

İSTATİSTİKTE BAYESYEN VE KLASİK YAKLAŞIMIN KAVRAMSAL FARKLILIKLARI¹

Conceptual Distinctions of Bayesian and Classical Approaches in Statistics

Oya EKİCİ*

ÖZ

Araştırmanın Temelleri: Gelişme süreci göz önünde bulundurulduğunda, istatistik üzerine yaklaşımlar iki eksende kutuplaşmıştır. Bu alanda Klasik yaklaşımın daha fazla hâkim olmasına rağmen Bayesyen yaklaşımın da önemli argümanları vardır. Yaklaşım farklılıklarını belirginleştirmek üzere, istatistiksel kavramların iki yaklaşımdaki tanımlarını derleyerek netleştirme ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Ayrıca Klasikten asıl farklı olan “ön bilgi” kullanılması konusu Bayesyen yaklaşım içerisinde de objektif ve subjektif analiz tartışmasını doğurmuştur. Kavramlara ilişkin derleme ve güncel bir tartışmaya başlangıç yapma, çalışmaya temel oluşturan motivasyon olmuştur.

Araştırmanın Amacı: Çalışmada amaç, istatistiksel kavramlar çerçevesinde Bayesyen yaklaşımın Klasik yaklaşımdan farklılıklarına yer vermek ve giriş niteliğinde objektif ve subjektif Bayesyen analiz tartışmasına değinmektir.

Veri Kaynakları: Uygulamaya yönelik çalışma yapılmadığından veri kullanılmamıştır.

Ana Tartışma: Sözü edilen amaç bağlamında, öncelikle belirsizliğin değerlendirilmesinde ve olasılığın tanımında belirginleşen ayrılıklar açıklanmaya çalışılmıştır. Yine yaklaşım farklılıklarını göz önüne alarak, istatistiksel çıkarımanın ana başlıklarından olan, Parametre, Nokta tahmin, Güven Aralığı ve Hipotez Testi konularına değinilmiştir. Ön bilginin kullanılmasıyla Klasik yaklaşımdan farklı sonuca ulaşan Bayesyen yaklaşım, subjektif olması gerekçesiyle eleştirilmektedir. Aslında Bayesyen yaklaşım da kendi içinde, yöntem çeşitliliği ortaya çıkması nedeniyle, objektif ve subjektif tartışmasını yapmaktadır. Bu da araştırmacıyı objektif ve subjektif Bayesyen analiz ayrımına götürmektedir. Çalışmada, sadece giriş niteliğinde, Bayesyen okullar arasındaki bu tartışmaya da yer verilmiştir.

Sonuçlar: İki yaklaşım açısından da istatistiksel çıkarılamada temel olan kavramların farklılığı ortaya konmuştur. Objektif - subjektif Bayesyen analiz tartışmasına literatürdeki son görüşlere de yer verilerek ışık tutulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bayesyen Çıkarılamada, Klasik İstatistiksel Çıkarılamada, Kesinlik, Tutarlılık, “En Yüksek Son Yoğunluk Aralığı”, Subjektif Bayesyen Analiz, Objektif Bayesyen Analiz.

ABSTRACT

Fundamentals of the Research: When the progressing process is taken to be account, it's seen that the approaches on statistics have polarized between two pivots. Despite of the domination of Classical approach in statistics, Bayesian approach has also crucial arguments. It's needed to clarify the descriptions of both aspects about statistical concepts by compiling them. Besides, using “prior information”, that is main difference from Classical one, created the discussion of objective and subjective Bayesian analysis. Thus, compilation of concepts and launching a current discussion are the main motivations that lead to this study.

Purpose of the Research: The purpose of the study is to express the distinctions between Bayesian approach and Classical approach on the basis of statistical concepts.

Data Sources: No data is used at the study due to not to be intended to do an application.

Main Discussion: In the context of this stated purpose, at first, the dissimilarities that become clear in the description of uncertainty and probability are tried to be described. Again by regarding the distinctions of the approaches, Parameter, Point Estimation, Confidence Interval and Hypothesis Testing that are the main subjects of statistical inference are touched on. Since using the prior information, Bayesian approach produces different results from Classical one, so it has been criticized, claiming as to be subjective. Actually Bayesian approach also has been discussing the

BAÜ
SBED
12 (21)

89

Balikesir
Üniversitesi Sosyal
Bilimler Enstitüsü
Dergisi
Cilt 12 Sayı 21
Haziran 2009
ss.89-101

¹ Çalışma kısmen yazarın tezinin bir bölümüne dayanmaktadır.

* Araş. Gör., İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Ekonometri Bölümü

objectivity and subjectivity since it's seen variety on the application Bayesian method. In the study, merely as an introduction, this discussion relating the Bayesian schools is considered.

Results: From both aspects, the distinctions of the concepts that have key role in statistical inference are emphasized. It's enlightened the discussion of objective - subjective Bayesian Analysis by means of introducing the current views in the literature.

Keywords: Bayesian Inference, Classical Statistical Inference, Precision, HPD Interval, Coherence, Subjective Bayesian Analysis, Objective Bayesian Analysis.

1.GİRİŞ

Bayesyen yaklaşım, özü Bayes Teoremine dayandırılarak yapılandırılmış bir yaklaşım sistemidir. Bu yaklaşım istatistikte ve pek çok ekonometrik çalışmada uygulanmaktadır. Özellikle, istatistik gelişirken temel olarak iki farklı felsefi yaklaşımın belirginleştiği görülmektedir. Klasik (veya Frekansçı, Berkeley istatistiği) yaklaşım ve Bayesyen yaklaşım. Bu disiplinin başlangıç aksiyomlarının yorumlanmasında, pek çok konu ve kavramın ele alınışında bu yaklaşımlardan biri diğerine alternatif olmuştur. Bayesyen yaklaşım da gelişme süreci göz önünde bulundurulduğunda, kendi disiplini olan alternatif bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla pek çok istatistiksel kavram bu yaklaşımda farklı yorumlanmakta ve ele alınmaktadır.

İkinci bölümde, önemli bazı istatistiksel konu ve kavramların Bayesyen yorumuna değinilirken, gerisinde yatan düşünceye ışık tutularak, Klasik yaklaşımdan farkı ortaya konmaya çalışılmıştır. Ayrıca güncel bir konu olarak objektif ve subjektif Bayesyen analiz tartışmasına yer verilmiştir.

2. BAYESYEN ÇIKARSAMANIN TEMELLERİ VE İSTATİSTİKSEL KAVRAMLARA İLİŞKİN YORUMLARI

Bir yöntem olarak istatistik, değerlendirilirken ve ele alınırken, bilim felsefesinde yer alan yaklaşımlara göre farklı düşüncelerin etkisinde kalmıştır. Ancak elbette ki bilim üretme sürecinde, bunların yön verici olduğu söylenemez. Bilim kendi başlangıç dinamiğine sahiptir. Bilim felsefesinde sözü edilen yaklaşımlar (veya mantıksal yöntemler), bilgiyi oluşturmada kullanılan ve yöntembilim tartışmalarında oynadıkları merkezi rolden dolayı birer akıma dönüşen (Demir, 2000) tümevarım ve tümdengelimdir. İstatistik, bu yöntemlerin dışında, bilim felsefesindeki bazı ilkelerin değerlendirilmesine göre de kendi içinde birbirinden farklı yorum ve uygulamalar geliştirmiştir. Örneğin nedensellik ilkesi. Hemen hemen ilgilenilen bütün araştırmaların özünde ya da bir yerinde, açıklanması gereken bir ilişki örgüsü vardır. "Hangi olay veya olgu, diğerinin meydana gelmesine sebebiyet vermiştir?, Bu hipotezde (veya önermede) ortaya konan ilişki nasıl değerlendirilmelidir?" gibi bir dizi soruyla araştırmaya, dolayısıyla da bilginin oluşumuna katkıda bulunmak hedeflenmektedir. Bunu yaparken de ilişkinin determinist mi yoksa olasılıklı mı olduğu benimsenen yoruma göre değişmektedir.

İstatistikte bu düşünsel çeşitlilikler zaman içerisinde belirginleşerek iki yaklaşımda kutuplaşmıştır. (Bilim ve bilim felsefesi arasındaki ilişki tartışılan bir konudur. Bilim felsefesinin, bilime yol çizdiği savunulamadığı gibi, bilimin de bilim felsefesine dayanarak kendini oluşturduğu savunulamaz. Ancak karşılıklı anolojiler kurulabilir.) Klasik yaklaşım tümdengelim yöntemi ile paralellikler gösterirken, Bayesyen yaklaşım, tümevarım yöntemiyle paralellik gösterir. Ayrıca her zaman bu ayırım pek net olamamakla birlikte Klasik yaklaşım nedensellik ilkesinin deterministik yorumuna yakın görünürken, Bayesyen yaklaşım olasılıklı yorumuna yakındır.

2.1 Belirsizliğin değerlendirilmesi

Bayesyen istatistiğe göre bir teori olsun, bir önerme veya bir nedensellik ilişkisi olsun, her kapsamdaki belirsizlik olasılıkları ifade edilmelidir. Yaklaşımın asıl fikri budur. Sözelimi ekonomide tüketimi belirleyen gerçekten ne olduğunu açıklamaya çalışan pek çok yaklaşım vardır; “Tüketimin temel belirleyicisi sürekli gelirdir” yaklaşımı bunlardan biridir. Bayes’de bu ifadeyle ortaya konan ilişki olasılıkları tanımlanır. Lindley’in de (1983) belirttiği gibi “Etrafımız belirsizliklerle sarılmıştır ve bu belirsizlikler hayatımızda hakim bir rol oynamaktadır. Bayesyen paradigma olasılık sayesinde onları anlamaya, idare ve kontrol etmeye ... yarayan güçlü bir araç sağlar.” Klasik yaklaşım belirsizliklerde deterministik davranır. Varsayımlar doğrultusunda söz konusu belirsizliği, orada iddia edilen ilişkiyi, sıklıklarına göre değerlendirerek, kabul edilmesi ya da edilmemesi yönünde karar verir. Tüketim örneğinde ilişkiyi açıklayacak veriye dayanarak, “Tüketimin temel belirleyicisi sürekli gelirdir” der veya “Tüketimin temel belirleyicisi sürekli gelir değildir” der.

Bu bağlamda Bayesyen yaklaşımı benimseyenler, belirsizlikle ifade edilen bir teoriyi tamamen kabul etmenin veya körü körüne reddetmenin bilgi oluşturma sürecine pek bir katkı sağlamayacağı, aksine önemli sayılabilecek yanlışlamalara yol açacağı şeklinde eleştiriler getirebilirler. Öte yandan bu eleştirileri getirirken kendilerini de “Bayesyen yaklaşımda belirsiz olan ilişki, olasılığının hesaplanması suretiyle bir derece aydınlatılmış olur. Böylelikle bilgi ve karar sürecine daha net, yanıtıcı olmayan ilaveler yapar.” şeklinde savunabilirler.

2.2 Olasılık

Olasılığın Mantıksal Teori, Klasik Teori, Frekansçı Teori, Subjektif Teori, gibi teorilerle ortaya konan birbirinden farklı tanımları mevcuttur. Bayesyen yaklaşım bunlardan Subjektif tanımı kabul etmektedir. Bu yaklaşımı esas alarak gelişen Bayesyen istatistikte bir olayın olasılığı, o olaya ilişkin inanç derecesi (ön bilgi, prior) ile denemeden elde edilen sonuçların (verinin) birleştirilmiş halidir. Bir araya getirme işlemi, Bayes teoremine dolayısıyla da koşullu olasılığa dayanmaktadır.

Bayesyen istatistikte olasılık “tümevarım olasılığı”dır. Amaç denemeler yaparak en yüksek olasılığa (“1” olasılığına) yani kesinliğe ulaşmaktır. Bu yol, doğrulamalar yapılarak ilerlenilen bir yoldur. Klasik yaklaşımın paralellik taşıdığı tümevarım yönteminin savunucusu Karl R. Popper’a (2003) göre ise “Aynı diğer kuramlar gibi istatistiksel kuramlar da varsayımsal-tümdengelseldir. Ve diğer tüm kuramlar gibi, istatistiksel varsayımlar da yanlışlanmalarını sağlayan deneylerle –yani ikincil olabirliklerini sifıra ya da hemen hemen sifıra indirgemeye yönelik deneylerle sınırdır.” Başka bir deyişle Klasik’te yanlışlama esas olduğundan amaç “0” olasılığına ulaşmaktır. Yaklaşımların bu konuyla ilgili farklılıklarını şöyle özetleyebiliriz:

“t” bir teori ve “g” onunla ilgili gözlemler ise farklı olasılık yaklaşımlarına göre süreç tablodaki gibidir;

Tablo 1. Bayesyen ve Klasik Yaklaşım İlişkin Olasılık Süreci

Bayesyen yaklaşımda	Klasik yaklaşımda
Varsayımlarsız	Varsayımlarla
↓	↓
Deneme	Deneme
↓	↓
Doğrulama	Yanlışlama
↓	↓
$\frac{1}{2} \ll p(t, g) < 1$	$p(t, g) = 0$

Bayesyen yaklaşımda herhangi bir olayın olasılığı hesaplanırken, deneme yapılan –elbette ki olayın konusuyla ilgili olarak– paranın veya zarın hilesiz olması gibi başlangıç varsayımlarına ihtiyaç duyulmamaktadır. Çünkü pratikte her zaman geçerli olamayacak böyle varsayımları yapmadan, bu konuda gerekli olan alt yapıyı ön bilgi ile sağlamaktadır. Örneğin araştırmacı hilesiz bir zar olduğunu düşünüyorsa ön olasılık 1/6 olurken, hileli bir zar ile yapılan denemde bu olasılık 2/6 olabilmektedir. Öte yandan Klasik yaklaşımda bu olasılık her zaman 1/6’dır. Laplace “Başarı Kuralı” adlı argümanı ile şans oyunlarında olasılık hesaplamalarını değişik bir yaklaşımla ortaya koymuştur. Bir bozuk para N defa atılmış ve K defa yazı geldiği gözlenmiş olsun. Ön dağılımının dikdörtgen dağılım –yani 0-1 aralığında bu olayın gerçekleşmesi olasılığının aynı- olduğu düşünülün. Yazı gelmesi olayının son olasılığı (posterior), (N+1)’inci denemede $\left(\frac{K+1}{N+2}\right)$ ’dir.

Denemenin başlangıcında, ilk atışta bir yazı gelmiş olsaydı Bayesyen son olasılık $\left(\frac{K+1}{N+2}\right) = \frac{2}{3}$ olurdu ki bu sonucun $\frac{K}{N} = \frac{1}{1}$ olmasından çok daha makul görünmektedir. (Burdzy, 2004)

Bayesyen yaklaşıma yöneltilen temel eleştiri olasılığın subjektif olması üzerinedir. Bu konuda ilk çalışma olan “Ramsey ve de Finetti Teoremi (Dutch Book Teoremi)”ne göre, subjektif bir değer sayılan inanç derecesinin sayısal ifadesi, bahis oranıyla $\left(\frac{p}{1-p}\right)$ ortaya konmaktadır.

Doğal olarak bahis oranı olasılık aksiyomlarını sağlamamaktadır ve bununla bağlantılı olarak bu oranın mantıksal tutarlılığa sahip ve güvenilir olduğu söylenemez. Ancak başka bir kriter de başvurulabilir; bahis oranındaki p , ilgilenilen olayların gerçek fiziksel olasılıklarıyla belirleniyorsa bahis oranı “adil”dir (fair), anlamlıdır. Başka bir deyişle, inanç dereceniz denemelere dayalı bir olasılıkla (p) ölçülüyorsa, tutarlılık gereği bahis oranındaki bu olasılık değerinin olasılık aksiyomlarına uyması gerekmektedir (Howson ve Urbach, 1993). Bu saptama paralelinde subjektif inançlarla belirlenen bahis oranının, olasılık aksiyomlarını sağlayan -ve dolayısıyla da tutarlı- olasılık değeri ile belirlenmesi, bahis oranını adil yapar. Subjektiflik tartışmaları devam ederken, Jeffreys, geliştirdiği Objektif tanım ile olasılığın Bayesyen istatistikte subjektif olmadığını, onun önerdiği aşamalardan geçen tüm araştırmacıların aynı sonuca ulaştığını ileri sürmektedir.

Klasik yaklaşım olasılığın frekans tanımını kabul eder. Bu tanıma göre bir olayın olasılığı, o olayın çok sayıda tekrarlanarak yapılan denemelerinin (uzun dönemde) gerçekleşen sıklıklarıdır. N adet mümkün sonuçtan, K adet istenen

olayın gerçekleşmesi olasılığı K/N dir (bir zar atılıyor, 2 sayısının gelmesi olasılığı $1/6$). Bir olay gerçekleşirken mümkün olan sonuçlardan her biri diğerine göre eşit muhtemel varsayılmaktadır. Bu anlamda daha önce de bahsedildiği gibi, Klasik yaklaşımın varsayımlarla yola çıkması, geri planda tümdengelimci yöntemi benimsediğinin göstergesidir. Klasik yaklaşım ile Popper'in görüşü arasındaki benzerliklerin bir ifadesi olarak Popper'in (2003) şu sözlerine yer verilebilir; "... İstatistiksel bir varsayımın sınanması da –aynı diğer varsayımlar gibi- tümdengelimlidir: içeriği –yani sınanabilirliği- yüksek olsa da, önce, varsayımlardan türeyebilecek şekilde bir sınama önermesi oluşturulur, sonra da deneyimle yüzleştirilir." Bayes yaklaşımının, teorilerin olasılıklarının test edilmeleriyle kesinliğe ulaşılması -p(t,g)=1- hedefi, Popper tarafından imkansız görülmüştür. Elde edilen yeni veriye dayalı güncelleme yapıldığında olasılık değerinin yine değişmediğini öne sürer.

2.3 Parametre

Parametre Bayesyen yaklaşımda olasılık dağılımı olan bir rastlantı değişkeni gibi düşünülmektedir. Bu doğrultuda parametrenin tahmincisi için bir ön olasılık dağılımı belirlenir. Mevcut veri ile birleştirilerek parametre tahmincisinin son olasılık dağılımı (posterior) elde edilir. Özetle Bayes'de parametre ile ilgili tüm çıkarsama işlemleri son dağılıma dayanarak yapılır. Klasik yaklaşımda ise parametre, bilinmeyen bir sabit olarak görülür. Parametre tahmini sadece eldeki veriye dayanarak hesaplanır. Dolayısıyla parametrenin kendisi, tekrarlanan gerçek denemelerin sonucu olmadığından, olasılık dağılımının varolduğu düşünülemez.

2.4 Nokta Tahmin

İstatistiğin tahmin sorunsalında temel konulardan biri nokta tahminidir. Bayesyen yaklaşımda ilgilenilen parametrenin nokta tahmini genellikle son dağılımın ortalamasıdır (posterior mean). Karar teorisi açısından bakıldığında, zarar fonksiyonunun beklenen değeri, optimum tahmini verir: y gözlemler, θ parametre ve $\hat{\theta}$ bu parametrenin gözlemlerden tahmini ($\hat{\theta} = \hat{\theta}(y)$) iken, son olasılık dağılımı $p(\theta \setminus y)$, zarar fonksiyonu $L = L(\hat{\theta}, \theta)$, dır. Optimum tahmin ise

$$EL(\hat{\theta}, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\hat{\theta}, \theta) p(\theta \setminus y) d\theta \quad \text{dır.}$$

Klasik yaklaşımda deneme sonunda hesaplanan değer, en iyi tahmin olarak nitelendirilir. Onu iyi yapan özelliklerinin başında yansız, tutarlı ve etkin olması gelmektedir. Bu yaklaşımda etkinlik karşılaştırması yapılırken ortalama hata karesinin değeri ölçüt alınır. Buna karşın Klasik yaklaşım örnekten elde edilen bu en iyi tahminin, sözgelimi ortalamanın, değişmez bir değer olduğunu iddia etmez. (Zaten bu nedenden ki tahminin hatasını ölçmeye çalışır veya tahminin ne kadar güvenle belirli bir aralıkta bulunabileceğini gösteren güven aralığına gereksinim duyar.) Ancak yine de parametrenin tahminine, objektif veya subjektif olsun, olasılık tayin edilmesini reddeder.

Nokta tahmin başlığı altında istatistikte tahmincinin değerlendirilmesinde kullanılan, Bayesyen ve Klasik yaklaşım için birbirinden farklı önem derecelerine sahip bazı kriterlere de değinilmiştir.

2.4.1 Yeterlilik

İlgilenilen parametreye ilişkin mümkün olan tüm bilgiyi içeren istatistik, yeterli istatistiktir. Bayesyen ve Klasik yaklaşım bu tanımda hemfikirdir. "Fakat yeterlilik Klasik nokta-tahmin teorisinde sadece bir varsayım olarak yer

almaktayken, Bayesyen hesaplamada onun kanıtı mevcuttur.”(Howson ve Urbach, 1993). Aslında Klasik yaklaşımın görüşüyle pek bağdaşmaz. Çünkü yeterliliğin özünde parametrenin koşullu olasılığı vardır. Bir parametrenin olasılığının olması da Klasik görüşe taban tabana zıttır.

Klasik yaklaşım önce, yeterli istatistiğin ilgili tüm bilgiyi içermesi sezgisinden hareket eder, sonra yeterliliği tahmincinin değerlendirmesinde bir kriter olarak nitelendirir. Ancak kanıt anlamında açıklamaları yoktur. Yani sezgilerinin kaynağını açıklayamazlar. Bayesyen yaklaşıma göre ise kaynak Bayes Teoreminden başka bir şey değildir (Howson ve Urbach, 1993). Adım adım ilerleyerek bahsedilen kanıtı ulaşırsa: Parametre θ , örnek değerleri $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ iken t de, $t = t(X)$, X 'in fonksiyonu bir yeterli istatistiği gösteriyorken;

Yeterliliğin anlamını açıklayan matematiksel ilişkiler;

1-) $P(X \setminus t \ \& \ \theta) = P(X \setminus t)$ diğer bir ifadeyle,

$$\left(f(X_1, X_2, \dots, X_n \setminus t) = \frac{f(X_1, X_2, \dots, X_n, t)}{g(t)} = \frac{f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{g(t)} \right) \text{ ve}$$

2-) $P(\theta \setminus X) = P(\theta \setminus t)$, dir.

1-) $P(X \setminus t \ \& \ \theta) = P(X \setminus t)$; Olabilirlik (likelihood) ilkesi açısından yazılan ifadeye göre, parametre(θ) ve yeterli istatistik(t) veri iken, X 'leri gözlemenin olasılığı; sadece yeterli istatistik veri iken X 'leri gözlemenin olasılığına eşittir. Dolayısıyla X 'in koşullu olasılık dağılımı parametreden bağımsızdır. Parametre olmadan da “yeterli” istatistik aynı ilişki sağlar.

2-) $P(\theta \setminus X) = P(\theta \setminus t)$; Bu ifade ise başka bir açıdan (normal koşullu olasılık ile) bakarak aynı kavramı açıklar. Gözlemler (X) veri iken parametrenin (θ) olasılığı; yeterli istatistik (t) veri iken elde edilen parametre olasılık değerine eşittir. Yani gözlemler yerine “yeterli” istatistik de parametrenin olasılığını açıklasa değer aynı olacaktır.

Yukarıdaki eşitliklerden hareketle, Bayes Teoremine göre yeterliliğin ispatı (Howson ve Urbach, 1993), θ , t ve X 'in her değeri için,

$$P(X \setminus \theta \ \& \ t) = \frac{P(\theta \setminus X \ \& \ t).P(X \setminus t)}{P(\theta \setminus t)}$$

Burada $P(\theta \setminus X \ \& \ t)$ olasılığı, $P(\theta \setminus X)$, e eşittir. Çünkü t , X 'den hesaplanmıştır. Teoremden yerine konursa,

$$P(X \setminus \theta \ \& \ t) = \frac{P(\theta \setminus X).P(X \setminus t)}{P(\theta \setminus t)}$$

olur. Bu aşamada birinci eşitlik kullanılırsa ikinci eşitlik; ikinci eşitlik kullanılırsa birinci eşitlik –sadeleştirmeyle- elde edilir. Böylelikle yeterliliğin ispatı yapılmış olur. Ayrıca belirtmek gerekir ki yeterlilik, Bayesyen yaklaşım için oldukça önemli bir ölçüttür. Ön dağılımın elde edilmesinde de bu özellikten yararlanır.

2.4.2 Yansızlık

Tahmincinin beklenen değerinin, parametrenin gerçek değerine eşit olması demektir: θ parametre ve $\hat{\theta}$ bu parametrenin tahmincisi iken, tahminci yansız ise $E(\hat{\theta}) = \theta$, dır.

Klasik yaklaşımda iyi bir tahminci yansızdır. Öte yandan Bayesyen tahminciye (son dağılımın ortalamasına) bakıldığında yansız olmadığı görülüyor. Bu ispat şöyle gösterilebilir (Casella ve Berger, 1990);

Y gözlemlerden elde edilen tahmin, $f(y \setminus \theta)$ bu gözlemlerin o.y.f.'si, θ ise parametredir. $E_{\theta}(Y) = \theta$ Klasik yaklaşımın yansızlık ifadesidir. Bayesyen nokta tahmini (son dağılımın ortalaması) aşağıdaki gibidir;

$$E(\theta \setminus y) = \int \theta P(\theta \setminus y) d\theta$$

O halde yukarıda belirtilen son dağılımın ortalamasının yansız olması için, şu eşitliği sağlaması gerekmektedir;

$$E_{\theta}[E(\theta \setminus Y)] = \int \left[\int \theta P(\theta \setminus y) d\theta \right] f(y \setminus \theta) dy = \theta$$

(Burada tahminci olarak Y yerine, son dağılımın ortalaması koyulmuştur.)

Y tahmincisinin varyansının tanımından yola çıkılarak, Bayes tahmincinin beklenen değerinin parametre değerine eşit olup olmadığına bakılmaktadır.

Aşağıdaki ifade θ ,ya göre koşullu hale getirilirse;

$$\begin{aligned} E[(Y - \theta)^2] &= E[Y^2 - 2Y\theta + \theta^2] \\ &= E[E((Y^2 - 2Y\theta + \theta^2) \setminus \theta)] \quad \text{Beklenen değeri alınır.} \\ &= E[E(Y^2 \setminus \theta) - 2\theta^2 + \theta^2] \quad \text{Burada } (E(Y \setminus \theta) = E_{\theta}Y = \theta) \text{ varsayılır.} \\ &= E[E(Y^2 \setminus \theta) - \theta^2] \\ &= E(Y^2) - E(\theta^2). \end{aligned}$$

Benzer bir biçimde, Y ye göre koşullu olursa;

$$\begin{aligned} E[(Y - \theta)^2] &= E[E((Y^2 - 2Y\theta + \theta^2) \setminus Y)] \\ &= E(Y^2 - 2Y^2 + E(\theta^2 \setminus Y)) \quad \text{Burada } E(\theta \setminus Y) = Y \text{ varsayılır.} \\ &= E(\theta^2) - E(Y^2). \end{aligned}$$

Her iki hesaplamının yansızlık değerlendirmesi yapılırsa;

Eğer $E(\theta^2) = E(Y^2)$ eşitliği sağlanıyorsa, başka bir deyişle $E[(Y - \theta)^2] = 0$ ise, tahminci Y , parametre θ ,ya eşit demektir. Bunun gerçekleşme olasılığı - $P(X=\theta)=1$ - da "1" demek oluyor ki bu da imkânsızdır. Dolayısıyla hem $E(Y \setminus \theta) \neq \theta$ ifadesi, hem de $E(\theta \setminus Y) \neq Y$ ifadesi kabul edilmelidir. Varılan sonuç gösterir ki son dağılımın ortalaması yanlıdır.

Bayesyen analizde bu sonucun değeri yoktur. Klasikğin iddia ettiği gibi yansızlığı gerekli görmemektedir. Çünkü en başta Bayesyen yaklaşım parametrenin tanımını farklı yapmaktadır. Tahmini Bayes yaklaşımına göre elde edip, Klasik yaklaşımın kriterlerine göre değerlendirmek pek doğru değildir.

Genellikle yanlış tahmincilerin yansız tahmincilere göre ortalama hata karesi daha küçüktür. Sözgelimi Ridge tahminci de yanlış bir tahmincidir ama yansız tahmincininkinden daha küçük bir ortalama hata karesi vardır. Şunu da söylemek gerekir ki tahminde karşılaşılan bazı sorunlar yanlış bir tahminci kullanıldığında giderilebilmektedir. Kısaca Bayesyen yaklaşım açısından bakıldığında hiç de önemli olmayan bir değerlendirme ölçütüdür.

2.4.3 Tutarlılık

Tutarlılık kriteri tahmincinin limitteki özelliğidir. Örnek büyüklüğü sonsuza gittikçe, tahmincinin değeri ile gerçek parametre değeri arasındaki farkın, epsilon gibi bir sayıdan küçük olma olasılığı 1'e yaklaşır: θ parametre, $\hat{\theta}$ bu parametrenin tahmincisi ve ϵ başlangıçta belirlenen sıfırdan büyük herhangi bir sayı iken,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \epsilon\right) = 1 \text{ 'dır.}$$

Klasik yaklaşımda oldukça önemli bir özelliktir. Bayesyen yaklaşımda, tutarlılığın ilgilenilmesi gereken bir kriter olup olmadığı tartışılmaktadır. Bir görüşe göre tahmincinin tutarsızlığı göz ardı edilebilir. Zira Klasik yaklaşım bunun gerekliliğini yeterince açıklayamamaktadır (Howson ve Urbach, 1993). Başka bir görüşe göre ise parametrik Bayesyen analizde daima tutarlı tahminci elde edilir ve bu önem verilmesi gereken bir konudur. Diaconis ve D. Freedman (1986) çalışmalarıyla, parametrik olmayan Bayesyen analizde karşılaşılan tutarsızlık sorununa işaret etmiştir. Bu nedenle J. Berger (1986) tutarlılığa vurgu yaparak, önemle ele alınması gerektiğini ifade etmiştir.

Bayesyen yaklaşımda, başka bir tanımla tutarlılığı ifade eden önemli diğer bir kavram da yine "tutarlılık" olarak çevrilebilecek "coherence"dir. Bu anlamda tutarlılık (coherence), ilgilenilen belirsiz önermelerin ortaya koyduğu olasılık sonuçlarının birbiriyle çelişkili olmaması fikrine dayanır.

2.4.4 Etkinlik

Yine Klasik disiplin içinde anlamlı sayılabilecek değerlendirme ölçütlerinden biri olan etkinlik ile, tahmincinin mümkün olan en küçük varyansa sahip olması şartı aranmaktadır. Klasik yaklaşımda yansız tahmincilerden biri tercih edilecekse, varyansı küçük olan, başka bir ifadeyle olasılık dağılımı daha dar aralıkta yayılan, tahminci seçilir. Bilindiği gibi, ortalama hata karesi de etkinliği ölçmektedir.

Klasik yaklaşımın iddiasına göre, Bayes tahmincinin (son dağılımın ortalamasının) ortalama hata kareleri hesaplandığında, elde edilen sonuç söz konusu tahmincilerin etkin olmadığını göstermektedir. Klasik yaklaşım bunu şöyle açıklamaktadır; Bayesyen analizde, hemen hemen ön dağılımın yol açtığı etki ile kalın kuyruklu olan son dağılımdan yapılan tahmin büyük ölçüde yanlıdır. Ayrıca etkinliği de sağlayamamaktadır. Bazı durumlarda aynı ön dağılımla hesaplanan parametrenin son dağılımının ortalaması, ortalama hata karesi kriterine göre iyi bir tahminci değilken, modu, iyi bir tahminci olabilmektedir (Box ve Tiao, 1992). (Örneğin varyans parametresinin tahmini için bilgi vermeyen ön dağılım seçilmiş olsun. Zarar fonksiyonu kareli ise optimum sonuç son dağılımın ortalaması iken, zarar fonksiyonu mutlak değer ise son dağılımın modu optimum tahmindir. Ortalama hata karesi kriterine göre ortalama kötü, mod iyi bir tahmindir.) Fakat Klasik yaklaşım sadece ortalamayı göz önünde bulundurarak Bayes tahmincinin iyi bir tahminci olmadığını söylemektedir. Üstü kapalı olarak da ön dağılımın buna yol açtığı belirtilmektedir.

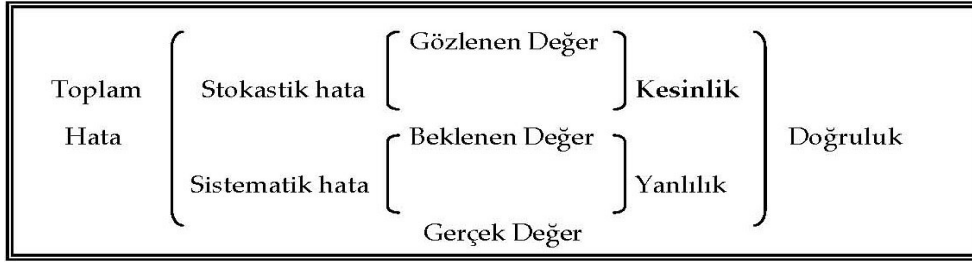
Bayesyen anlayışta ortalama hata karesi keyfi bir kriterdir. Son dağılımın ortalaması, son dağılımın sadece bir ölçüsüdür. Ortalama bazen bilgi veren bir toplanma ölçüsü olurken, bazen de göz ardı edilmesi gereken bir ölçüdür.

Dolayısıyla, dağılımın tamamı göz önünde bulundurularak, parametreye ilişkin çıkarıma yapılmalıdır. Dağılımın bir ölçüsü keyfi bir kritere göre değerlendirilmemelidir (Box ve Tiao, 1992).

2.4.5 Kesinlik

Kesinlik (precision) varyans ile ters orantılıdır. Bir değerlendirme ölçütü olarak kesinlik, istatistikte tahmin kriterleri olarak kabul edilen diğer kavramlarla karşılaştırılmalı daha iyi anlatılabilir. Tablo 2’de de görüldüğü gibi kesinlik, hatanın olasılıklı kısmını içerir ve sistematik hatanın yapılmadığı varsayılırsa, gerçek değerden sapmayı ifade eder. Tümüyle Bayesyen çatıda yapılan bir analizde varyans yerine kesinlik alınarak, gerçek değer olasılığı hesaplanır.

Tablo 2. Kesinliğin değerlendirilmesi



2.5 Güven Aralığı

İstatistiğin tahmin sorunsalında temel konulardan biri de aralık tahminidir. Güven aralıklarına ilişkin bilgi, başka bir deyişle parametrenin belirli değerler arasında yer aldığı (veya Bayesyen yaklaşıma göre yer alma olasılığının) bilgisi anakütleyi tanımada, tanımlamada yardımcıdır.

Bu noktada belirtmek gerekir ki Bayesyen yaklaşım, Klasik yaklaşımın “güven aralığı” (*confidence interval*) tanımlaması yerine, “güvenilir aralık” (*credible interval*), “Bayesyen aralık” (*Bayesian interval*) veya “En Yüksek Son Yoğunluk Bölgesi veya Aralığı” (*Highest Posterior Density Region or Interval*) tanımlamalarını kullanmaktadır.

Aslında tanımlamada farklı olduğu gibi yorumlamada da farklıdır; Bayesyen yaklaşımda, son dağılımın ortalaması için, örneğin 0,95 güven düzeyinde bir güven aralığından söz ediyorsak, bu aralığın son dağılımın ortalamasını içermesi olasılığı -son dağılımın ortalamasını içereceğine olan inanç derecesi- %95’tir.

Bayes’de hesaplanan son dağılım $p(\theta \setminus y)$, a göre, y veri iken parametre θ , nın, parametre uzayının belirli bir \bar{R} altbölgesinde bulunması olasılığı;

$$P\{\theta \in \bar{R} \setminus y\} = \int_{\bar{R}} P(\theta \setminus y) d\theta \text{ dır.}$$

Yukarıdaki ifadede, kapsanacak olasılık miktarı 0,95 olarak belirlenirse;

$$P\{\theta \in \bar{R} \setminus y\} = \int_{\bar{R}} P(\theta \setminus y) d\theta = (1 - \alpha) = 0,95$$

aranılan bölgenin sınırlarına ya da aralığın değerlerine ulaşılabilir. Bu bölge/aralık “En Yüksek Son Yoğunluk” bölgesi/aralığı (*Highest Posterior Density Region/Interval*) olarak adlandırılır. Çünkü bölge/aralığın içindeki her bir noktanın olasılık yoğunluğu, dışındaki noktaların her birinden daha büyüktür. Ayrıca içereceği olasılık miktarı veri iken, bölge parametre uzayında mümkün olan en küçük hacme sahip bölgedir; aralık da mümkün olan en dar aralıktır (Box ve Tiao, 1992).

Klasik yaklaşım içinde iki farklı yorum mevcuttur. Birisi subjektif olan “0,95 güvenle konuşulabilir ki parametre bu aralıktadır.” (subjective-confidence interpretation) yorumu. Bir diğeri de Neyman’ın kabul ettirdiği şu an tek hakim yorum olan, “Tekrarlanan denemeler sonucu, farklı veriye dayalı aralıkların %95’i parametrenin gerçek değerini içerir.” (categorical-assertion interpretation) yorumudur. Bu bağlamda Klasik yaklaşımın güven aralıklarını da sıklık yorumuyla değerlendirdiği söylenebilir. Bu yorumda, diyelim ki %95 güven düzeyi için, uzun dönemde hesaplanan aralıkların 100 tanesinden 95’inin gerçek ortalamayı içerdiği ifade edilir. θ parametre iken, sözgelimi 0,90 güven düzeyinde yapılan hesaplama sonucu elde edilen aralık $\theta_1 < \theta < \theta_2$ olsun. Bu aralık $[\theta_1, \theta_2]$, olabilecek aralıklardan sadece biridir. Bunun devamında farklı rastlantısal örnekten elde edilebilecek aralıkların gerçek ortalamayı içermeye oranının %90 olduğu kabul edilir. Parametre değeri, bilindiği gibi Klasik yaklaşımda sabit bir değerdir ve olasılık dağılımı yoktur. Bu bilinmeyen değeri aralık ya kapsar ya da kapsamaz. Dolayısıyla dikkat edilmelidir ki, rastlantısal olan aralıktır, parametre değil.

2.6 Hipotez Testi

İstatistikte anakütleyi anlamaya ve çözmeye çalışırken parametrelere ilişkin iddiaların yer aldığı bazı önermelerden yararlanılır. Hipotez olarak adlandırdığımız bu önermelerde ortaya atılanlar araştırmacının karar vermesini sağlayan bir test sürecinden geçer; hipotez testi sürecinde parametrenin iddia edilen değere eşit olup olmadığı veya sözü edilen aralıkta bulunup bulunmadığı test edilir ve böylelikle anakütle ile ilgili belirsizlik bir parça aydınlatılmış olur.

Bayesyen yaklaşımda hipotezlere olasılık tayin edilir. Bu, yaklaşımın olasılık teorisine daha geniş bir mantıksal açıdan bakması nedeniyledir. Klasik Aristo mantığına göre bu değer 0 veya 1 olması değil, 0-1 aralığında değerler alması söz konusudur (Alder, 2003). Yani bir hipotez kabul ya da reddedilmez, onun sahip olduğuna inanılan olasılığı belirlenir. Ancak bu noktada belirtmek gerekir ki, Bayesyen yaklaşım, çift taraflı hipotez testi söz konusu ise zayıftır. Çünkü sürekli bir dağılımda parametrenin “0”a eşit olma olasılığı “0”dır. Buna önerilen çözüm, örneğin regresyon katsayısı için “0”a yakın bir değer almaktır.

Bayesyen yaklaşımda bilinen süreç burada da geçerlidir. Hipotezlerin ön olasılıkları belirlenir ve ardından son olasılıklarına ulaşılır. Burada karar verilirken son olasılığı en fazla olan hipotez, en iyi seçim olacaktır. Bayesyen yaklaşımda hipotezlerin olasılıkları karşılaştırılarak karar verildiği için genellikle “hipotez testi” yerine “hipotezlerin karşılaştırılması” ifadesi benimsenmektedir (Zellner, 1971). h_0 ve h_1 hipotezleri, y gözlemleri, θ ve ϕ parametreleri, θ_0 ve ϕ_0 bu parametrelerin belirli değerlerini gösterirken;

$$\frac{P(h_0 \setminus y)}{P(h_1 \setminus y)} = \frac{P(h_0)}{P(h_1)} \times \frac{P(y \setminus \theta = \theta_0)}{P(y \setminus \phi = \phi_0)}$$

sonucuna göre değerlendirme yapılır. Bu yukarıdaki ifade şöyle açıklanabilir;

son bahis oranı = ön bahis oranı x bayes faktör

(1.1) eşitliğinde $P(h_0) = P(h_1)$ ise veya bilgi vermeyen ön dağılım için $P(h_0) = P(h_1) = \frac{1}{2}$ ise son bahis oranı **Bayes Faktöre** eşit çıkar. Bu durumda da bayes faktör **Olabilirlik Oranı** (Likelihood Ratio, LR) ile aynı olur.

Klasik yaklaşımda hipotez testi süreci Fisher’in çalışmalarıyla başlamış ve gelişmiştir. Ona göre araştırmacı reddetmesi gereken hipotezi genellikle h_0 olarak belirler. Bu yaklaşımıyla Fisher’in Popper’in yanlışlaması ile paralellik taşıdığı

söylenbilir. Gerekliyse başlangıç varsayımı (örneğin atılan paranın hilesiz bir para olması) yapılır ve hipotez belirlenir. Kullanılacak test istatistiği örnekten elde edilen bilgiyle hesaplanır. Benimsenen testin önem düzeyine (significance level) dayanarak, kurulan h_0 hipotezi kabul veya reddedilir. Ancak daha sonra Neyman ve Pearson çalışmalarıyla bu konunun geliştirilmesine önemli katkı sağlamışlardır. Neyman ve Pearson, h_0 sıfır (h_0) hipotezinin, alternatif bir hipotez (h_a) ile karşılaştırılması gerektiğini düşünmüşlerdir. Yine hipotezler ya kabul ya da reddedilecektir. Test süreci de aynıdır. Ancak burada çıkarım yapılırken iki tip hata ortaya çıkmaktadır: Birinci tip hata (h_0 doğru iken hipotezi reddetme) ve ikinci tip hata (h_0 yanlışken hipotezi kabul etme). Karar verirken, testin gücünü (yanlış olan h_0 'ı reddetme olasılığını) maksimum yapmak gerekmektedir. Ancak aynı zamanda h_0 'ı reddederken, h_0 'ın doğru olma olasılığının da minimum olması gerekmektedir. Daha önce de değinildiği gibi Olabilirlik Oranı istatistiği de hipotezlerin karşılaştırmasına olanak verir; h_0 altında, parametrenin verilen bir değere eşit olma olasılığının en yüksek olduğu olabilirlik tahmininin, parametrenin tüm mümkün değerleri için en yüksek olabilirlik tahmini değerine oranlanması ile bulunur.

Hipotezlerle ilgili karar vermede görüldüğü üzere, Bayesyen ve Klasik yaklaşım tamamen birbirinden farklıdır. Daha önce de değinildiği gibi, hipotezlere olasılık tayin ederek, tekrarlanan denemelerin sonuçları ışığında en yüksek olasılık değeri olanı seçmek (Bayes'in kesinliğe ulaşma hedefi doğrultusunda) yöntem olarak tümevarım ile paralellik gösterirken; yanlışlanması istenen hipotezi belirleyerek, tekrarlanan denemelerle bunun reddedilmesi yoluna gidilmesi tündengelimci yöntem ile paralellik göstermektedir. Bu paralellik etkileşimin değil, benzerliğin ifadesidir.

3. OBJEKTİF VE SUBJEKTİF BAYESYEN ANALİZ AYRIMI

Kavramlara değinirken objektif ve subjektif Bayesyen analiz ayırımından söz edilmişti. Bu güncel konu, ilgili çevrelerde kapsamlı olarak tartışılmaktadır. Veriyi analiz etme süreci pek çok subjektif seçim yapmayı gerektireceğinden, istatistiksel analiz objektif olmakla ilgili sorun yaşar (Berger, 2006). Objektif ve subjektif analiz ayrımı, Bayesyen yaklaşımda, istatistiksel modelin parametreleri için yapılan ön dağılım tercihi ile başlamaktadır. Örneğin Jeffreys'in ön dağılımı, Referans ön dağılım veya Maksimum Entropi ön dağılımı kullanılıyorsa Objektif Bayesyen analiz yapıldığı söylenebilir. Buna karşın Fienberg'e (2006) göre subjektif Bayesyen analiz kapsamında subjektif olasılık için aksiyomatik dayanak sağlayan çalışmalar yapılmıştır. Öte yandan objektif Bayes için kabul edilebilir herhangi bir normatif teori ve karşılaştırılabilir çalışma yoktur.

Aslında objektif Bayesyen analizi tanımında ve amaçlarında bir fikir birliği yoktur. Farklı felsefi yaklaşımlar vardır. Bir yaklaşıma göre, istatistiğin amacı veriden bilgi edinerek, tamamen "tutarlı" (coherent) bir objektif Bayesyen yöntem bulmaktır. Dolayısıyla objektif Bayesyen yaklaşım da tutarlı (coherent) olmalıdır. Diğer bir yaklaşıma göre, belirli bir olayda ortaya çıkan belirsizliği objektif olarak analiz etmek ve değerlendirmek için objektif Bayesyen analiz en iyi yöntemdir. Bir diğeri, subjektif bir analizin yapılmasının makul görülmediği durumlarda, bir konvansiyon olarak objektif Bayesyen analize başvurulması gerektiği görüşündedir (Berger, 2006). Elbette tüm bu iddia ve saptanan amaçlar eleştirilebilir. Sözgelimi Berger'e (2006) göre tutarlılık (coherent) hedefi her zaman yakalanamayabilir.

Bu noktada tutarlılık hedefi üzerine açılım getirmek gereklidir. Tutarlı (coherent) çıkarsama tanımı ve tutarlı (coherent) karar alma üzerine çok çeşitli bir aksiyom sistemi vardır. Bu sistemlerin vardığı sonuç ise şudur; analiz, tamamen tutarlı (coherent) olması için, subjektif Bayesyen yapı ile karşılaştırılabilir olmalıdır. İşte bu nedenle Berger'in ifade ettiği gibi, tutarlılığın (coherent) standart

tanımı göz önünde bulundurulduğunda objektif Bayesyen analiz, olabilirlik ilkesi gibi ilkeleri bozduğu için, tutarlı (coherent) olmayabilir (Berger, 2006).

Objektif Bayesyen yaklaşımın subjektife bir eleştirisi, ön dağılımları (uzman görüşünden elde edilen bilgiye göre ortaya çıkarılan ön dağılımlar (elicited prior)) oluşturma süreci için çok fazla çalışma yapma gerekliliğidir ki bu da zaman ve maliyet açısından etkinliği azaltır. Diğer yandan uygulamada önemli açılımlar sağlayan, pragmatik açıdan subjektif Bayesyen analizin geçerliliği, objektif Bayesyen okul tarafından kabul edilmektedir.

Subjektif Bayesyen okulun da öne sürdüğü gibi, subjektif yaklaşım, bir çok önemli uygulama sorununun üstesinden gelebilen, tek uygulanabilir yöntemidir (Goldstein, 2006). Ayrıca yine bu okulun görüşünün uzantısı olarak, normatif zemine dayalı subjektif Bayesyen yaklaşımın daima üstün olduğu düşünülür. Ancak pragmatik nedenlerle, objektif Bayesyen yaklaşımın da her zaman frekansçı (Klasik) yaklaşıma üstünlüğünün olduğu kabul edilmektedir (Fienberg, 2006). Objektif Bayesyen okula bir anlamda eleştiri olarak şu soru sorulmaktadır; Objektif Bayesyen çıkarsama, “iyi frekansçı özellikleri olan Bayesyen yöntemler” olarak mı yorumlanmalı? Eğer öyleyse, “Frekansçı-Bayes” olarak adlandırılmalıdır (Wasserman, 2006).

Şu an için denilebilir ki objektif ve subjektif analiz ayrımı konusunda pek bir uzlaşma görülmemektedir. Sadece “objektif” olarak isimlendirmenin genel olarak Bayesyen yaklaşıma yöneltilen subjektiflik eleştirilerinden bir ölçüde sıyrılacağı görüşü de vardır.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmada Bayesyen yaklaşımın Klasik yaklaşımdan farklılıklarına değinmek suretiyle temel özelliklerine işaret edilmiştir. Bayesyen yaklaşımın en temel argümanı Klasik yaklaşımla analiz yapan pek çok araştırmacının ad hoc yol ile ön bilgiyi kullanmasıdır. Ancak Bayesyen yaklaşım belirlenmiş ve tutarlı ilkeler çerçevesinde ön bilgiyi kullanmaktadır.

İki yaklaşım arasındaki tartışma, ilgili çevrelerde geçmişte kendine çok yer bulmuş, halen de bulmaktadır. Bilimsel ilerleme için tartışma kaçınılmazdır. Bu nedenle alması gereken yöntemleri dışlamak yerine, yaygın olarak kabul gören yorumları sorgulamakta kullanmak gerekmektedir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde Bayesyen analiz içerisindeki bir tartışmaya kısaca yer verilmiştir. Objektif ve subjektif Bayesyen analiz farkını, örneklendirerek etkin tartışmak için, aslında ön dağılım türlerine değinmek gerekmektedir. Ancak bu çalışmanın kapsamı dışında tutulmuştur. Bu nedenle giriş düzeyinde düşünsel bağlamla sınırlı kalmıştır.

KAYNAKÇA

- Alder, M.D. (December 2003). Workshop on intelligent system. <http://www.maths.uwa.edu.au/~mike/mumford/workshop_session1.pdf> (01.03.2004).
- Berger, J. (March 1986). Discussion: on the consistency of bayes estimates. *The Annals of Statistics*, Vol. 14, No. 1, 30-37.
- Berger, J. (2006). The case for objective bayesian analysis. *Bayesian Analysis*. 1, Number 3, s. 385-402.
- Box, G.E.P Ve Tiao, G.C. (1992). *Bayesian inference in statistical analysis*. Wiley Classics Library Edition, New York, John Wiley & Sons.

- Ekici, O. (2005). *Bayesyen regresyon ve winBUGS ile bir uygulama*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.
- Burdzy, K. (2003). Probability is symmetry on foundations of science of probability. <<http://www.math.washington.edu/~burdzy/Bayes/book.pdf>> (1.02.2004).
- Casella G. Ve Berger R.L. (1990). *Statistical inference*. Belmont, California, Duxbury Press.
- Demir, Ö. (2000). *Bilim felsefesi*. (3.Basım), Ankara: Vadi Yayınları.
- Diaconis, P. Ve Freedman, D. (March 1986). On inconsistent bayes estimates of location. *The Annals of Statistics*, Vol. 14, No. 1, s. 68-87.
- Fienberg, S. (2006). Does it make sense to be an “objective bayesian”? *Bayesian Analysis*, 1, Number 3, s. 429-432.
- Goldstein, M. (2006). Subjective bayesian analysis: principles and practice. *Bayesian Analysis*, 1, Number 3, s. 402-420.
- Howson C. Ve Urbach P. (1993). *Scientific reasoning: The bayesian approach*. (2.Basım), Illinois, Open Court.
- Lindley, D. (1983). Theory and practice of bayesian statistics. *The Statistician*, 32, s. 1-11.
- Popper, K.R. (2003). *Bilimsel araştırmanın mantığı*. Çev. İlknur Aka – İbrahim Turan, (2.Basım), İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.
- Wasserman, L. (2006). Frequentist bayes is objective. *Bayesian Analysis*, 1, Number 3, s. 451-456.
- Zellner, A. (1971). *An introduction to bayesian inference in econometrics*. New York, John Wiley & Sons.

Araş. Gör. Oya EKİCİ

İstanbul Üniversitesi, İktisat Fakültesi, İngilizce İktisat Bölümü'nden 2000 yılında mezun oldu. 2005 yılında İstanbul Üniversitesi, Ekonometri Anabilim dalında yüksek lisansını tamamladı. Halen aynı Anabilim dalında doktora devam eden Oya Ekici, Bayesyen Yöntemler üzerinde çalışmaktadır.