

İki Boyutlu Çatlak Poblemlerinde J İntegralin Sayısal Çözümü**Mete Onur KAMAN¹, Ahmet Murat AŞAN^{2*}**¹ Firat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Elazığ.Sorumlu yazar e-posta*: ahmetmuratasan@hotmail.com ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-9174-7585
mkaman@firat.edu.tr ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-0178-6079

Geliş Tarihi: 03.12.2019

Kabul Tarihi: 27.08.2020

Öz**Anahtar kelimeler** J -integral; ANSYS; Sonlu elemanlar metodu; Kırılma tokluğu; Çatlak

Kırılma, malzemelerin gerilme altında birden fazla parçalara ayrılması olarak tanımlanmaktadır. Kırılma tokluğu ise, çatlaklı bir malzemenin kırılmaya karşı direncini gösteren malzemelerin mekanik özelliklerinden biridir ve J -integral yöntemi, kırılma tokluğunun geometriden bağımsız ölçümünü veren bir yöntemdir. Bu çalışmada, izotropik özelliklere sahip kenar çatlaklı numune, farklı takviye açlarına sahip 45° merkez çatlaklı ortotropik özellikte dikdörtgen numune ve merkezinde farklı açılarda çatlaklar ihtiva eden izotropik özelliklere sahip kare numune için, J -integral'i değerleri ANSYS APDL kullanılarak tespit edilmiştir. ANSYS kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar, simgesel bir matematik yazılımı kullanılarak, analitik olarak ta elde edilerek, sayısal ve analitik sonuçlar mukayese edilmiştir. Sonuçta; J -integralin çatlak ucuna olan uzaklığına göre değişimi incelenmiş olup, sayısal ve analitik sonuçlar arasındaki hata payının % 0.0462 ile % 2.8149 arasında değiştiği tespit edilmiştir.

Numerical Solution of J Integral in Two Dimensional Crack Problems**Abstract****Keywords** J -integral; ANSYS; Finite element method; Fracture toughness; Crack

Fracture is defined as breaking of materials under stress and breaking them into more than one part. On the other hand, fracture toughness is one of the mechanical properties of materials showing the resistance of a material that has a crack and the J -integral method is a method that gives the geometry independent measurement of fracture toughness. In this study, the J -integral values were determined for a specimen which is a crack in its edge and having isotropic properties, a rectangular specimen which is orthotropic properties in addition to different reinforcement angles and having a 45° crack in its center and a square specimen which is the different cracks in its center and having isotropic properties using ANSYS APDL. Numerical results obtained using ANSYS were also obtained analytically by using a symbolic mathematics software and numerical and analytical results were compared. As a result; The variation of the J -integral with respect to the distance to the crack tip was investigated and it was found that the error margin between numerical and analytical results varied between 0.0462 % and 2.8149 %.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Kırılma, insanların oluşturmuş olduğu yapılar varlığını devam ettirdiği süre boyunca toplumun karşılaşacağı bir problemdir. Tasarımı yapılan karmaşık yapılar ve elde edilen ileri teknoloji bu problemlerin önceki yüzyıllardan daha fazla olmasına sebep olmaktadır. Bu duruma örnek olarak, uzay teknolojisinin gelişmesi ile birlikte hava yolu kazalarının meydana gelmeye başlaması,

verilebilir. Meydana gelen bu tür problemlerin engellenebilmesine kırılma mekaniği alanında sağlanan ilerlemeler yardımcı olmuştur. Malzemelerde hasarların meydana gelmesinin aşamaları ve malzemelerin hasarlardan korunabilmesi için yapılan işlemler zaman içerisinde artış göstermiştir. Hasarların felaketle sonuçlanması neticesinde, ekonomide büyük zararlar meydana gelmektedir. Hasarın en aza indirilmesi, kırılma mekaniğinde sağlanan gelişmeler sayesinde mümkün olur. Çünkü; Kırılma mekaniğinin inceleme

alanı çoğunlukla kırılmadan dolayı oluşan hasarlardır. Kırılma ile ilgili olarak yapılan ilk çalışma, Griffith tarafından cam malzemelerdeki gevrek çatlakların ilerlemesinin incelenmesiyle gerçekleştirilmiştir. Griffith, yapı üzerinde var olan bir çatlağın, sistemin sahip olduğu toplam enerjisindeki azalma neticesinde ilerlemeye başlayacağını formülasyonunu elde etmiştir (Griffith 1921). Griffith, öngördüğü basit enerji dengesinde, gerilmenin etkisi altında bulunan bir sistemde, çatlağın ilerlemesi ile birlikte elastik şekil değiştirme enerjisinde bir azalmanın ortaya çıktığını belirtmiştir (Griffith 1921). Bu enerjinin de, çatlak yüzeylerinin oluşması için gerekli olan enerji olduğunu tespit etmiştir. Griffith' in sunmuş olduğu enerji dengesi çalışmasının ardından Irwin, enerji dengesinin, plastik deformasyon esnasında yapılmış olan iş ve yüzey enerjisi ile depo edilen şekil değiştirme (genleme) enerjisi arasında olması gerektiğini irdelemiş ve sünek malzemeler üzerinde yeni çatlak yüzeylerinin meydana gelmesi için gerekli olan enerjinin, plastik deformasyon esnasında yapılmış olan iş yanında genellikle önemsiz derecede küçük olduğunu savunmuştur (Irwin 1960). Irwin, bu çalışması sonucunda, birim kalınlık başına, meydana gelen, çatlak uzunluğundaki birim artış için depo edilen toplam enerjiyi tanımlayan aynı zamanda çatlak itici gücü veya enerji yayılım hızı olan G , olarak isimlendirdiği bir malzeme özelliği tanımlamıştır. Gerilme şiddet faktörü K ' nin ve G ' nin eşdeğer olması, Lineer Elastik Kırılma Mekaniği' nin (LEKM) ilerlemesine temel sağlamıştır. Çünkü, tüm malzemeler için, bir çatlak ucunun etrafında ve yakınında oluşan gerilme dağılımının durumu her zaman aynı olur. Dolayısıyla, standart numuneler için kritik gerilme şiddet faktörü K_C ' nin tespit edilmesinin, belirli şartlarda ve gerçek yapılarda, deneylerin yapılması sonucunda, hangi hataların oluşmasına izin verilebileceği belirlenebilir (Özdemir 2006). İzotropik malzemelere göre hasar davranışı çok daha karmaşık olan kompozit malzemelerin kırılma davranışını incelemek, bu tür malzemelerin günümüzdeki hızlı kullanım artışı nedeniyle büyük önem kazanır. Balaban ve Tee (2019), vakum destekli reçine infüzyon yöntemi ile üretilen, PVC (Poli Vinil Clorür) köpük çekirdekli cam elyaf takviyeli

yüzeyle sahip sandviç kompozit kirişin şekil değiştirme enerjisi salınım hızı açısından kırılma tokluğunu, deneysel olarak, üç nokta eğme testi (3 ENF) kullanarak tespit etmişlerdir. Sayısal olarak ise, J -integrali yöntemini ve sanal çatlak kapanma tekniği (VCCT)'ni bir sonlu elemanlar yazılımı olan ANSYS'de kullanarak hesaplamışlardır. Ayrıca, sandviç kompozit kirişlerin; çekirdek kalınlığının ve çekirdek yoğunluğunun, kompozit malzeme numunelerinin uzunluğunun, numunelerin yükleme yönlerinin değişiminin sandviç kompozit kirişlerin şekil değiştirme enerjisi salınım hızı (SERR) üzerindeki etkilerini gözlemlemek için, Mod-II yükleme koşulları altında parametrik bir çalışma yapmışlardır. Maksimum SERR değerinde meydana gelen değişimleri, sayısal yöntem kullanılarak elde edilen sonuçları ve deneysel yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçları grafikler kullanarak karşılaştırmışlardır. Gu vd. (2011), sonlu elemanlar yöntemini kullanarak, V şeklinde kenar çentiğe sahip Al7075-T6 malzemesinin bir ve dört tabakalı kompozit malzeme yamalarıyla onarılmasını araştırmışlardır. Kontür integral yöntemini kullanarak, uygulanan yapıştırıcı kalınlığının, yama malzemesi kalınlığının ve kompozit yamanın tabaka diziliminin gerilme şiddet faktörü üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Sonuç olarak, yamanın performansı üzerinde, yapıştırıcı kalınlığının ve kayma dayanımının önemli olduğunu tespit etmişlerdir. Vavrik ve Jandeksek (2014), alüminyum alaşımlı malzemeden imal edilmiş V şeklinde kenar çentiğe sahip sünek ince duvarın kırılma tokluğunu, ANSYS sonlu elemanlar yazılımını kullanarak sayısal olarak hesaplamışlardır. Sayısal çalışma ile bağlantılı olarak çeşitli deneysel çalışmalar yapmışlardır. Aleksic vd.(2018) , yüksek sıcaklıklarda çalışmaya dayanıklı krom ve molibden alaşımlı düşük karbonlu mikroalyaj bir çelik olan 14MoV6-3 için kritik J – integral değerini, deneysel ve sayısal olarak hesaplamışlar ve elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır. Wen ve Aliabadi (1995), kontür integrali yöntemini sınır eleman yöntemi ile birlikte kullanarak, farklı şekillerde çatlağa sahip levhaların gerilme şiddet faktörlerini hesaplamışlardır. Lei vd.(2019), klasik çatlak örneklerine ait gerilme şiddet faktörlerini tespit etmek amacı ile, J –integrali yöntemi'ni, M –integrali yöntemi'ni ve

yeni geliştirilmiş bir yöntem olan, genelleştirilmiş sonlu farklar yöntemi (GFDM)'ni kullanmışlardır. Analitik değerlerle ve kullandıkları farklı yöntemler ile elde ettikleri sonuçları kendi aralarında karşılaştırmışlardır.

Bu araştırmalar ışığında, mevcut literatürden farklı olarak, gerilme şiddet faktörleri belirlenmiş durumda olan fakat kırılma tokluğunun geometriden bağımsız ölçümünü veren J –integral değerleri tespit edilmemiş durumdaki, kenar çatlaklı numune, merkez çatlaklı kare numune ve merkez çatlaklı dikdörtgen numune için, ANSYS APDL kodları kullanılarak J –integral değerleri elde edilmiştir. Ayrıca, ortotropik özellik gösteren merkez çatlaklı dikdörtgen numune için, ANSYS içerisinde üç farklı koordinat eksenini (fiber açısı, çatlak açısı ve bu iki açı arasındaki fark) tanımlamak yerine, indirgeme matrisleri kullanılarak malzemelerin mekanik özellikleri doğrudan elde edilmiş ve kullanılmıştır. ANSYS kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar, simgesel bir matematik yazılımı kullanılarak, analitik olarak ta elde edilerek, sayısal ve analitik sonuçlar mukayese edilmiştir.

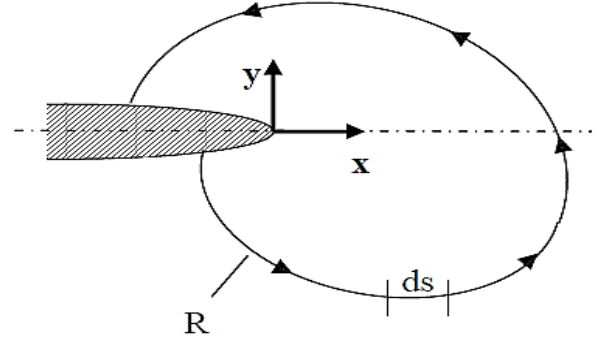
2. J – Integral Metodu

Lineer olmayan elastik malzemelerin kırılma tokluğunu tespit etmek amacı ile geliştirilmiş olan bu yöntem, çatlak ilerlemesi ile bağlantılı olarak potansiyel enerjide meydana gelen değişimin tespit edildiği, enerjinin korunumu prensibine dayanmaktadır. J –integrali, fiziksel olarak ise, yük uygulanmış bir yapıdaki a çatlak uzunluğunun, Δa kadar artış gösterip $a + \Delta a$ olduğunda meydana gelen, potansiyel enerji farkı olarak tanımlanabilir. Aynı zamanda J –integral, lineer olmayan malzemelerde oluşan şekil değişimlerini ve çatlak ucu gerilmelerini de tanımlar. Enerjinin doğrusal integrali, elastik- plastik bir malzeme davranışı için, Şekil 1'deki gibi, çatlakın çevresinde keyfi olarak seçilen yoldan bağımsız olarak;

$$J = \int_R \left[w dy - T_i \left(\frac{du_i}{dx} \right) ds \right] \quad (1)$$

formülasyonu ile tanımlanabilir. Denklem 1'de, $i = x, y$ olmak üzere; R çatlak ucunu çevreleyen

herhangi bir eğriyi, w şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunu, T_i eğriye dik yönde uygulanan gerilme vektörünü, u_i yer değiştirme vektörünü, ds eğri boyunca oluşan birim uzunluk artışını belirtir (Liu et al. 2000).



Şekil 1. Çatlak ucunu çevreleyen kapalı eğri (Özdemir 2006).

Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu w , σ (gerilme)– ϵ (genleme) eğrisinin altında kalan alan için;

$$w = \left(\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \right) \quad (2)$$

ile gösterilir.

3. Ortotropik Malzemeler için Kırılma Mekanikliği

Sürekli fiber takviyeli düzlem kompozitler, ortotropik malzeme davranışı gösterir. Fiber takviye açısının değişimi ile bu özelliği monoklinik malzemeye döner. Gerilme-genleme bağıntıları arasındaki ilişki birleştirilerek iki boyutlu bir problem bu tür malzemeler için;

$$\begin{aligned} S_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} - 2S_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \\ 2S_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^3 \partial x_1} + S_{44} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

denklemleri ile tanımlanabilir (Rice 1968). Burada ϕ , sanal gerilme fonsiyonudur.

Denklem 3'deki, S_{ij} katsayıları, kompliyans matrisi elemanlarıdır. Ortotropik malzemeler için; $S_{16} = S_{26} = S_{63} = 0$ olur (Gibson 2012). $n = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere D_n ;

$$D_n = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_s \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (4)$$

olarak yazılabilir. Denklem 4, $D_1 D_2 D_3 D_4(\phi) = 0$ haline gelir.

$$[S_{22} - 2\mu S_{26} + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{16}\mu^3 + S_{11}\mu^4] = 0 \quad (5)$$

μ_n , Denklem 5'teki karakteristik denklemin çözümünden elde edilen dört adet kökü temsil eder. Bu kökler;

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_1 + i\beta_1 \\ \mu_2 &= \alpha_2 + i\beta_2 \\ \mu_3 &= \bar{\mu}_1 \\ \mu_4 &= \bar{\mu}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

ile ifade edilir. Burada, α_j ve β_j ($j = 1, 2$) gerçek köklerdir. i ise; $i = \sqrt{-1}$ 'dir. Denklem 6, kompleks eşlenik kökleri temsil eder. Bu yüzden anizotropik durum için gerilmeler ve yer değiştirmeler, z_j kompleks koordinatları ve kompleks eşlenik kökleri cinsinden;

$$z_j = x_1 + \mu_j x_2 \quad (7)$$

olarak ifade edilebilir. Denklem 1'in sayısal integrasyonu ile elde edilen, çatlak içeren homojen anizotropik levhalar için J - integrali denklemleri J_1 ;

$$J_1 = \alpha'_{11} K_I^2 + \alpha'_{12} K_I K_{II} + \alpha'_{22} K_{II}^2 \quad (8)$$

olur (Lekhnitskii 1963). Denklem 8'de;

$$\begin{aligned} \alpha'_{11} &= -\frac{S'_{22}}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right) \\ \alpha'_{22} &= \frac{S'_{11}}{2} \operatorname{Im}(s_1 + s_2) \\ \alpha'_{12} &= -\frac{S'_{22}}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{s_1 s_2} \right) \frac{S'_{11}}{2} \operatorname{Im}(s_1 s_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Denklem 9'da s_1 ve s_2 , malzeme özellik parametreleri olup, Denklem 5'deki kökler ile ilişkilidir ve

$$s_j = \frac{\mu_j \cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \mu_j \sin \beta} \quad (10)$$

olarak yazılabilir. Denklem 10'da, β çatlak açıdır ve $j = 1, 2$ 'dir. S'_{ij} , S_{ij} kompliyans sabitlerinin, global koordinat sisteminden lokal koordinat sistemine dönüşümünden elde edilen sabitlerdir (Chu *et al.* 1990). Bunlar;

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \beta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \beta + \\ &S_{22} \sin^4 \beta + (S_{16} \cos^2 \beta + S_{26} \sin^2 \beta) \sin 2\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \beta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \\ &S_{22} \cos^4 \beta + (S_{16} \cos^2 \beta + S_{26} \sin^2 \beta) \sin 2\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{12} &= S_{12} + (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - \\ &S_{66}) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \frac{1}{2}(S_{26} - S_{16}) \sin 2\beta \cos 2\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{66} &= S_{66} + 2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 2\beta + \\ &2(S_{26} - S_{16}) \sin 2\beta \cos 2\beta \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S'_{16} &= \left[S_{22} \sin^2 \beta - S_{11} \cos^2 \beta + \frac{1}{2}(2S_{12} - \right. \\ &S_{66}) \cos 2\beta \left. \right] \sin 2\beta + (S_{16} \cos^2 \beta) (\cos^2 \beta - \\ &3 \sin^2 \beta) + (S_{26} \sin^2 \beta) (3 \cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{26} &= \left[S_{22} \cos^2 \beta - S_{11} \sin^2 \beta + \frac{1}{2}(2S_{12} - \right. \\ &S_{66}) \cos 2\beta \left. \right] \sin 2\beta + (S_{16} \sin^2 \beta) (3 \cos^2 \beta - \\ &\sin^2 \beta) + (S_{26} \cos^2 \beta) (\cos^2 \beta - 3 \sin^2 \beta) \end{aligned}$$

olur. Denklem 11'deki, S_{jk} ($j, k = 1, 2, 6$) elastik kompliyans matris elemanları;

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

$$S_{16} = \frac{\eta_{12,1}}{E_1}$$

$$S_{26} = \frac{\eta_{12,2}}{E_2}$$

ile ifade edilir. Denklem 12'de, $\eta_{jk,1}, \eta_{1,jk}$ sırasıyla birinci ve ikinci tür karşılıklı etki katsayılarını temsil etmektedir. İzotropik malzemeler için; $\alpha'_{11} = \alpha'_{22} = \frac{1}{E}$ ve $\alpha'_{12} = 0$ olur. Bu yüzden izotropik malzemeler için,

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (13)$$

olur. Burada K_I ve K_{II} sırasıyla Mod-I ve Mod-II için gerilme şiddet faktörlerini, E elastisite modülünü, ν ise Poisson oranını temsil eder. Farklı takviye açıları için mekanik özelliklerin belirlenmesinde;

$$\begin{aligned}\overline{S_{11}} &= S_{11} \cdot m^4 + S_{22} \cdot n^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{33}) \cdot n^2 m^2 \\ \overline{S_{12}} &= S_{21} = S_{12} \cdot (n^4 + m^4) + (S_{11} + S_{22} - S_{33}) \cdot n^2 m^2 \\ \overline{S_{13}} &= S_{31} = (2S_{11} + 2S_{12} - S_{33}) \cdot nm^3 - (2S_{22} + S_{12} - S_{33}) \cdot n^3 m \\ \overline{S_{23}} &= S_{32} = (2S_{11} + 2S_{12} - S_{33}) \cdot n^3 m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{33}) \cdot nm^3 \\ \overline{S_{22}} &= S_{11} \cdot n^4 + S_{22} \cdot m^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{33}) \cdot n^2 m^2 \\ \overline{S_{33}} &= 2 \cdot (2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{33}) \cdot n^2 m^2 + S_{33}(n^4 + m^4)\end{aligned}\quad (14)$$

formülasyonları kullanılır. Denklem 14'te elde edilen dönüştürülmüş kompliyans matrisi katsayıları Denklem 12'de yerine koyulup malzemenin yeni mekanik özellikleri elde edilmiş olur. Burada m ve n ifadeleri; $m = \cos \theta$ ve $n = \sin \theta$ 'dır (Tan *et al.* 1992). θ ise, fiber yönlenme açısını temsil eder.

4. Materyal ve Yöntem

Bu başlık altında, izotropik özelliklere sahip kenar çatlaklı numune (Levha-I, Şekil 2), farklı takviye açılarına sahip 45° merkez çatlaklı ortotropik özellikte dikdörtgen numune (Levha-II, Şekil 3) ve merkezinde farklı açılarda çatlak ihtiva eden izotropik özelliklere sahip kare numune (Levha-III Şekil 4) için uygulanan analitik ve sayısal çalışmalar açıklanmıştır. Numunelere ait özellikler Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Numune özellikleri.

Çatlak açısı β	Levha/Malzeme	W genişlik (m)	H yükseklik (m)	a Çatlak boyu (m)
0°	I/İzotropik	1	1	0.2
45°	II/Ortotropik	1	1	0.2
0°, 30°, 45°, ϵ	III/İzotropik	1	1	0.2

Analizlerde kullanılan numunelerin mekanik özellikleri, Çizelge 2'de verilmiştir. (-x,-y) global eksen takımı ile çakışmayan (1, 2) lokal eksen

takımına sahip ortotropik malzemelerin global eksen takımına dönüştürülmüş yeni mekanik özelliklerinin elde edilmesinde Bölüm 3'te verilen dönüşüm formülasyonları kullanılmıştır. 1 fiber takviye doğrultusunu, 2 ise fibere dik doğrultuyu temsil eder.

Çizelge 2. Numunelerin mekanik özellikleri.

İzotropik Malzeme				
	E (GPa)		ν	
	200		0.3	
Ortotropik Malzeme				
Fiber yönlenme açısı θ	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
0°	48.26	17.24	0.290	6.89
45°	18.88	18.88	0.370	11.02
90°	17.24	48.26	0.104	6.89
105°	16.98	37.59	0.160	7.60
120°	16.98	24.85	0.275	9.58
135°	18.88	18.88	0.370	11.02

4.1 Analitik çalışmalar

İzotropik özelliklere sahip kenar çatlaklı numune Levha-I, farklı takviye açılarına sahip 45° merkez çatlaklı ortotropik özellikte dikdörtgen numune Levha-II ve merkezinde farklı açılarda çatlaklar ihtiva eden izotropik özelliklere sahip kare numune Levha-III olarak tanımlanmış olup bu levhalar için J –integral değerleri Denklem 8 kullanılarak analitik olarak tespit edilmiştir. Analitik sonuçların elde edilmesinde kullanılan, gerilme şiddet faktörü değerleri için Wang (2005) referansı kullanılmıştır. Sınır şartlarında $\sigma=1$ Pa'dır.

4.1.1 Levha-I

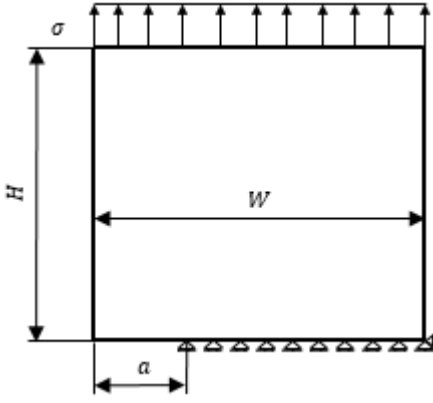
Şekil 2'de izotropik özelliklere sahip kenar çatlaklı numune verilmiştir (Levha-I). σ çekme gerilmesi etkisi altında kenar çatlaklı numune için, Mod-I gerilme şiddet faktörü;

$$K_I = f\left(\frac{a}{W}\right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

formülasyonu kullanılarak hesaplanabilir. Burada $f\left(\frac{a}{W}\right)$ şekil fonksiyonu olup kenar çatlaklı sonlu genişlikteki bir numune için

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{W}\right) + 10.55\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (16)$$

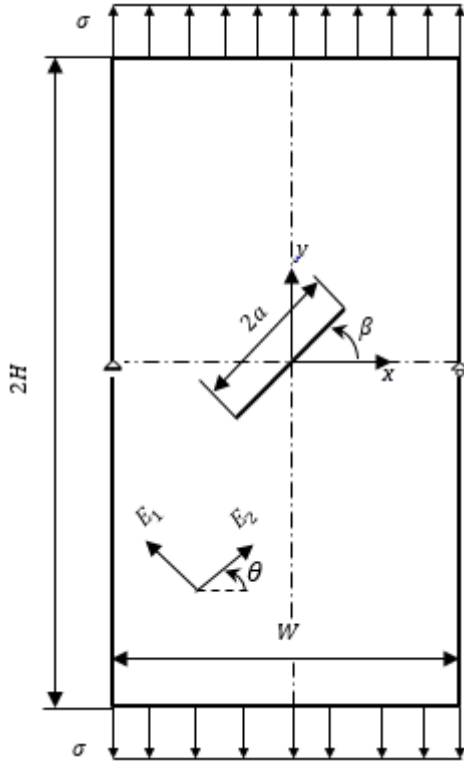
şeklinde verilir.



Şekil 2. Kenar çatlaklı izotropik levha boyutları ve sınır şartları.

4.1.2 Levha-II

Şekil 3'de $\beta = 45^\circ$ merkez çatlaklı ortotropik özellikte dikdörtgen numune verilmiştir (Levha-II).



Şekil 3. Merkezi çatlaklı ortotropik levha boyutları ve sınır şartları.

Şekil 3'deki, merkez çatlaklı dikdörtgen numune için, gerilme şiddet faktörleri;

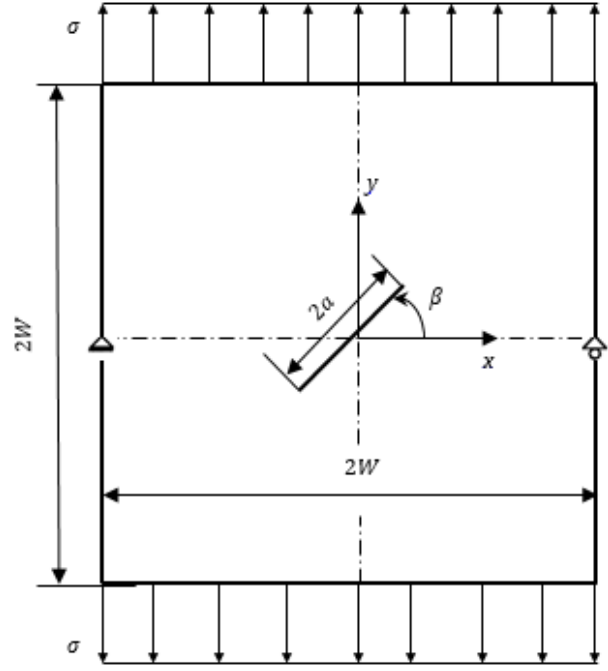
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2(\beta) \quad (17)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin(\beta) \cos(\beta) \quad (18)$$

formülasyonları kullanılarak hesaplanabilir.

4.1.3 Levha-III

Şekil 4'de merkezinde farklı açılarda çatlaklar ihtiva eden izotropik özelliklere sahip kare numune verilmiştir.



Şekil 4. Merkezi çatlaklı izotropik levha boyutları ve sınır şartları.

Şekil 4'deki merkez çatlaklı kare numune için, gerilme şiddet faktörleri Denklem 17'deki ve Denklem 18'deki formülasyonlar kullanılarak hesaplanabilir.

4.2 Sayısal çalışmalar

Levha-I, Levha-II ve Levha-III için, J –integral değerleri, ANSYS kullanılarak tespit edilmiştir. ANSYS ile J –integrali değerleri belirlenirken, izotropik ve ortotropik malzemeler için kullanılabilen PLANE 183 eleman tipi seçilmiş olup, eleman ayarlarından düzlem şekil değiştirme durumunu temsil eden, seçenek aktif hale getirilmiştir. Tüm modellerde sonlu elemanlara bölme hassasiyeti çatlak ucunda artırılmıştır. Çatlak uçlarında tekil sonlu elemanlar kullanılmıştır.

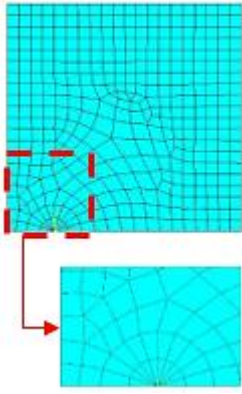
4.2.1 Levha-I

İzotropik özelliklere sahip kenar çatlaklı Levha-I numunesi için, sonlu eleman özellikleri Çizelge 3'de verilmiştir.

Çizelge 3. Levha-I için sonlu eleman ağ yapısı özellikleri.

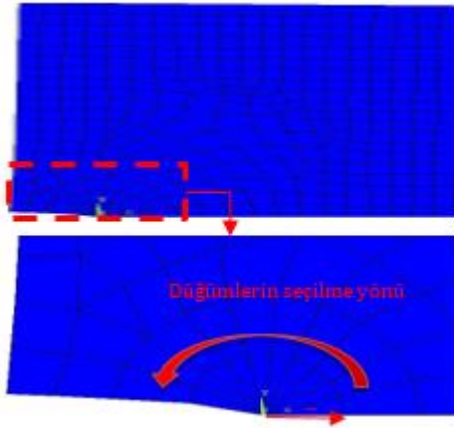
Eleman boyutu (m)	Eleman sayısı	Düğüm sayısı
0.05	386	1219

Şekil 5'de yarım olarak modellenen kenar çatlaklı numunenin sonlu eleman ağ modeli verilmiştir.



Şekil 5. Levha-I için sonlu eleman modeli.

Şekil 2' de verilen sınır şartları kullanılarak statik analiz yapılır, çözümler yapıldıktan sonra çatlak ucunda yerel koordinat düzlemi oluşturularak, Şekil 6'da, numuneler için verilen deformasyon şekilleri üzerinde saat ibrelerinin hareketinin tersi yönündeki düğüm noktaları çatlak ucundan itibaren r yarıçapı boyunca seçilir. Farklı r yarıçapları için oluşturulan eğri üzerinden integral hesabı tekrarlanır.



Şekil 6. Levha-I için çatlak ucu deformasyon şekli.

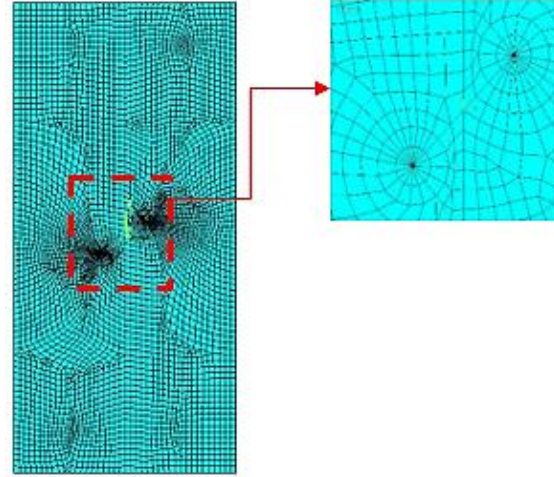
4.2.2 Levha-II

Ortotropik özellikte merkez çatlaklı dikdörtgen numune, Levha-II için, sonlu eleman ağ yapısı ile ilgili özellikler Çizelge 4'de verilmiştir.

Çizelge 4. Levha-II için sonlu eleman ağ yapısı özellikleri.

Fiber yönelme açısı θ	Eleman boyutu (m)	Eleman sayısı	Düğüm sayısı
0°	0.05	5844	17416
45°	0.05	3582	10850
90°	0.05	3200	9774
105°	0.05	3200	9774
120°	0.05	3623	10999
135°	0.05	3886	11684

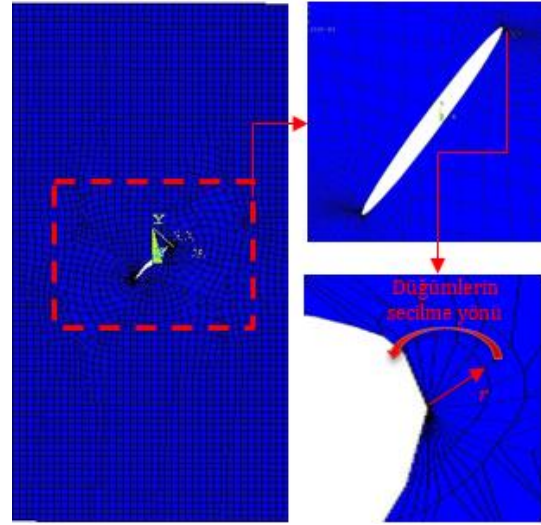
Şekil 7'de, ortotropik özellikte merkez çatlaklı dikdörtgen Levha-II numunesinin sonlu elemanlara ayrılmış hali verilmiştir.



Şekil 7. Levha-II için sonlu eleman modeli.

Levha II için, Şekil 3' de verilen sınır şartları kullanılarak çözümler yapılır, çözümler yapıldıktan sonra çatlak ucunda yerel koordinat düzlemi oluşturularak, numuneler için verilen deformasyon şekilleri üzerinde saat ibrelerinin hareketinin tersi yönündeki düğüm noktaları r yarıçapı boyunca seçilir (Şekil 8).

4.2.3 Levha-III



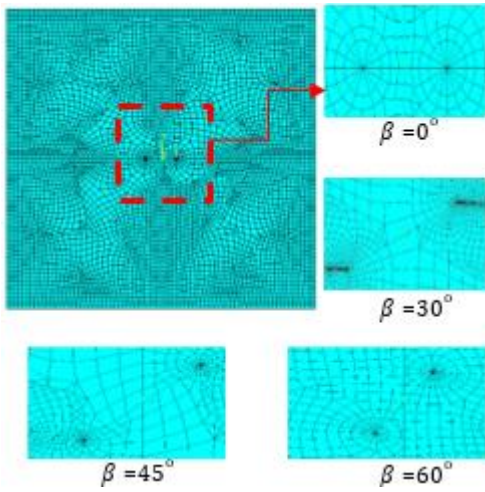
Şekil 8. Levha-II için çatlak ucu deformasyon şekli.

Merkezinde farklı açılarda çatlaklar ihtiva eden izotropik özelliklere sahip kare numune, Levha-III için, sonlu eleman modeli ile ilgili özellikler Çizelge 5'de verilmiştir.

Şekil 9'da ise merkezinde farklı açılarda çatlak bulunduran izotropik özelliklere sahip kare numunenin sonlu eleman modeli verilmiştir.

Çizelge 5. Levha-III için sonlu eleman ağ yapısı özellikleri.

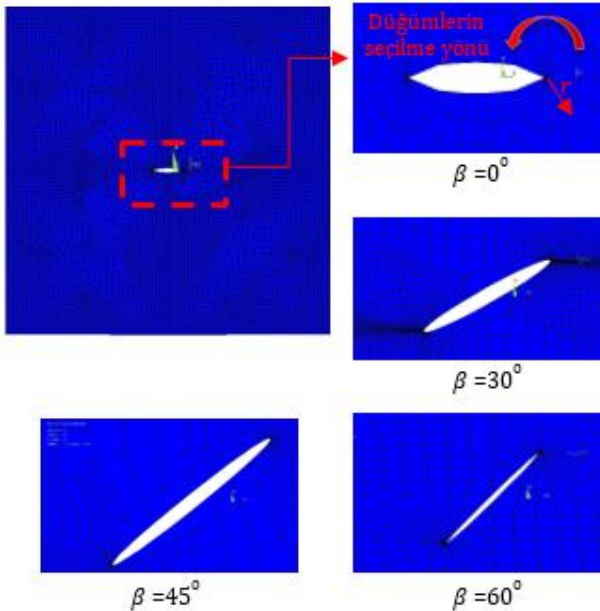
Çatlak açısı β	Eleman boyutu (m)	Eleman sayısı	Düğüm sayısı
0°	0.05	5591	16917
30°	0.05	13389	23842
45°	0.05	9806	29430
60°	0.05	6992	21058



Şekil 9. Levha-III için sonlu eleman modeli.

J –integral değerlerinin tespit edilebilmesi için ilk adımda; ANSYS programında verilen sınır şartlarına uygun olarak statik analiz gerçekleştirilir. Çözümler yapıldıktan sonra çatlak ucunda yerel koordinat düzlemi oluşturularak, Şekil 6, 8 ve 10’da, numuneler için verilen deformasyon şekilleri üzerinde saat ibrelerinin hareketinin tersi yönündeki düğüm noktaları r yarıçapı boyunca seçilir.

İkinci adımda ise, seçilen düğüm noktaları üzerinden Denklem 1’de verilen formülasyondaki değerler özel olarak yazılan APDL (ANSYS Parametric Design Language) kodlarının ANSYS programında tekrar çalıştırılması sonucu Çizelge halinde elde edilerek integral hesabı yaptırılır. Bu işlem her üç model için de tekrarlanır.

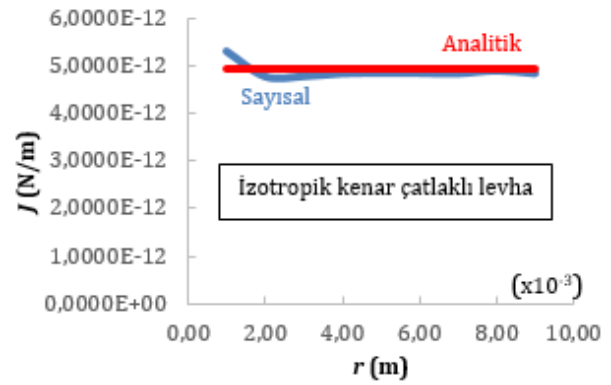


Şekil 10. Levha-III için çatlak ucu deformasyon şekli.

5.Sonuçlar

Şekil 11’ de, kenar çatlaklı numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş J –integralin r ’ye göre

değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları verilmiştir.



Şekil 11. Levha-I için $J - r$ sonuçları.

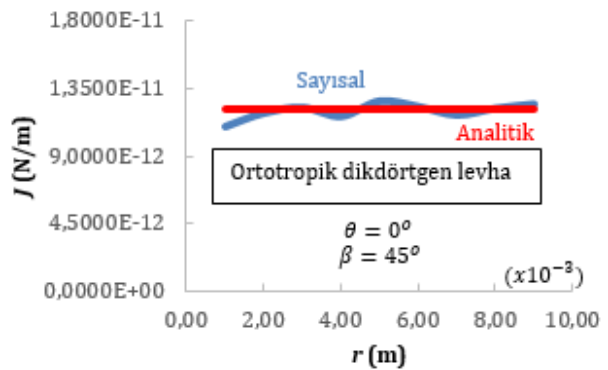
Şekil 11’ deki grafiğe göre, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.090$ m’de % 1.10 olarak tespit edilmiştir.

Çizelge 6’ da, kenar çatlaklı numune için, sayısal ve analitik olarak elde edilen, J – integrali sonuçları arasındaki minimum hatanın tespit edildiği değer verilmiştir.

Çizelge 6: J –integrali sonuçları için minimum hata miktarları.

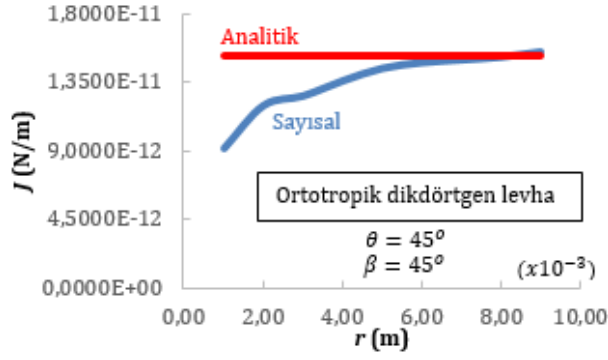
Numune	r (m)	Sayısal (N/m)	Analitik (N/m)	Hata (%)
Levha-I	0.090	4.8890E-12	4.9435E-12	1.10

Şekil 12’ de, $\theta = 0^\circ$ takviye açılı $\beta = 45^\circ$ merkez çatlaklı dikdörtgen numune, Levha-II’ye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J – integralin r ’ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları verilmiştir. Şekil 12’ deki grafiğe göre, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.0006$ m’de % 0.9440 olarak tespit edilmiştir.



Şekil 12. $\theta = 0^\circ$ için Levha-II $J - r$ sonuçları.

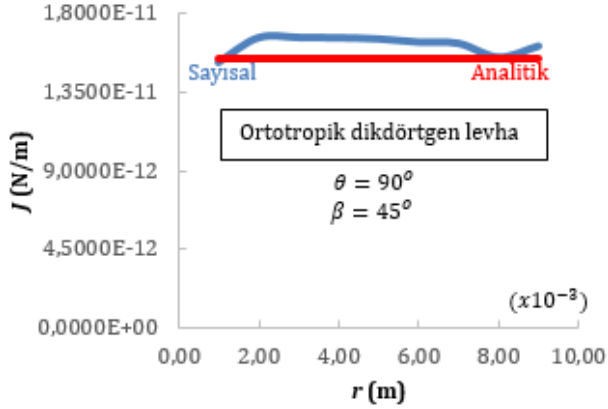
45° takviye açılı ve 45° merkez çatlaklı dikdörtgen numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J –integralin r ’ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren sonuçlar, Şekil 13’ te verilmiştir.



Şekil 13. $\theta = 45^\circ$ için Levha-II $J - r$ sonuçları.

Sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.090$ m'de % 0.1385 olarak tespit edilmiştir (Şekil 13).

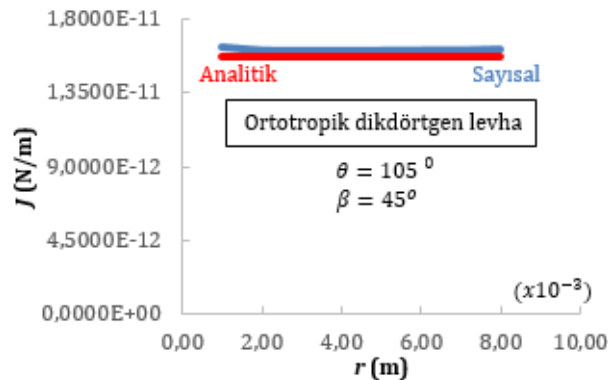
90° takviye açılı 45° merkez çatlaklı dikdörtgen numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J -integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları verilmiştir (Şekil 14).



Şekil 14. $\theta = 90^\circ$ için Levha-II $J - r$ sonuçları.

Şekil 14' teki grafik, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hatanın $r=0.0915$ m'de % 0.4829 olarak tespit edildiğini göstermektedir.

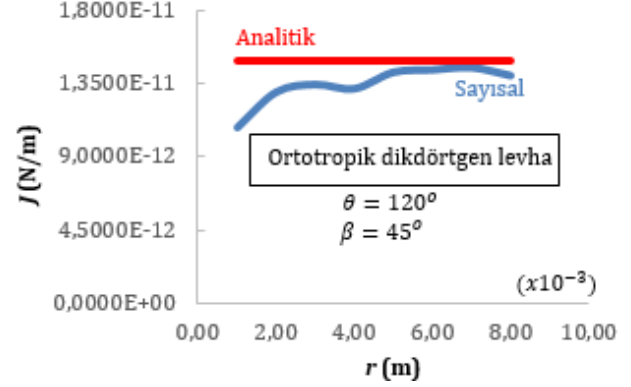
Şekil 15' te, 105° takviye açılı 45° merkez çatlaklı dikdörtgen numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J -integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları verilmiştir.



Şekil 15. $\theta = 105^\circ$ için Levha-II $J - r$ sonuçları.

Şekil 15' teki grafiğe göre, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.010$ m'de % 1.9590 olarak tespit edilmiştir.

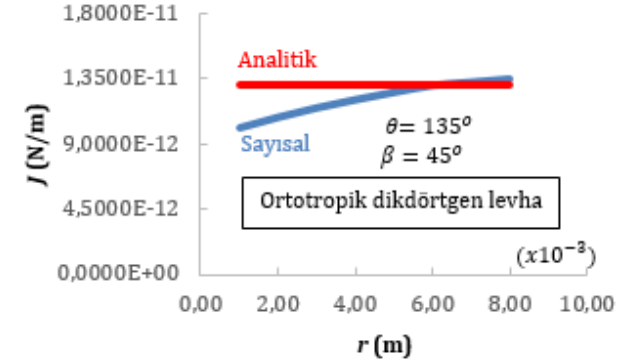
120° takviye açılı 45° merkez çatlaklı dikdörtgen numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J -integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları Şekil 16' da verilmiştir.



Şekil 16. $\theta = 120^\circ$ için Levha-II $J - r$ sonuçları.

Şekil 16' daki grafik, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hatanın $r=0.060$ m'de % 2.8149 olarak tespit edildiğini göstermektedir.

Şekil 17' de, 135° takviye açılı 45° merkez çatlaklı dikdörtgen numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J -integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları görülmektedir.



Şekil 17. $\theta = 135^\circ$ için Levha-II $J - r$ sonuçları.

Şekil 17' deki grafiğe göre, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.050$ m'de % 0.2978 olarak tespit edilmiştir.

Çizelge 7' de, merkez çatlaklı dikdörtgen numune için, sayısal ve analitik olarak elde edilen, J -integrali sonuçlarının minimum hata ile tespit edildiği değerler verilmiştir.

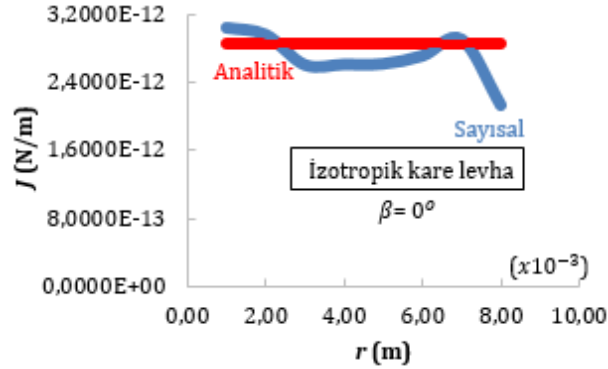
Çizelge 7. Levha -II J -integrali sonuçları için minimum hata miktarları.

Fiber yönelme açısı	r (m)	Sayısal (N/m)	Analitik (N/m)	Hata (%)	
θ	0°	0.0006	1.2158E-11	1.2044E-11	0.9440
	45°	0.0900	1.5217E-11	1.5239E-11	0.1385
	90°	0.0915	1.5460E-11	1.5386E-11	0.4829

105°	0.0100	1.6082E-11	1.5773E-11	1.9590
120°	0.0600	1.4480E-11	1.4899E-11	2.8149
135°	0.0500	1.3057E-11	1.3096E-11	0.2978

Çizelge 7' ye göre, merkez çatlaklı dikdörtgen numuneye ait sayısal ve analitik sonuçlar arasındaki % hatalar incelendiğinde, en büyük % hata, 120° takviye açılı numunede % 2.8149 olarak, $r=0.060$ m'de tespit edilirken, en küçük % hata 45° takviye açılı numunede % 0.1385 olarak, $r=0.090$ m'de tespit edilmiştir.

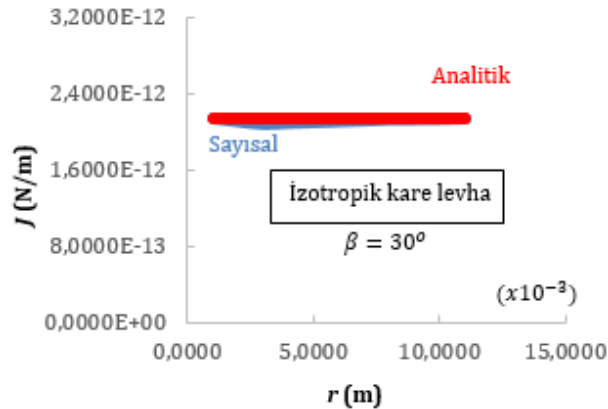
Şekil 18' de, $\beta = 0^\circ$ merkez çatlaklı kare numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J –integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları görülmektedir.



Şekil 18. $\beta = 0^\circ$ için Levha-III $J - r$ sonuçları.

Sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.0945$ m'de % 2.1373 olarak tespit edilmiştir (Şekil 18).

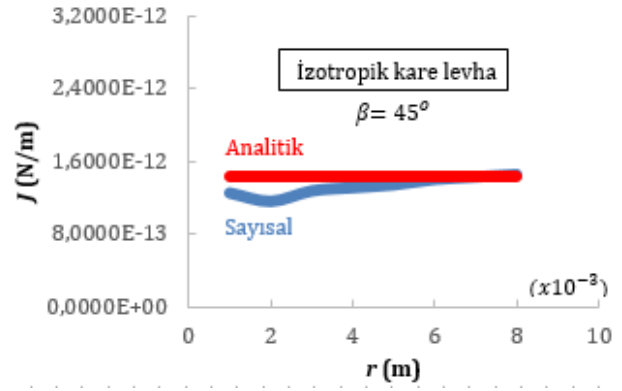
Şekil 19' da, 30° merkez çatlaklı kare numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J –integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları verilmiştir.



Şekil 19. $\beta = 30^\circ$ için Levha-III $J - r$ sonuçları.

Şekil 19' daki grafiğe göre, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.047$ m'de % 0.0560 olarak tespit edilmiştir.

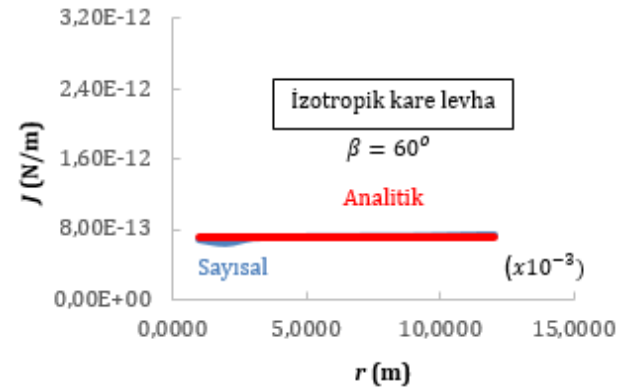
45° merkez çatlaklı kare numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J –integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları, Şekil 20' de verilmiştir.



Şekil 20: $\beta = 45^\circ$ için Levha-III $J - r$ sonuçları.

Şekil 20' deki grafik, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hatanın $r=0.030$ m'de % 0.7835 olarak tespit edildiğini göstermektedir.

Şekil 21' de, 60° merkez çatlaklı kare numuneye ait, analitik ve sayısal olarak elde edilmiş, J –integralin r 'ye göre değişimini grafiksel olarak gösteren çalışma sonuçları verilmiştir.



Şekil 21. $\beta = 60^\circ$ için Levha-III $J - r$ sonuçları.

Şekil 21' deki grafiğe göre, sayısal ve analitik çalışma sonuçları arasındaki en düşük hata $r=0.418$ m'de % 0.0462 olarak tespit edilmiştir.

Çizelge 8' de, merkez çatlaklı kare numune için, sayısal ve analitik olarak elde edilen, J – integrali sonuçlarının minimum hata ile tespit edildiği değerler verilmiştir.

Çizelge 8. Levha-III J –integrali sonuçları için minimum hata miktarları.

Çatlak açısı	r (m)	Sayısal (N/m)	Analitik (N/m)	Hata (%)
0°	0.0945	2.9199E-12	2.8588E-12	2.1373
β 30°	0.0470	2.1453E-12	2.1441E-12	0.0560
45°	0.0300	1.4406E-12	1.4294E-12	0.7835
60°	0.4180	7.1438E-13	7.1471E-13	0.0462

Çizelge 8' e göre, merkez çatlaklı kare numuneye ait, sayısal ve analitik sonuçlar arasındaki % hatalar incelendiğinde, en büyük % hata, 0° çatlaklı numunede % 2.1373 olarak, $r=0.0945$ m'de tespit edilirken, en küçük % hata 60° çatlaklı numunede % 0.0462 olarak, $r=0.418$ m'de tespit edilmiştir.

6. Tartışma

Elde edilen sonuçlar genel olarak değerlendirildiğinde, sayısal ve analitik sonuçlar arasındaki en büyük % hata, 120° merkez çatlaklı dikdörtgen numunede % 2.8149 olarak, $r=0.060$ m'de tespit edilirken, en küçük % hata, 60° merkez çatlaklı kare numunede % 0.0462 olarak, $r=0.418$ m'de tespit edilmiştir. Bu % hata miktarları, Patil (2016) referansı ile kıyaslanırsa, referansta analitik ve nümerik değerler arasındaki en büyük % hata 8.57 olarak tespit edilmişken, en küçük % hata ise 5.37 olarak tespit edilmiştir. Bu değerlendirme, çalışmamız sonucunda, ANSYS'de J –integrali kullanılarak elde edilen % hata miktarlarının kabul edilebilir olduğunu ortaya koymaktadır. Yöntemin farklı ve karmaşık modellere ve tabakalı kompozitlere uygulanabilirliği incelenebilir.

7. Semboller ve Kısaltmalar Listesi

a :	Çatlak uzunluğu
S_{ij} :	Malzemenin elastik kompiyans katsayıları
S'_{ij} :	Dönüştürülmüş elastik kompiyans katsayıları
ds :	Eğri boyunca birim uzunluk artışı
E :	Elastisite Modülü
G :	Enerji yayılım hızı
G_{12} :	Kayma modülü
K :	Gerilme şiddet faktörü
K_C :	Kritik gerilme şiddet faktörü
K_I :	Mod-I'deki gerilme şiddet faktörü
K_{II} :	Mod-II'deki gerilme şiddet faktörü
Mod-I:	Çatlak açılma deformasyon tipi
Mod-II:	Çatlak kayma deformasyon tipi
H :	Numune yüksekliği
R :	Çatlak ucunu çevreleyen herhangi bir eğri
r :	J –integralin belirlendiği yolun yarıçapı
T_i :	Eğriye dik yöndeki gerilme vektörü
u_{ij} :	Yer değiştirme vektörü
β :	Çatlak açısı
σ :	Numuneye uygulanan gerilme
ν :	Poisson oranı
w :	Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu
W :	Numune genişliği
$[\bar{S}]$:	Dönüştürülmüş indirgenmiş esneklik matrisi
θ :	Fiber yönlenme açısı
$\eta_{jk,1}, \eta_{1,jk}$:	Birinci ve ikinci tür karşılıklı etki katsayıları

8. Kaynaklar

- Aleksic B., Milovic L., Grbovic A. and Hemer A., 2018. Experimental and numerical investigations of the critical values of J -integral for the steel of steam pipelines. *Procedia Structural Integrity*, **13**, 1589-1594.
- Balaban A.C. and Tee K.F., 2019. Strain energy release rate of sandwich composite beams for different densities and geometry parameters. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **101**,191-199.
- Chu S.J. and Hong C.S., 1990. Application of the J_k Integral to Mixed Mode Crack Problems for Anisotropic Composite Laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, **35**, 1093-1103.
- Gibson R.F., 2012. Principles of Composite Material Mechanics. 13, CRC Press, 53-87.
- Griffith A.A., 1921. The Phenomena of Rubture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **221**, 163-197.
- Gu L. and Kasavajhala A.R.M., Zhao S., 2011. Finite Element Analysis of Cracks in Aging Aircraft Structures with Bonded Composite-Patch Repairs. *Composites: Part B*, **42**, 3, 505-510.
- Irwin G.R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, **24**, 361-364.
- Lekhnitskii S.G., 1963. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. 17, Holden-Day, 15-73.
- Lei J., Xu Y., Gu Y. and Fan C., 2019. The generalized finite difference method for in-plane crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **98**, 147-156.
- Liu J. and Sawa T., 2000. Stress Analysis and Strength Evaluation of Single Lap Band Adhesive of Dissimilar Adherends Subjected to External Bending Moment. *J. Of Adhesion Science and Technology*, **14**, 67-92.
- Özdemir A., 2006. Seramik Malzemelerin Kırılma Tokluğu Değerlerinin Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Teorik Olarak Belirlenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, Türkiye, 65.
- Patil K. and Wadageri C.S., 2016. Fracture Analysis for Steel and Epoxy Material Plate With Edge Crack".

International Journal of Recent Trends in Engineering & Research, **2**, 2455-1457.

Rice J.R., 1968. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, **35**, 379-386.

Tan C.L. and Gao Y.L., 1992. Boundary Element Analysis of Plane Anisotropic Bodies with Stress Concentrations and Cracks, *Composite Structures*, **20**, 17-28.

Vavrik D. and Jandejsek I., 2014. Experimental evaluation of contour J integral and energy dissipated in the fracture process zone. *Engineering Fracture Mechanics*, **129**, 14-15.

Wang Y. and Sun Y., 2005. A new boundary integral equation method for cracked 2-D anisotropic bodies. *Engineering Fracture Mechanics*, **72**, 2128–2143.

Wen P. and Aliabadi M., 1995. A contour integral for the evaluation of stress intensity factors. *Appl. Math. Modelling*, **19**, 450-455.