

**Araştırma / Research****EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL  
DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN FEM İLE STATİK ANALİZİ**

**Ülkü BABUŞCU YEŞİL<sup>1</sup> (ORCID: 0000-0002-8557-8308)<sup>1,\*</sup>**  
**Mehmet Can ATASAYANLAR<sup>2</sup> (ORCID: 0000-0003-3310-0641)<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

*Geliş / Received: 15.10.2019*  
*Kabul / Accepted: 08.11.2019*

**ÖZ**

Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) malzemeden yapılmış şerit-plağın eğilmesi durumunda yapısında oluşan gerilme durumuna öngerilmelerin etkisi incelenmiştir. Ele alınan plağın, esas yükleme yapılmadan önce, yapısında öngerilmelerin olduğu ve bu öngerilmelerin plağın karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı kuvvet etkisinde yapıda oluştuğu kabul edilmektedir. Ele alınan öngerilmeli FD plağın üst yüzeyinde etki eden yük tesiriyle eğilmesi durumunda, plak yapısında oluşan gerilme yayılımının belirlenmesi problemleri, düzlem şekil değiştirme kabulü altında Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla modellenmiş ve elde edilen sınır değer problemlerinin çözümü, Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak sayısal olarak yapılmıştır. İncelemelerde FD şerit-plak malzemesine ait Young Modülünün koordinat eksenleri doğrultusunda değişimi polinom fonksiyon olarak seçilmiş ancak, Poisson oranı ile malzeme yoğunluğunun sabit olduğu kabul edilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, sonlu elemanlar yöntemi, öngerilme, statik analiz

**STATIC ANALYSIS OF PRE-STRESSED PLATE-STRIP MADE OF  
FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL UNDER BENDING WITH  
FEM****ABSTRACT**

In this study, the effect of initial stresses on the stress state of a plate-strip made of functionally graded material (FG) under bending is investigated. It is assumed that the initial stresses in the plate-strip are made by the uniformly distributed force acting on the two opposite sides of this plate-strip before the main loading. Then, the problems of determining the stress concentration in the structure due to bending of this plate acting the uniformly distributed force on the upper face-plane of the FG plate are modeled by using the Linearized Three-Dimensional Elasticity Theory under the assumption of plane strain state. The solutions of the considered boundary value problems are solved numerically by using the Finite Element Method. In the investigations, the change of the Young's modulus of the FG plate-strip material in the direction of the coordinate axes are chosen as a polynomial function, but the Poisson's ratio and material density are assumed to be constant.

**Keywords:** functionally graded material, finite element method, initial stress, static analysis

\*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90 212 383 4606 ; e-mail / e-posta: ubabuscu@yildiz.edu.tr

## 1. GİRİŞ

Yüksek mukavemet ve ısı dirence sahip olması gibi pek çok özellikleri nedeniyle fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler günümüzde mühendislik uygulamalarında oldukça yaygın bir kullanıma sahiptirler. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), malzeme özelliklerinin bir noktadan diğer bir noktaya kademeli/dereceli değiştiği, homojen özellik göstermeyen malzemelerdir.

FDM'ler ilk olarak 1984 yılında bir uzay aracı projesinde Japonya'da kullanılmıştır [1]. Bu tarihten itibaren FDM'lerin mekaniği üzerine araştırmacıların ilgisi giderek artmış ve özellikle son 20 yılda teorik, sayısal ve deneysel pek çok çalışma yapılmıştır. [2]'de çeşitli yöntemlerle FDM plakların statik, dinamik ve stabilite problemlerinin incelendiği kapsamlı bir derleme yapılmıştır. [3]'de farklı sınır koşulları çerçevesinde çatlak içeren ve içermeyen FDM 'den yapılmış plakların bazı düzlem elastisite problemleri ile bu problemlerin analitik çözümleri verilmiştir.

Yapı elemanının sahip olduğu öngerilme gibi ön etkiler yapının gerilme ve yer değiştirme yayılımını önemli ölçüde etkilemektedir. Yapı elemanının içerdiği çeşitli süreksizlikler ([4]'de dikdörtgen delik, [5]'de silindirik boşluk, [6]'da dairesel dolgu ) civarında bu öngerilmelerin statik analize etkileri incelenmiştir.

Bu çalışmada karşılıklı iki kenarından basit mesnetli öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumunda, plak yapısında oluşan gerilme-şekil değiştirme durumuna, pek çok malzeme ve geometrik parametreler ile yapıdaki öngerilmenin etkisi incelenecek ve sayısal sonuçlar verilecektir.

## 2. MATERYAL VE METOT

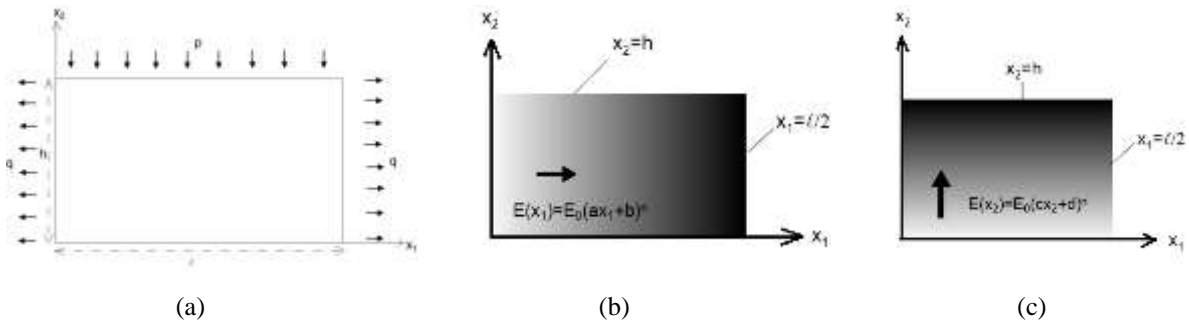
Dikdörtgen şerit-plağın karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulduğu, yapısındaki öngerilmenin karşılıklı iki kenarından etkiyen ve yoğunluğu  $q$  olan düzgün yayılı normal kuvvet etkisi ile oluştuğu kabul edilmektedir. Ayrıca, bu öngerilmeli FDM plağın üst yüzeyinde, yoğunluğu  $p$  olan ilave düzgün yayılı normal kuvvet etkisinde eğildiği kabul edilmektedir. Ele alınan şerit-plak malzemesi, fonksiyonel derecelenmiş malzeme olduğundan malzeme özellikleri koordinata bağlıdır. Bununla beraber plak malzemesine ait Poisson oranının sabit ancak, Young Modülü'nün enine ( $Ox_1$  eksen) ve boyuna ( $Ox_2$  eksen) göre fonksiyonel değiştiği farklı iki problem ele alınacaktır. Ele alınan FDM için Young Modülüne ait fonksiyon

$$\text{Problem 1: } E(x_1, x_2) = E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^n$$

$$\text{Problem 2: } E(x_1, x_2) = E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^n, \quad E_0, a, b, c, d, n \in \mathbb{R} \quad (1)$$

olarak seçilmiştir.

Plağa bağlı koordinat takımı ve malzeme özelliği değişimi (1) de verilen FD şerit-plağın geometrisi ve yükleme durumu Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. (a) Dikdörtgen şerit-plağa etki eden kuvvetler (b) malzeme özelliği  $Ox_1$  boyunca değişen FD şerit-plak (c) malzeme özelliği  $Ox_2$  boyunca değişen FD şerit-plak

Problemin matematiksel modeli düzlem şekil değiştirme kabulü altında Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) çerçevesinde yapılacaktır. Yapı elemanının öngerilmeli malzemeden yapıldığı kabul edildiğinden LEÜBET teorisine göre, ele alınan sınır değer problemi iki aşamada incelenecektir. Birinci aşamada karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı normal kuvvet etkisinde, yapıda oluşan ön yer değiştirme ve ön gerilmeler belirlenecek daha sonra, bu ön etkilerin dahil olduğu LEÜBET denklemleri yardımıyla üst yüzeyinden etki eden ilave normal basınç kuvveti etkisinde yapıda oluşan yer

**EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ**

değiştirme/gerilme yayılımları belirlenecektir. Her iki aşamaya ait matematiksel model aşağıda ayrı ayrı verilmiştir. Belirtelim ki, matematiksel formülasyonda birinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (0), ikinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (1) ile gösterilecektir. Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell; 0 \leq x_2 \leq h; -\infty \leq x_3 \leq +\infty\} \tag{2}$$

dir. Sonlu elemanlar yöntemi gereği, çözüm bölgesi sonlu adet alt bölgeye (sonlu elemana) ayrılır ve her alt bölgede çözüm polinom fonksiyon olarak kabul edilir. Buna göre fonksiyonel derecelenmiş malzemeden oluşan şerit plağın ele alınan yükleme altında, her sonlu eleman için yer değiştirme fonksiyonları;  $N_i$  şekil fonksiyonu ve  $u_{ki}$  i.nci nodun k doğrultusundaki nodal yer değiştirmesi olmak üzere

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} u_{li}^{(e)} \\ u_{2i}^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad e = 1, 2, \dots, M$$

(3)

seçilir. Burada n elemandaki toplam nod sayısını, M bölgedeki toplam sonlu eleman adedini göstermektedir.

(3) yardımıyla şekil değiştirme fonksiyonları

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \tag{4}$$

olarak elde edilir. Burada B matrisi lineer elastisite teorisinde kinematik bağıntılar yardımıyla elde edilen matristir. Bünye bağıntıları yardımıyla ele alınan sonlu elemanda gerilme matrisi bileşenleri, şekil değiştirme ve malzeme özellikleri matrisi yardımıyla

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \tag{5}$$

olarak bulunur. Belirtelim ki, (5) de verilen D matrisinin elemanları, ele alınan FD şerit-plak için fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani,  $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(x_1)$  (Problem 1) veya  $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(x_2)$  (Problem 2) olur.

Bu matrisin elemanları, Poisson oranı  $\nu = sb.$  için,

$$D_{11} = D_{22} = \frac{(1-\nu)E(x_k)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{\nu E(x_k)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad D_{66} = \frac{E(x_k)}{2(1+\nu)} \tag{6}$$

olarak verilebilir.

Ele alınan FD şerit-plağın yapısında öngerilmelerin belirlenmesi (ilk aşama) klasik lineer elastisite teorisi alan denklemleri ile (5) ve (6) bünye denklemleri yardımıyla belirlenecektir. Bu aşamaya ait çözüm bölgesinde sağlanan denklem ve bağıntılar;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{D}(x_i) \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2 \tag{9}$$

ve sınır koşulları

$$u_2 \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} = 0, \quad \sigma_{11} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} = q, \quad \sigma_{ij} \Big|_{\substack{x_2=0;h \\ x_1 \in [0,\ell]}} = 0, \quad i, j = 1, 2 \tag{10}$$

Öngerilmeli FD şerit-plağın üst yüzeyinden etki eden düzgün yayılı basınç kuvveti etkisinde eğilmesine (ikinci

Ü. BABUŞCU YEŞİL, M.C ATASAYANLAR

aşama) ait problemin matematiksel modeli aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\sigma^{(1)} = \mathbf{D}(x_i) \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2 \quad (13)$$

ve sınır koşulları;

$$u_2^{(1)} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} = 0, \quad \left( \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{1n}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} = 0, \\ \left( \sigma_{jk}^{(1)} + \sigma_{kn}^{(0)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{\substack{x_2=h \\ x_1 \in [0,\ell]}} = p \delta_2^k, \quad \left( \sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_1 \in [0,\ell]}} = 0, \quad i,j;k=1,2 \quad (14)$$

olarak verilebilir. (7)-(14)'de bilinen notasyonlar kullanılmıştır. Belirtelim ki, (7)-(14)'de üst indis (0), ilk aşamaya ait büyüklükleri; üst indis (1) ikinci aşamaya ait büyüklükleri temsil etmektedir. Eğer yapıda öngerilme ihmal edilirse yani, öngerilmesiz yapı elemanı için aynı problemlerin matematiksel formülasyonu verilmek istenirse, bu durumda yukarıda verilen ilk aşamaya ait sınır değer problemi göz ardı edilmeli ve ikinci aşamaya ait sınır değer probleminin matematiksel formülasyonunda yer alan  $\sigma_{in}^{(0)}$ 'ler sıfır olarak alınmalıdır.

Ele alınan problemlerin çözümünde yer değiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) kullanılmıştır [7]. İlk aşama için

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(0)}(x_k) \varepsilon_{ij}^{(0)} dx_1 dx_2 - \int_0^h q u_1^{(0)} \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h q u_1^{(0)} \Big|_{x_1=\ell} dx_2, \quad i,j=1,2 \quad (15)$$

fonksiyoneli, ikinci aşama için

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( T_{ij}(x_k) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 - \int_0^{\ell} p u_2^{(1)} \Big|_{x_2=h} dx_1 \quad (16)$$

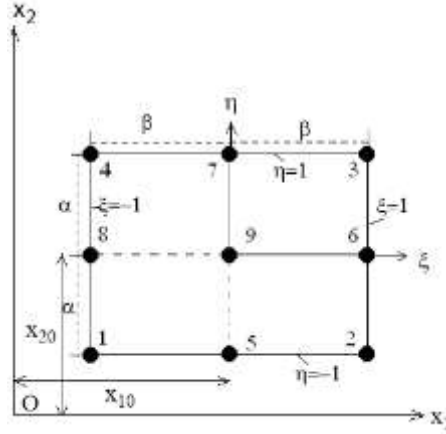
(16)'de,

$$T_{ij}(x_1) = \sigma_{ij}^{(1)}(x_k) + \sigma_{ij}^{(0)}(x_k) \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \quad (17)$$

fonksiyonelleri ve Ritz tekniği yardımıyla sonlu eleman çözümü yapılacaktır.

Çözüm bölgesi, sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana  $\left( \Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega_e \right)$  ayrıştırılır.  $\Omega_e$ , e.'inci sonlu elemana ait bölgeyi göstermektedir. Sonlu elemanlar, 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar olarak seçilmiştir (Şekil 2).

EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ



Şekil 2. Sonlu eleman ve düğüm noktaları

Ele alınan dikdörtgen sonlu elemanların nodlarında tanımlanan ikinci dereceden standart Lagrange şekil fonksiyonlarının normalize edilmiş koordinatlardaki  $(O' \xi \eta)$  ifadeleri;

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); \\ N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); N_5 = \frac{1}{4}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); N_6 = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1); \\ N_7 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta); N_8 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1); N_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (18)$$

olur. Yerel  $O' \xi \eta$  koordinat takımı ile genel  $Ox_1x_2$  kartezyen koordinat takımı arasında dönüşümü sağlayan bağıntı;

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}, \quad \eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha} \quad (19)$$

dir. Her iki aşamaya ait sınır değer problemlerinin sonlu eleman çözümünde, aynı sonlu eleman ayrıklaştırması kullanılmıştır. Çözüm yöntemi gereği, her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu (3)'de verildiği gibi polinom fonksiyon şeklinde seçilir. Bu ifade, birinci aşama için (15) fonksiyonelinde, ikinci aşama için (16) fonksiyonelinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa; 1. aşamaya ait problemin çözümü

$$\mathbf{K}^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)} \quad (20)$$

denklem sisteminin çözümüne, 2. aşamaya ait problemin çözümü

$$\mathbf{K}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)} \quad (21)$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (20) ve (21) eşitliklerinde  $\mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}$  Rijidlik matrisi,  $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}$  nodlarda bilinmeyenleri içeren matris ve  $\mathbf{F}^{(0)}, \mathbf{F}^{(1)}$  kuvvet veya sağ taraf matrisini göstermektedir [4, 5]. Örneğin  $\mathbf{K}^{(0)}$  elemanları seçilen e. sonlu eleman için

$$\mathbf{K}^{(0),e} = \int_{\Omega_e} \left( \mathbf{B}^{(e)} \right)^T \mathbf{D}^{(e)}(\mathbf{x}_k) \mathbf{B}^{(e)} d\Omega_e \quad (22)$$

şeklinindedir. Bu matris elemanlarının sayısal hesaplanmasında Gauss karelemesi kullanılmıştır. İki katlı integralin Gauss karelemesi yardımıyla sayısal integrali  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  keyfi bir fonksiyon için,

$$\iint_S f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) J w_i w_j \quad (23)$$

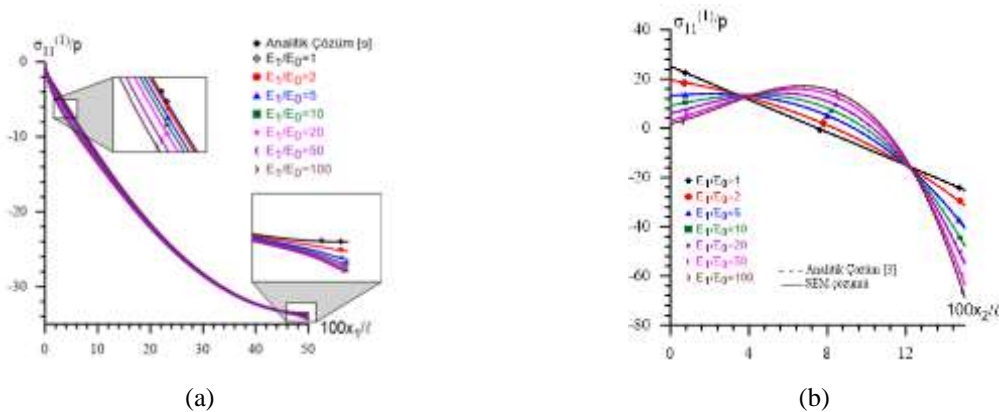
olarak belirlenir. (23) de  $\xi_i$  ve  $\eta_j$  Gauss noktaları,  $w_i$  ( $w_j$ ) ağırlık çarpanları ve  $J$  koordinat dönüşümünün jakobiyenidir.

(20) ve (21) cebrik denklem sistemlerinin ardışık olarak çözümünden sırasıyla birinci ve ikinci aşamaya ait nodlarda yer değiştirme değerleri belirlenir.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Ele alınan problemlerin çözümü, yapı elemanı ve yüklemenin  $x_1/\ell = 1/2$ 'ye göre simetrik olmasından yararlanılarak çözüm bölgesinin 1/2 lik kısmında yapılmıştır. Bu bölge (Şekil 1a)  $Ox_1$  doğrultusunda  $N=80$  ve  $Ox_2$  doğrultusunda  $M=12$  dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde toplam, 960 dikdörtgen sonlu elemana ayrıştırılmıştır. Ele alınan durumda sonlu eleman modellemesi 4025 düğüm noktası (nod) ve 8000 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir. Çözüm için kullanılan bu sonlu eleman ayrıştırması, pek çok sonlu eleman ağı için bulunan değerlerin literatürdeki uygun değerlere en iyi yaklaşımının sağlandığı sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir. Belirtelim ki grafiklerde Problem 1 (Problem 2) için elde edilen yer değiştirme ve gerilme grafikleri  $Ox_1$  ( $Ox_2$ ) eksenine göre verilmiştir.

Şekil 3.a (Şekil 3.b)'da öngerilmemiş şerit-plağın sadece üstten eğilme kuvveti etkisinde Problem 1 (Problem 2) için  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme yayılımı farklı  $E_1/E_0$  ( $E_1 = E(x_i) |_{x_i=x_i^{(0)}} = E_0(ax_i^{(0)} + b)^n$ ,  $x_1^{(0)} = \ell; x_2^{(0)} = h$ ) değerleri için verilmektedir. Şekil 3.a'da (Şekil 3.b'de) verilen grafikler ile [9] ([3]) kaynağında verilen analitik çözüm sonuçları ile tamamen üst üste çakışmaktadır. Bu sonuç aynı zamanda tarafımızdan yapılan sonlu eleman algoritma ve programlarının doğruluğu ve hassasiyet mertebesini de göstermektedir. Sayısal hesaplamalarda boyutsuz büyüklükler kullanıldığından  $E_1/E_0$  oranı plaktaki en büyük Young modülü değişimini temsil etmektedir.  $E_1/E_0=1$  seçilmesi, şerit-plak malzemesinin homojen malzeme olması durumuna karşılık gelmektedir. Şekil 3a'da şerit-plağın  $x_1$  doğrultusunda FDM özelliğe sahip olması durumunda  $E_1/E_0$  azaldıkça homojen duruma yaklaşıldığı ve  $E_1/E_0=1$  olması durumunda [9]'da verilen analitik çözümle tarafımızdan elde edilen çözümün üst üste düştüğü ve Şekil 3b'de şerit-plağın  $x_2$  doğrultusunda FDM özelliğe sahip olması durumunda her bir  $E_1/E_0$  değeri için tarafımızdan bulunan sonlu elemanlar çözümü ile [3]'de verilen analitik çözümün birebir uyduğu görülmektedir.

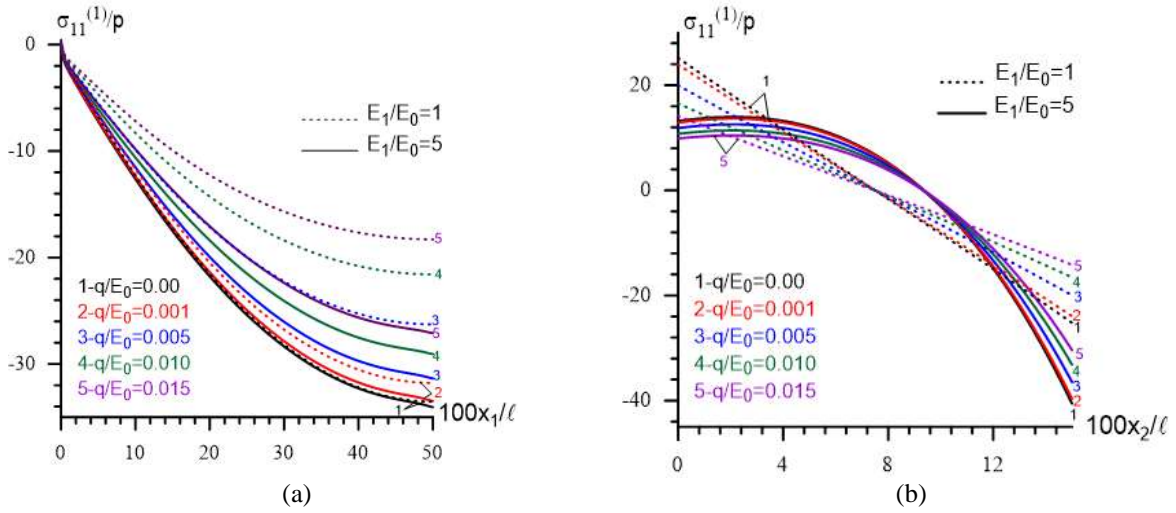


Şekil 3. Öngerilmemiş şerit-plağın (a) Problem 1  $\left( E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2 \right)$  (b) Problem 2

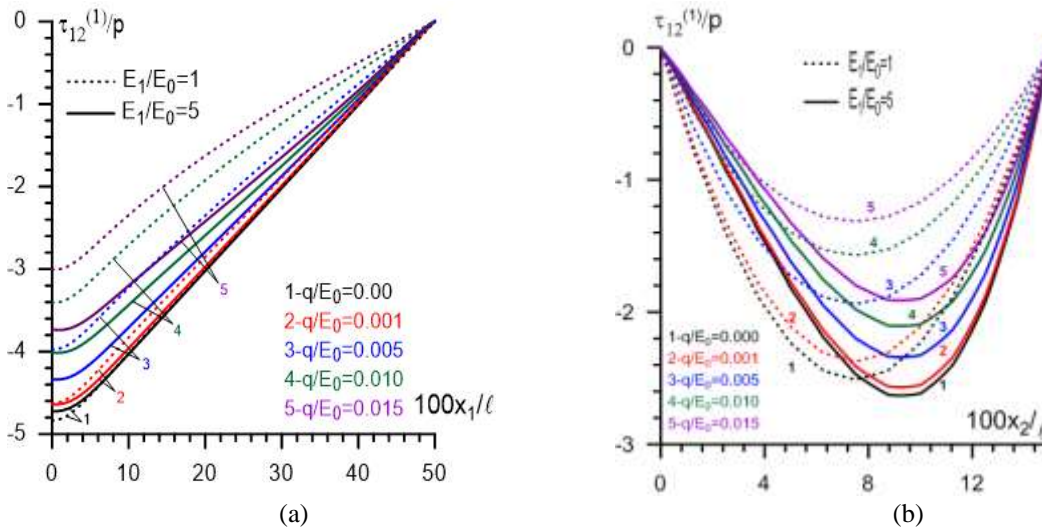
**EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ**

$\left( E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2 \right)$  için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme yayılımı.

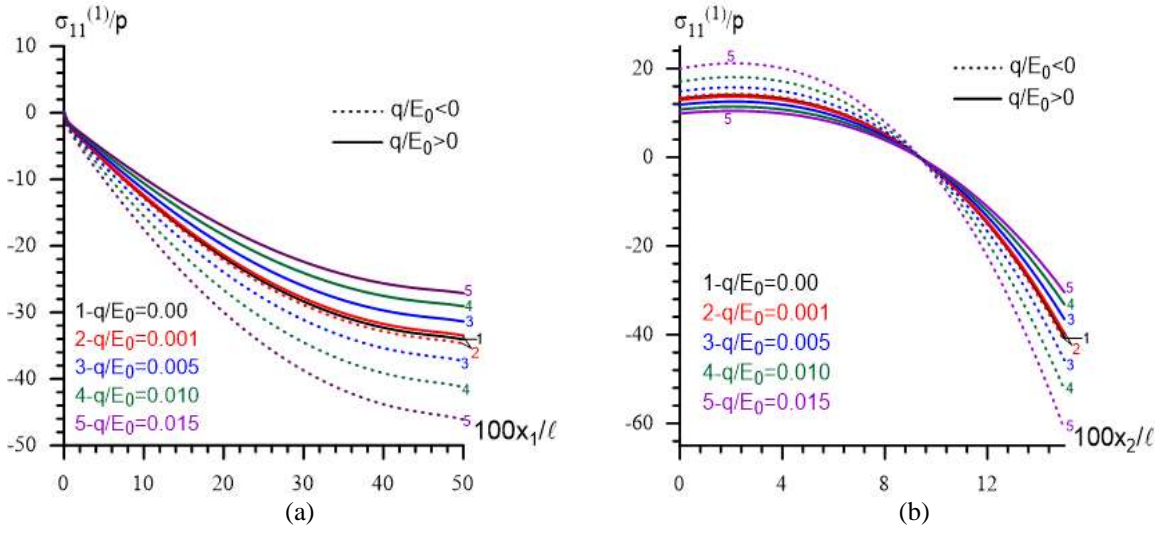
Şekil 4 (Şekil 5)'de  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  ( $\tau_{12}^{(1)}/p$ ) normal (kayma) gerilmesinin yayılımı, farklı öngerilme  $q/E_0$  değerleri için ((a) Problem 1, (b) Problem 2),  $E_1/E_0 = 5$  (FD malzeme) ve  $E_1/E_0 = 1$  (homojen izotrop) verilmiştir. Her iki problem için de  $q/E_0$  arttıkça,  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  ( $\tau_{12}^{(1)}/p$ ) gerilme değerleri mutlak değerce azalırken, aynı öngerilme için  $E_1/E_0 = 1$  (homojen) ile  $E_1/E_0 \neq 1$  (FDM) durumları arasındaki fark artmaktadır.



**Şekil 4.**  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  'de  $n=2$  için  $E_1/E_0 = 5$  ve  $E_1/E_0 = 1$  durumlarında öngerilmenin etkisi.

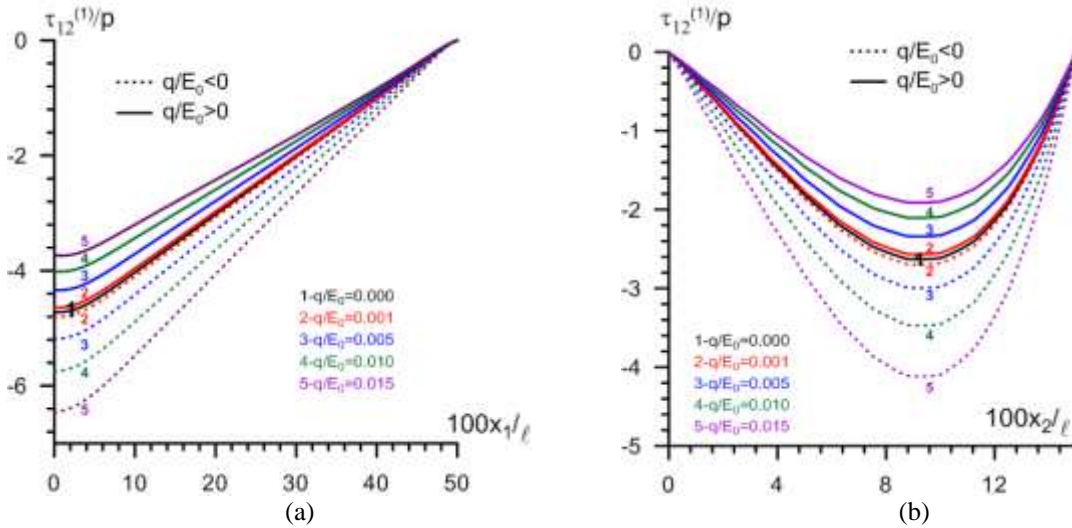


**Şekil 5.**  $\tau_{12}^{(1)}/p$  gerilme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h/2$  ve  $x_1 = \ell/4$  'de  $n=2$  için  $E_1/E_0 = 5$  ve  $E_1/E_0 = 1$  durumlarında öngerilmenin etkisi.



**Şekil 6.**  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme yayılımına değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için ve  $E_1/E_0 = 5$  durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

Şekil 6 (Şekil 7)'de FD malzemenin ( $E_1/E_0 = 5$ ) yapılmış şerit-plakta basınç öngerilmesi ( $q/E_0 < 0$ ) ve çekme öngerilmesi ( $q/E_0 > 0$ ) değişiminin  $n=2$  durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  ( $\tau_{12}^{(1)}/p$ ) gerilme yayılımına etkisi incelenmiştir. Yapıda basınç öngerilmesi ( $q/E_0 < 0$ ) olması gerilme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi ( $q/E_0 > 0$ ) olması gerilme değerlerini mutlak değerce azaltmaktadır. Bununla beraber basınç öngerilmesi, çekme öngerilmesine göre yapıda oluşan gerilme değerine çok daha fazla etki göstermektedir.

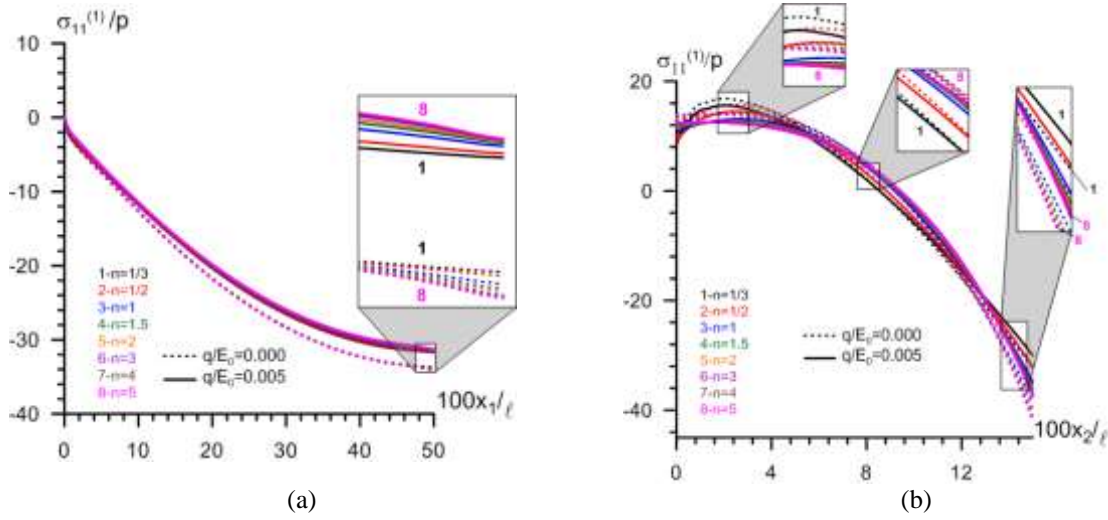


**Şekil 7.**  $\tau_{12}^{(1)}/p$  kayma gerilmesi yayılımına (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h/2$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için ve  $E_1/E_0 = 5$  durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.



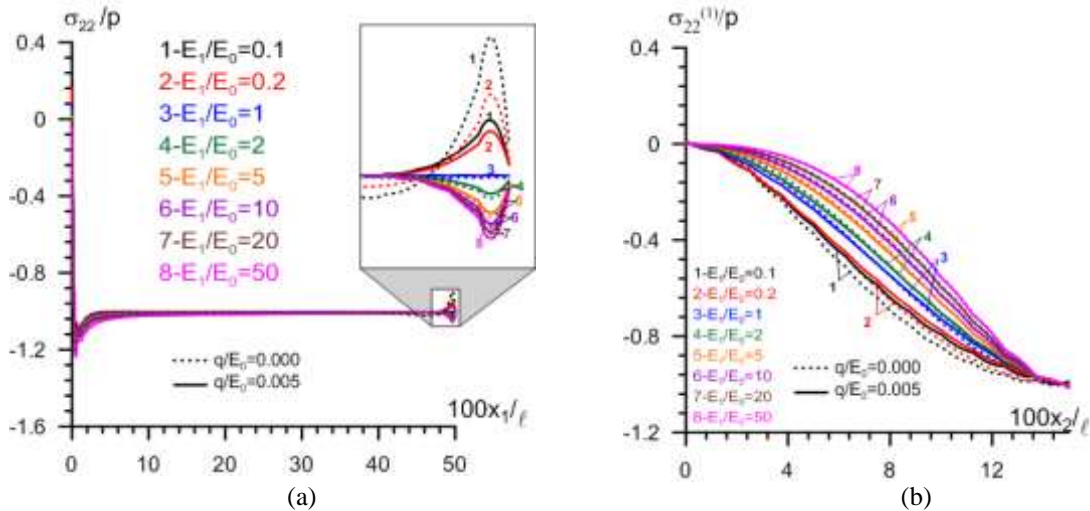
**EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ**

Şekil 8’de  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme değerlerinin ele alınan her iki problem için  $q/E_0 = 0.005$  ve  $q/E_0 = 0$  durumlarında  $n$  (denklem (1)) değişiminden nasıl etkilendiği incelenmiştir. Her iki problem için de  $n$  değişimi  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme değerlerinde değişimler yapmaktadır.



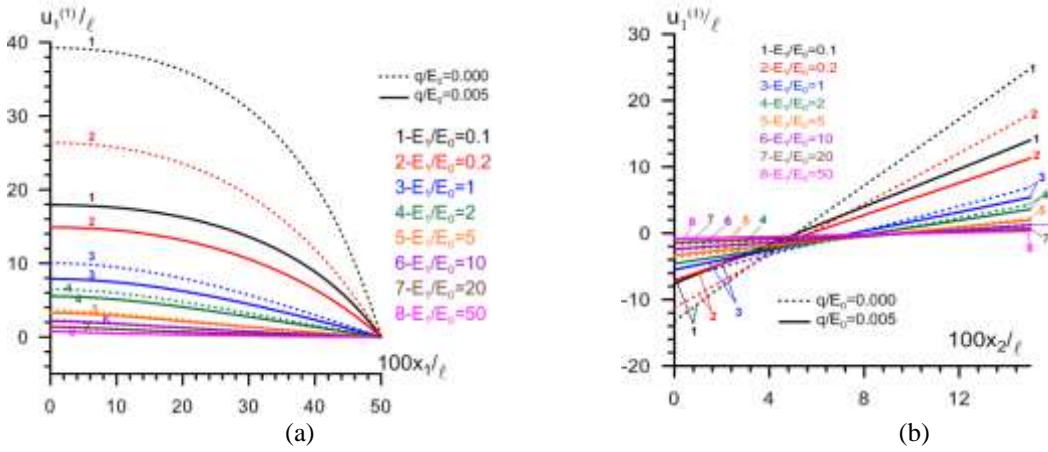
**Şekil 8.**  $\sigma_{11}^{(1)}/p$  gerilme yayılımına (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde için ve  $E_1/E_0 = 5$  durumunda  $n$  değişiminin etkisi.

Şekil 9.a (b)’da  $\sigma_{22}^{(1)}/p$  gerilme yayılımı, farklı  $E_1/E_0$  için  $n=2$ ,  $q/E_0 = 0$  ve  $q/E_0 = 0.005$  durumlarında  $x_2 = h$  (Problem 1) ( $x_1 = \ell/4$  Problem 2)) kesitinde  $x_1/\ell$  ( $x_2/\ell$ )’ye göre verilmiştir.  $\sigma_{22}^{(1)}/p$  gerilme yayılımına,  $E_1/E_0$  değişiminin etkisi Problem 2’de, Problem 1’e göre daha fazladır.



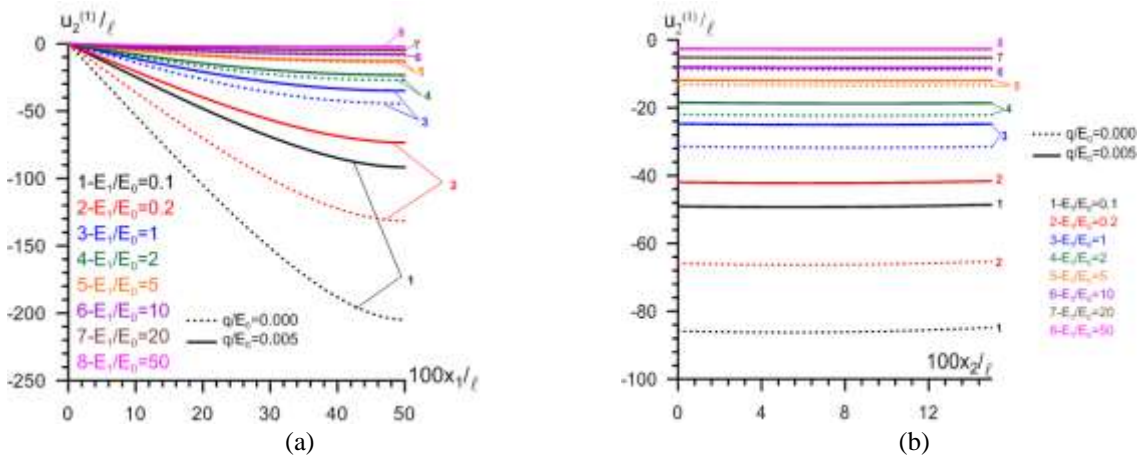
**Şekil 9.**  $\sigma_{22}^{(1)}/p$  gerilme yayılımına (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $q/E_0 = 0.005$  ve  $q/E_0 = 0$  için  $E_1/E_0$  değişiminin etkisi.

Ü. BABUŞCU YEŞİL, M.C ATASAYANLAR



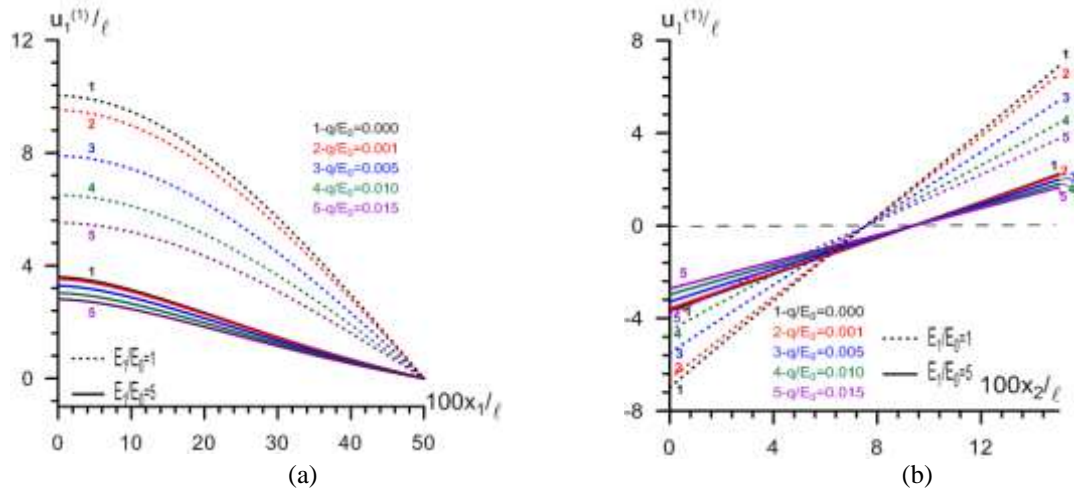
Şekil 10.  $u_1^{(1)}/\ell$  yer değiştirme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $q/E_0 = 0.005$  ve  $q/E_0 = 0$  durumlarında  $E_1/E_0$  değişiminin etkisi.

Şekil 10 (Şekil 11)'de  $u_1^{(1)}/\ell$  ( $u_2^{(1)}/\ell$ ) yer değiştirme değerlerinin  $n=2$  durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için  $q/E_0 = 0$  ve  $q/E_0 = 0.005$  durumlarında  $E_1/E_0$  değişiminden nasıl etkilendiği  $x_2 = h$  ( $x_1 = \ell/4$ ) kesitinde  $x_1/\ell$  ( $x_2/\ell$ )'ye göre incelenmiştir. Her iki problem için de  $E_1/E_0$  değeri arttıkça  $u_1^{(1)}/\ell$  ( $u_2^{(1)}/\ell$ ) yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. Her iki problem için de öngerişmez durumda ( $q/E_0 = 0$ ) elde edilen yer değiştirme değerleri öngerişmenin ele alındığı ( $q/E_0 = 0.005$ ) duruma göre mutlak değerce daha fazladır.



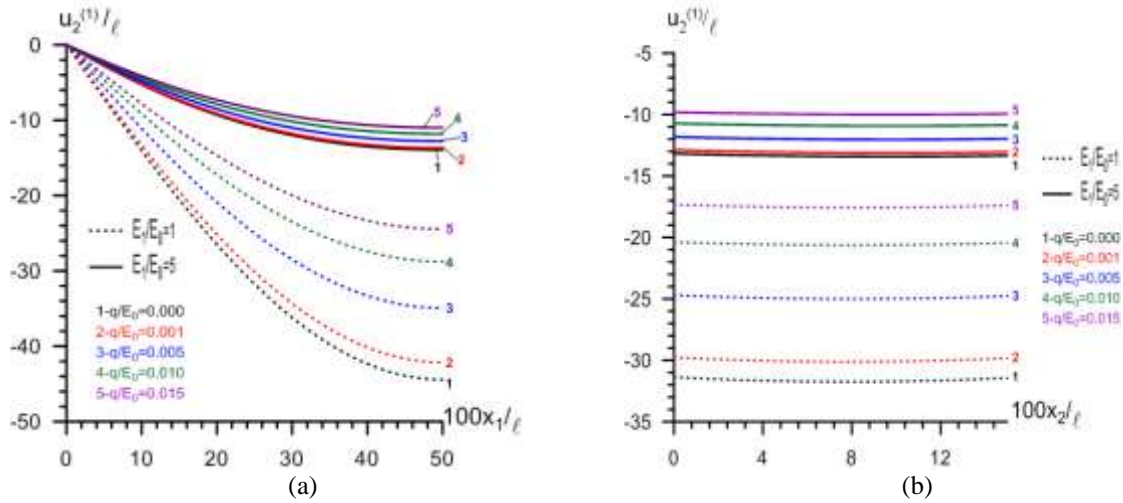
Şekil 11.  $u_2^{(1)}/\ell$  yer değiştirme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h/2$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $q/E_0 = 0.005$  ve  $q/E_0 = 0$  durumlarında  $E_1/E_0$  değişiminin etkisi.

EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

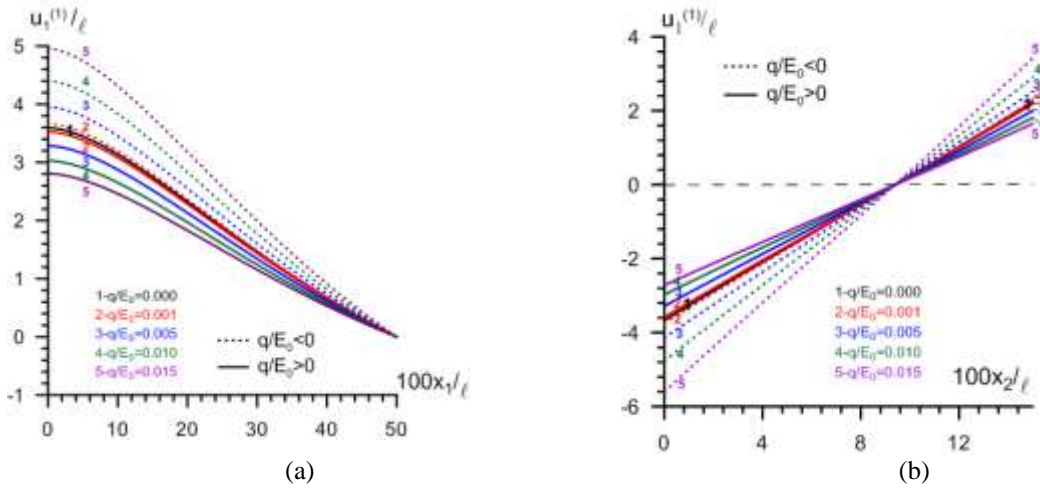


Şekil 12.  $u_1^{(1)}/\ell$  yer değiştirme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $E_1/E_0 = 5$  ve  $E_1/E_0 = 1$  durumlarında  $q/E_0$  değişiminin etkisi.

Şekil 12 (Şekil 13)'de  $u_1^{(1)}/\ell$  ( $u_2^{(1)}/\ell$ ) yer değiştirme değerlerinin  $n=2$  durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için  $E_1/E_0 = 1$  ve  $E_1/E_0 = 5$  durumlarında  $n=2$  için  $q/E_0$  değişiminden nasıl etkilendiği verilen kesitlerde incelenmiştir. Her iki problem için de  $q/E_0$  değeri (öngerilme) arttıkça  $u_1^{(1)}/\ell$  ( $u_2^{(1)}/\ell$ ) yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır.  $q/E_0$  değişiminin etkisi  $E_1/E_0 = 5$  (FD malzeme) durumunda  $E_1/E_0 = 1$  durumuna göre daha az olmaktadır.

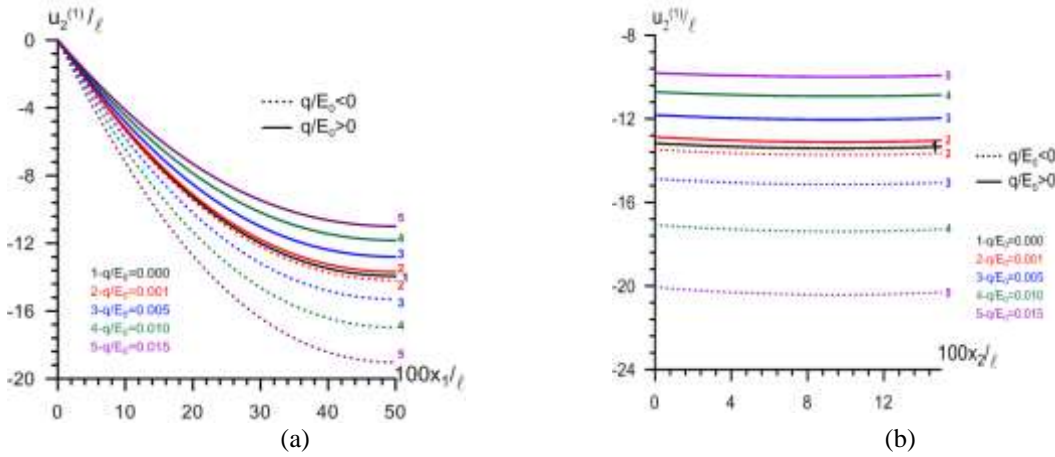


Şekil 13.  $u_2^{(1)}/\ell$  yer değiştirme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h/2$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $E_1/E_0 = 5$  ve  $E_1/E_0 = 1$  durumlarında  $q/E_0$  değişiminin etkisi.



**Şekil 14.**  $u_1^{(1)}/\ell$  yer değiştirme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $E_1/E_0 = 5$  durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

Şekil 14 (Şekil 15)'de FD malzemeden ( $E_1/E_0 = 5$ ) yapılmış şerit-plakta basınç öngerilmesi ( $q/E_0 < 0$ ) ve çekme öngerilmesi ( $q/E_0 > 0$ ) değişiminin  $n=2$  durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için  $u_1^{(1)}/\ell$  ( $u_2^{(1)}/\ell$ ) yer değiştirme yayılımına etkisi incelenmiştir. Yapıda basınç öngerilmesi ( $q/E_0 < 0$ ) olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi ( $q/E_0 > 0$ ) olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesi olması durumu yer değiştirmelerin değerlerini daha fazla etkilemektedir.



**Şekil 15.**  $u_2^{(1)}/\ell$  yer değiştirme değerlerine (a) Problem 1 (b) Problem 2 için sırasıyla  $x_2 = h/2$  ve  $x_1 = \ell/4$  kesitlerinde  $n=2$  için  $E_1/E_0 = 5$  durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

#### 4. SONUÇLAR

Sürekli değişen fonksiyon olarak seçilen Young Modülü'ne sahip fonksiyonel derecelenmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, öngerilmeli şerit plağın eğilmesi durumunda, malzeme özelliğinin değişim doğrultusunun (derecelendirme yönünün) ( $Ox_1$  veya  $Ox_2$ ) gerilme ve yer değiştirme yayılımına etkisi incelenmiştir. Her iki derecelendirme yönü için de

**EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ**

yapıdaki çekme (basınç) öngerilmesi arttıkça yer değiştirme ve gerilme değerleri mutlak değerce azalmaktadır (artmaktadır). Öngerilme arttıkça homojen ve FD malzeme için gerilme (yer değiştirme) değerleri arasındaki fark artmaktadır (azalmaktadır). Öngerilmeye neden olan  $q/E_0$  kuvvet doğrultusuna dik derecelendirme yönüne ( $Ox_2$ ) sahip FD malzemelerde,  $E_1/E_0$  değişiminin etkisi daha fazla olmaktadır. Her iki derecelendirme yönü için basınç öngerilmesi yer değiştirme ve gerilme değerlerini çekme öngerilmesi olması durumuna göre daha fazla etkilemektedir.

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde bize yol gösterip, yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Nazmiye YAHNIOĞLU'na teşekkür ederiz.

**KAYNAKLAR**

- [1] KOIZUMI, M., "The Concept of FGM", Ceram. Trans. Func. Grad. Mater., 34, 3–10, 1993.
- [2] SWAMINATHAN, K., NAVEENKUMAR, D.T., ZENKOUR, A.M., CARRERA, E., "Stress, Vibration And Buckling Analyses Of FGM Plates- A State Of The Art Review", Composite Structures, 120, 10-31, 2015.
- [3] ERDOĞAN, F., WU, B.H., "The Surface Crack Problem For A Plate With Functionally Graded Properties", Journal of Applied Mechanics, 64, 449-456, 1997.
- [4] AKBAROV, S.D., YAHNIOĞLU, N., YUCEL, A., "On the Influence of the Initial Tension of a Strip with a Rectangular Hole on the Stress Concentration Caused By Additional Loading", Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 39, 615-624, 2004.
- [5] BABUŞCU YEŞİL, U., "The Effect Of The Initial Stretching Of The Rectangular Plate With A Cylindrical Hole On The Stress And Displacement Distributions Around The Hole", Turkish J. Eng. Env. Sci., 34, 1- 15, 2010.
- [6] YAHNIOĞLU, N. BABUŞCU YEŞİL, U., "Öngerilmeli Şerit-Plağın Eğilmesi Durumunda İçerdiği Dairesel Dolgular Arasındaki Karşılıklı Etki", XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 767-778, Isparta, Türkiye, 2007.
- [7] ZIENKIEWICZ, O.C, TAYLOR, R.L., The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems, Mc Graw- Hill Book Company, Oxford, 1989.
- [8] AKBAROV, S.D., GUZ, A.N., Mechanics of Curved Composites, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
- [9] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., Theory of Elasticity, Third Edition, Mc Graw- Hill International Editions, London, 1970.