
| | 0.6 | 0.722 | 0.874 | 0.914 | 0.928 | 0.944 | 0.938 | 0.941 | 0.926 | 0.917 | 0.937 |
| | 0.7 | 0.806 | 0.914 | 0.928 | 0.939 | 0.936 | 0.946 | 0.944 | 0.937 | 0.94 | 0.946 |
| | 0.8 | 0.878 | 0.931 | 0.938 | 0.947 | 0.933 | 0.939 | 0.94 | 0.925 | 0.935 | 0.929 |
| | 0.9 | 0.887 | 0.921 | 0.952 | 0.956 | 0.953 | 0.956 | 0.96 | 0.947 | 0.957 | 0.966 |

Gaussian kapula dışında seçilen kapula modelleri hata olarak ele alınmıştır. Bu hatalı tercihler içerisinde yer alan kapula modellerinin seçilme oranları $S_{ke} = \frac{S_k}{E}$ şeklinde belirlenmiş ve sonuçlar

Ek 2’de verilmiştir. Burada S_k , k kapulasının seçilme sayısını, E , toplam hata miktarını ve S_{ke} , k kapulasının tüm hatalar içerisindeki seçilme oranını göstermektedir.

Gözlem sayıları $n = 50, 250$ ve 500 için farklı tau değerlerine göre kapula modellerinin hatalar içerisindeki seçilme oranları Şekil 1’de görülmektedir.



Şekil 1. Farklı Gözlem Sayılarında Gaussian Kapula Verisi Tahmini Hatalarının Taulara Göre Dağılımı

- $n = 50$ iken,

İlişki seviyesi 0.1 olduğunda yanlış tahminlerde Clayton kapula en fazla tercih edilirken, Student’s t kapula en az tercih edilmektedir. İlişki seviyesi arttıkça Gumbel ve Student’s t kapula tercih oranında artış olduğu, Clayton ile Joe kapula tercih oranında ise azalma olduğu görülmüştür. Frank kapula tercihinde ise ilişki 0.4 seviyesine gelene kadar artmanın ardından azalmanın olduğu görülmüştür. İlişki seviyesi 0.9 iken en çok tercih edilen Gumbel kapula iken en az tercih edilen Joe ve Clayton kapuladır.

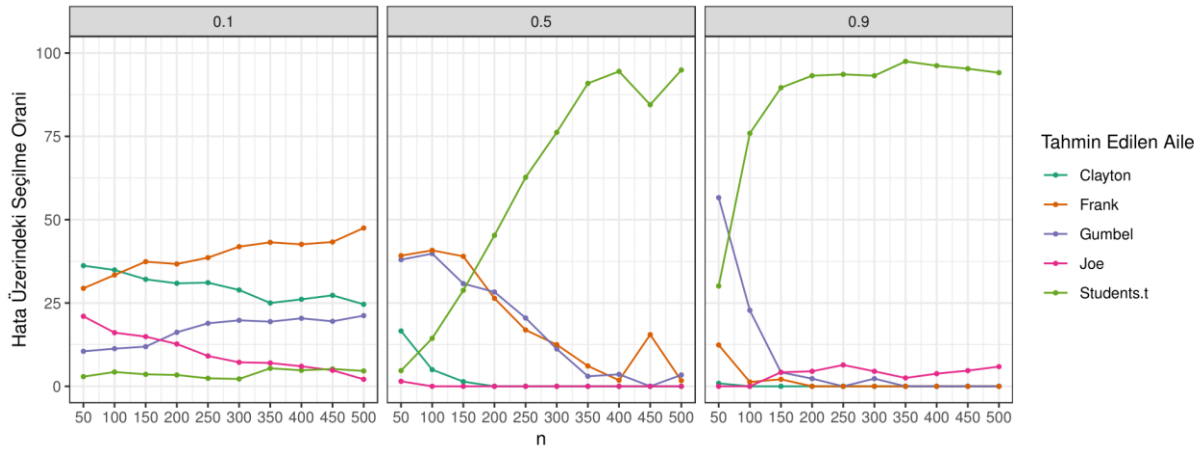
- $n = 250$ iken,

İlişki seviyesi 0.1 olduğunda yanlış tahminlerde Frank kapula en fazla tercih edilirken, Student’s t kapula en az tercih edilmektedir. İlişki seviyesi arttıkça Student’s t kapula tercih oranında artış olduğu, Clayton ve Gumbel tercih oranında ise azalma olduğu görülmüştür. Frank kapula tercihinde ise ilişki 0.3 seviyesine gelene kadar artmanın ardından azalmanın olduğu görülmüştür. İlişki seviyesi 0.9 iken en çok tercih edilen Student’s t iken diğer kapulalar çok az tercih edilmiştir.

- $n = 500$ iken,

İlişki seviyesi 0.1 olduğunda yanlış tahminlerde Frank kapula en fazla tercih edilirken, Joe ve Student’s t kapula en az tercih edilmektedir. İlişki seviyesi arttıkça Student’s t kapula tercih oranında artış olduğu, Clayton ve Gumbel tercih oranında ise azalma olduğu görülmüştür. Frank kapula tercihinde ise ilişki 0.2 seviyesine gelene kadar artmanın ardından azalmanın olduğu görülmüştür. İlişki seviyesi 0.9 iken en çok tercih edilen Student’s t iken diğer kapulalar çok az tercih edilmiştir.

Tau seviyeleri 0.1, 0.5 ve 0.9 için farklı gözlem sayılarına göre kapula modellerinin hatalar içerisindeki seçilme oranları Şekil 2’de görülmektedir.



Şekil 2. Farklı Tau Seviyelerinde Gaussian Kapula Verisi Tahmini Hatalarının Gözlem Sayılarına Göre Dağılımı

- $\tau = 0.1$ iken,

Gözlem sayısı 50 olduğunda yanlış tahminlerde Clayton kapula en fazla tercih edilirken, Student's t kapula en az tercih edilmektedir. Gözlem sayısı arttıkça Gumbel ile Frank kapula tercih oranında artış olduğu, Clayton ile Joe kapula tercih oranında ise azalma olduğu görülmüştür. Gözlem sayısı 500 iken en çok tercih edilen Frank kapula iken en az tercih edilen Joe ve Student's t kapuladır.

- $\tau = 0.5$ iken,

Gözlem sayısı 50 olduğunda yanlış tahminlerde Frank ve Gumbel kapula en fazla tercih edilirken, Joe ve Student's t kapula en az tercih edilmektedir. Gözlem sayısı arttıkça Student's t kapula tercih oranında artış olduğu ve diğer kapulaların tercih oranlarında azalma olduğu görülmüştür. Gözlem sayısı 500 iken en çok tercih edilen Student's t kapula iken diğer kapulalar çok az tercih edilmiştir.

- $\tau = 0.9$ iken,

Gözlem sayısı 50 olduğunda yanlış tahminlerde Gumbel kapula en fazla tercih edilirken, Joe ve Clayton kapula en az tercih edilmektedir. Gözlem sayısı arttıkça Student's t kapula tercih oranında artış olduğu, Gumbel ve Frank kapula tercih oranında azalma olduğu görülmüştür. Gözlem sayısı 500 iken en çok tercih edilen Student's t kapula iken diğer kapulalar çok az tercih edilmiştir.

Sonuç ve Değerlendirme

Bu çalışmada, iki değişken arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyan kapula modeli seçilirken kullanılan AIC değerinin, Gaussian kapula olması durumundaki sonuçları incelenmiştir. Bu sonuçlar ışığında gözlem sayısı azaldığında, AIC değerinin doğru tahmin oranının azaldığı görülmüştür. Aynı şekilde ilişki seviyesini temsil eden tau seviyesi azaldığında da doğru tahmin oranının azaldığı tespit edilmiştir.

Bunun yanı sıra hatalı kapula seçimleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Hatalı yapılan seçimlerin oranları hesaplanmış, gözlem sayısı ve tau seviyesindeki değişime göre bu oranlar arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Bu inceleme sonuçlarına göre hem ilişki seviyesi hem de gözlem sayısı düşük olduğunda AIC değerinin Clayton kapula seçmeye yatkınlık gösterdiği görülmüştür. Gözlem sayısı ve ilişki seviyesi arttıkça Student's t kapula seçiminde artış olduğu görülse de bunun beklenen bir durum olduğu unutulmamalıdır. Student's t kapulası dışında düşük gözlem sayılarında Gumbel kapula, düşük ilişki seviyelerinde ise Frank kapulanın sıklıkla hatalı tercihlerden olduğu görülmektedir. Burada AIC değerinin hatalı tercih yaparken, belirli kapula ailelerine yatkınlık gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır. Kapula seçiminde daha iyi performans gösteren yaklaşımlar araştırılırken, bu çalışmadaki bulgulardan faydalanılarak daha doğru tahminler yapılabilir.

Kaynakça

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. In Selected Papers of Hirotugu Akaike, Springer, New York, NY, 215-222.
- Alhan, A. 2008. Bağımsızlık kapulasını içeren kapula aileleri, kapula tahmin yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında sektörler arası bağımlılık yapısı. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 162, Ankara.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. 2004. Copula methods in finance. John Wiley and Sons, New York, 289.
- Fang, Y., Madsen, L., & Liu, L. (2014). Comparison of Two Methods to Check Copula Fitting. *International Journal of Applied Mathematics*, 44(1).
- Genest, C. and Rivest, L. P. 1993. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 1034-1043.
- Genest, C., Quesada Molina, J. J. and Rodríguez Lallena, J. A. 1995. De l'impossibilité de construire des lois à marges multidimensionnelles données à partir de copules. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 320(6), 723-726.
- Joe, H. 1997. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press, 395, London.
- Jordanger, L. A., & Tjøstheim, D. (2014). Model selection of copulas: AIC versus a cross validation copula information criterion. *Statistics & Probability Letters*, 92, 249-255.
- Kaishev, V. K., Dimitrova, D. S. and Haberman, S. 2007. Modelling the joint distribution of competing risks survival times using copula functions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(3), 339-361.
- Sklar, A. 1959. Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges. *Publ. Inst. Statist. Univ.*, 8, 229-231.
- Trivedi, P. K. and Zimmer, D. M. 2005. Copula modeling: An introduction for practitioners. Publishers Inc., 28, Hanover, USA.

Ek 1. AIC Değerine Göre Kapula Modeli Seçilme İstatistikleri

| τ | n | Seçilme Sayıları | | | | | | Doğru Seçim Sayısı | Hatalı Seçim Sayısı |
|--------|-----|------------------|-------------|---------|--------|-------|-----|--------------------|---------------------|
| | | Gaussian | Student's t | Clayton | Gumbel | Frank | Joe | | |
| 0,1 | 50 | 229 | 22 | 279 | 81 | 227 | 162 | 229 | 771 |
| | 100 | 240 | 33 | 265 | 86 | 254 | 122 | 240 | 760 |
| | 150 | 303 | 25 | 224 | 83 | 261 | 104 | 303 | 697 |
| | 200 | 292 | 24 | 219 | 115 | 260 | 90 | 292 | 708 |
| | 250 | 327 | 16 | 209 | 127 | 260 | 61 | 327 | 673 |
| | 300 | 374 | 14 | 181 | 124 | 262 | 45 | 374 | 626 |
| | 350 | 412 | 32 | 147 | 114 | 254 | 41 | 412 | 588 |
| | 400 | 418 | 28 | 152 | 119 | 248 | 35 | 418 | 582 |
| | 450 | 457 | 28 | 148 | 106 | 235 | 26 | 457 | 543 |
| 0,2 | 500 | 434 | 26 | 139 | 120 | 269 | 12 | 434 | 566 |
| | 50 | 294 | 13 | 219 | 108 | 236 | 130 | 294 | 706 |
| | 100 | 407 | 22 | 146 | 133 | 233 | 59 | 407 | 593 |
| | 150 | 491 | 17 | 119 | 116 | 230 | 27 | 491 | 509 |
| | 200 | 533 | 21 | 96 | 118 | 222 | 10 | 533 | 467 |
| | 250 | 581 | 35 | 83 | 102 | 198 | 1 | 581 | 419 |
| | 300 | 618 | 46 | 65 | 73 | 194 | 4 | 618 | 382 |
| | 350 | 660 | 33 | 43 | 90 | 172 | 2 | 660 | 340 |
| | 400 | 722 | 33 | 34 | 68 | 143 | 0 | 722 | 278 |
| 0,3 | 450 | 727 | 43 | 32 | 58 | 139 | 1 | 727 | 273 |
| | 500 | 759 | 36 | 27 | 41 | 137 | 0 | 759 | 241 |
| | 50 | 403 | 20 | 161 | 148 | 191 | 77 | 403 | 597 |
| | 100 | 555 | 32 | 94 | 117 | 182 | 20 | 555 | 445 |
| | 150 | 640 | 26 | 51 | 124 | 153 | 6 | 640 | 360 |
| | 200 | 711 | 29 | 32 | 85 | 142 | 1 | 711 | 289 |
| | 250 | 764 | 46 | 17 | 48 | 125 | 0 | 764 | 236 |
| | 300 | 809 | 48 | 10 | 29 | 103 | 1 | 809 | 191 |
| | 350 | 804 | 46 | 9 | 37 | 104 | 0 | 804 | 196 |
| 0,3 | 400 | 859 | 50 | 5 | 25 | 61 | 0 | 859 | 141 |
| | 450 | 850 | 52 | 6 | 20 | 72 | 0 | 850 | 150 |
| | 500 | 889 | 49 | 2 | 15 | 45 | 0 | 889 | 111 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0,4 | 50 | 517 | 25 | 101 | 125 | 200 | 32 | 517 | 483 |
| | 100 | 662 | 32 | 41 | 100 | 162 | 3 | 662 | 338 |
| | 150 | 743 | 37 | 25 | 74 | 120 | 1 | 743 | 257 |
| | 200 | 823 | 42 | 8 | 38 | 89 | 0 | 823 | 177 |
| | 250 | 873 | 50 | 2 | 25 | 50 | 0 | 873 | 127 |
| | 300 | 893 | 55 | 2 | 19 | 31 | 0 | 893 | 107 |
| | 350 | 895 | 59 | 0 | 11 | 35 | 0 | 895 | 105 |
| | 400 | 900 | 69 | 0 | 9 | 22 | 0 | 900 | 100 |
| | 450 | 915 | 64 | 0 | 5 | 16 | 0 | 915 | 85 |
| 500 | 908 | 75 | 0 | 7 | 10 | 0 | 908 | 92 | |
| 0,5 | 50 | 663 | 16 | 56 | 128 | 132 | 5 | 663 | 337 |
| | 100 | 799 | 29 | 10 | 80 | 82 | 0 | 799 | 201 |
| | 150 | 854 | 42 | 2 | 45 | 57 | 0 | 854 | 146 |
| | 200 | 894 | 48 | 0 | 30 | 28 | 0 | 894 | 106 |
| | 250 | 917 | 52 | 0 | 17 | 14 | 0 | 917 | 83 |
| | 300 | 920 | 61 | 0 | 9 | 10 | 0 | 920 | 80 |
| | 350 | 934 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 934 | 66 |
| | 400 | 945 | 52 | 0 | 2 | 1 | 0 | 945 | 55 |
| | 450 | 942 | 49 | 0 | 0 | 9 | 0 | 942 | 58 |
| 500 | 941 | 56 | 0 | 2 | 1 | 0 | 941 | 59 | |
| 0,6 | 50 | 722 | 34 | 25 | 111 | 106 | 2 | 722 | 278 |
| | 100 | 874 | 35 | 4 | 47 | 40 | 0 | 874 | 126 |
| | 150 | 914 | 45 | 0 | 24 | 17 | 0 | 914 | 86 |
| | 200 | 928 | 52 | 0 | 12 | 8 | 0 | 928 | 72 |
| | 250 | 944 | 52 | 0 | 3 | 1 | 0 | 944 | 56 |
| | 300 | 938 | 52 | 0 | 5 | 5 | 0 | 938 | 62 |
| | 350 | 941 | 57 | 0 | 1 | 1 | 0 | 941 | 59 |
| | 400 | 926 | 73 | 0 | 1 | 0 | 0 | 926 | 74 |
| | 450 | 917 | 82 | 0 | 1 | 0 | 0 | 917 | 83 |
| 500 | 937 | 63 | 0 | 0 | 0 | 0 | 937 | 63 | |
| 0,7 | 50 | 806 | 27 | 6 | 106 | 54 | 1 | 806 | 194 |
| | 100 | 914 | 33 | 0 | 34 | 18 | 1 | 914 | 86 |
| | 150 | 928 | 63 | 0 | 8 | 1 | 0 | 928 | 72 |
| | 200 | 939 | 54 | 0 | 6 | 1 | 0 | 939 | 61 |
| | 250 | 936 | 53 | 0 | 8 | 3 | 0 | 936 | 64 |
| | 300 | 946 | 54 | 0 | 0 | 0 | 0 | 946 | 54 |
| | 350 | 944 | 55 | 0 | 1 | 0 | 0 | 944 | 56 |
| | 400 | 937 | 63 | 0 | 0 | 0 | 0 | 937 | 63 |
| | 450 | 940 | 60 | 0 | 0 | 0 | 0 | 940 | 60 |
| 500 | 946 | 54 | 0 | 0 | 0 | 0 | 946 | 54 | |
| 0,8 | 50 | 878 | 30 | 1 | 68 | 23 | 0 | 878 | 122 |
| | 100 | 931 | 39 | 0 | 25 | 4 | 1 | 931 | 69 |
| | 150 | 938 | 50 | 0 | 10 | 2 | 0 | 938 | 62 |
| | 200 | 947 | 47 | 0 | 6 | 0 | 0 | 947 | 53 |
| | 250 | 933 | 66 | 0 | 1 | 0 | 0 | 933 | 67 |
| | 300 | 939 | 59 | 0 | 0 | 0 | 2 | 939 | 61 |
| | 350 | 940 | 60 | 0 | 0 | 0 | 0 | 940 | 60 |
| | 400 | 925 | 75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 925 | 75 |
| | 450 | 935 | 65 | 0 | 0 | 0 | 0 | 935 | 65 |
| 500 | 929 | 71 | 0 | 0 | 0 | 0 | 929 | 71 | |
| 0,9 | 50 | 887 | 34 | 1 | 64 | 14 | 0 | 887 | 113 |
| | 100 | 921 | 60 | 0 | 18 | 1 | 0 | 921 | 79 |
| | 150 | 952 | 43 | 0 | 2 | 1 | 2 | 952 | 48 |
| | 200 | 956 | 41 | 0 | 1 | 0 | 2 | 956 | 44 |
| | 250 | 953 | 44 | 0 | 0 | 0 | 3 | 953 | 47 |
| | 300 | 956 | 41 | 0 | 1 | 0 | 2 | 956 | 44 |
| | 350 | 960 | 39 | 0 | 0 | 0 | 1 | 960 | 40 |
| | 400 | 947 | 51 | 0 | 0 | 0 | 2 | 947 | 53 |
| | 450 | 957 | 41 | 0 | 0 | 0 | 2 | 957 | 43 |
| 500 | 966 | 32 | 0 | 0 | 0 | 2 | 966 | 34 | |

Ek 2. AIC Değerine Göre Hatalı Seçimler İçerisindeki Oran İstatistikleri

| τ | n | Hatalı seçimler içerisindeki oran | | | | |
|--------|-----|-----------------------------------|---------|--------|-------|-------|
| | | Student's t | Clayton | Gumbel | Frank | Joe |
| 0.1 | 50 | 0.029 | 0.362 | 0.105 | 0.294 | 0.210 |
| | 100 | 0.043 | 0.349 | 0.113 | 0.334 | 0.161 |

| | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 150 | 0.036 | 0.321 | 0.119 | 0.374 | 0.149 |
| | 200 | 0.034 | 0.309 | 0.162 | 0.367 | 0.127 |
| | 250 | 0.024 | 0.311 | 0.189 | 0.386 | 0.091 |
| | 300 | 0.022 | 0.289 | 0.198 | 0.419 | 0.072 |
| | 350 | 0.054 | 0.250 | 0.194 | 0.432 | 0.070 |
| | 400 | 0.048 | 0.261 | 0.204 | 0.426 | 0.060 |
| | 450 | 0.052 | 0.273 | 0.195 | 0.433 | 0.048 |
| | 500 | 0.046 | 0.246 | 0.212 | 0.475 | 0.021 |
| 0.2 | 50 | 0.018 | 0.310 | 0.153 | 0.334 | 0.184 |
| | 100 | 0.037 | 0.246 | 0.224 | 0.393 | 0.099 |
| | 150 | 0.033 | 0.234 | 0.228 | 0.452 | 0.053 |
| | 200 | 0.045 | 0.206 | 0.253 | 0.475 | 0.021 |
| | 250 | 0.084 | 0.198 | 0.243 | 0.473 | 0.002 |
| | 300 | 0.120 | 0.170 | 0.191 | 0.508 | 0.010 |
| | 350 | 0.097 | 0.126 | 0.265 | 0.506 | 0.006 |
| | 400 | 0.119 | 0.122 | 0.245 | 0.514 | 0.000 |
| 450 | 0.158 | 0.117 | 0.212 | 0.509 | 0.004 | |
| 500 | 0.149 | 0.112 | 0.170 | 0.568 | 0.000 | |
| 0.3 | 50 | 0.034 | 0.270 | 0.248 | 0.320 | 0.129 |
| | 100 | 0.072 | 0.211 | 0.263 | 0.409 | 0.045 |
| | 150 | 0.072 | 0.142 | 0.344 | 0.425 | 0.017 |
| | 200 | 0.100 | 0.111 | 0.294 | 0.491 | 0.003 |
| | 250 | 0.195 | 0.072 | 0.203 | 0.530 | 0.000 |
| | 300 | 0.251 | 0.052 | 0.152 | 0.539 | 0.005 |
| | 350 | 0.235 | 0.046 | 0.189 | 0.531 | 0.000 |
| | 400 | 0.355 | 0.035 | 0.177 | 0.433 | 0.000 |
| 450 | 0.347 | 0.040 | 0.133 | 0.480 | 0.000 | |
| 500 | 0.441 | 0.018 | 0.135 | 0.405 | 0.000 | |
| 0.4 | 50 | 0.052 | 0.209 | 0.259 | 0.414 | 0.066 |
| | 100 | 0.095 | 0.121 | 0.296 | 0.479 | 0.009 |
| | 150 | 0.144 | 0.097 | 0.288 | 0.467 | 0.004 |
| | 200 | 0.237 | 0.045 | 0.215 | 0.503 | 0.000 |
| | 250 | 0.394 | 0.016 | 0.197 | 0.394 | 0.000 |
| | 300 | 0.514 | 0.019 | 0.178 | 0.290 | 0.000 |
| | 350 | 0.562 | 0.000 | 0.105 | 0.333 | 0.000 |
| | 400 | 0.690 | 0.000 | 0.090 | 0.220 | 0.000 |
| 450 | 0.753 | 0.000 | 0.059 | 0.188 | 0.000 | |
| 500 | 0.815 | 0.000 | 0.076 | 0.109 | 0.000 | |
| 0.5 | 50 | 0.047 | 0.166 | 0.380 | 0.392 | 0.015 |
| | 100 | 0.144 | 0.050 | 0.398 | 0.408 | 0.000 |
| | 150 | 0.288 | 0.014 | 0.308 | 0.390 | 0.000 |
| | 200 | 0.453 | 0.000 | 0.283 | 0.264 | 0.000 |
| | 250 | 0.627 | 0.000 | 0.205 | 0.169 | 0.000 |
| | 300 | 0.763 | 0.000 | 0.113 | 0.125 | 0.000 |
| | 350 | 0.909 | 0.000 | 0.030 | 0.061 | 0.000 |
| | 400 | 0.945 | 0.000 | 0.036 | 0.018 | 0.000 |
| 450 | 0.845 | 0.000 | 0.000 | 0.155 | 0.000 | |
| 500 | 0.949 | 0.000 | 0.034 | 0.017 | 0.000 | |
| 0.6 | 50 | 0.122 | 0.090 | 0.399 | 0.381 | 0.007 |
| | 100 | 0.278 | 0.032 | 0.373 | 0.317 | 0.000 |
| | 150 | 0.523 | 0.000 | 0.279 | 0.198 | 0.000 |
| | 200 | 0.722 | 0.000 | 0.167 | 0.111 | 0.000 |
| | 250 | 0.929 | 0.000 | 0.054 | 0.018 | 0.000 |
| | 300 | 0.839 | 0.000 | 0.081 | 0.081 | 0.000 |
| | 350 | 0.966 | 0.000 | 0.017 | 0.017 | 0.000 |
| | 400 | 0.986 | 0.000 | 0.014 | 0.000 | 0.000 |
| 450 | 0.988 | 0.000 | 0.012 | 0.000 | 0.000 | |
| 500 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | |
| 0.7 | 50 | 0.139 | 0.031 | 0.546 | 0.278 | 0.005 |
| | 100 | 0.384 | 0.000 | 0.395 | 0.209 | 0.012 |
| | 150 | 0.875 | 0.000 | 0.111 | 0.014 | 0.000 |
| | 200 | 0.885 | 0.000 | 0.098 | 0.016 | 0.000 |
| | 250 | 0.828 | 0.000 | 0.125 | 0.047 | 0.000 |
| | 300 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | 350 | 0.982 | 0.000 | 0.018 | 0.000 | 0.000 |
| | 400 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 450 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | |
| 500 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | |

| | | | | | | |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.8 | 50 | 0.246 | 0.008 | 0.557 | 0.189 | 0.000 |
| | 100 | 0.565 | 0.000 | 0.362 | 0.058 | 0.014 |
| | 150 | 0.806 | 0.000 | 0.161 | 0.032 | 0.000 |
| | 200 | 0.887 | 0.000 | 0.113 | 0.000 | 0.000 |
| | 250 | 0.985 | 0.000 | 0.015 | 0.000 | 0.000 |
| | 300 | 0.967 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.033 |
| | 350 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | 400 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | 450 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | 500 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.9 | 50 | 0.301 | 0.009 | 0.566 | 0.124 | 0.000 |
| | 100 | 0.759 | 0.000 | 0.228 | 0.013 | 0.000 |
| | 150 | 0.896 | 0.000 | 0.042 | 0.021 | 0.042 |
| | 200 | 0.932 | 0.000 | 0.023 | 0.000 | 0.045 |
| | 250 | 0.936 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.064 |
| | 300 | 0.932 | 0.000 | 0.023 | 0.000 | 0.045 |
| | 350 | 0.975 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.025 |
| | 400 | 0.962 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.038 |
| | 450 | 0.953 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.047 |
| | 500 | 0.941 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.059 |