ÖHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.
ISSN: 2564-6605
doi: 10.28948/ngumuh.633157
Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 8, Sayı 3, (2019), 138-148
Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 8, Issue 3, (2019), 138-148

21. Ulusal Mekanik Kongresi Özel Sayısı
21st National Mechanics Congress Special Issue

Araştırma / Research

GENELLEŞTİRİLMİŞ ELASTİK ORTAMDAKİ YÜKSEK MERTEBE UZUN BOYUNA DALGA VE KISA BOYUNA DALGA DENKLEMLERİ

İrma HACINLIYAN (ORCID: 0000-0001-7076-2172)*

İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Maslak/İstanbul, Türkiye

Geliş / Received: *15.10.2019*
Kabul / Accepted: *28.11.2019*

ÖZ

Bu çalışmada, genelleştirilmiş bir kübik elastik ortamda yayılan uzun ve kısa boyuna dalgalar arasındaki etkileşime yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif etkilerin katkısı incelenmiştir. Bu amaçla, ilk olarak, yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif etkileri içeren kısa boyuna dalganın evrimini tanımlayan yüksek mertebe nonlineer Schrödinger denklemi indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak türetildi. Daha sonra, uzun boyuna dalganın faz hızının kısa boyuna dalganın grup hızına eşit olduğu durumlarda etkileşimin tanımlanması için yüksek mertebeden uzun boyuna dalga ve kısa boyuna dalga denklemleri bulundu. Buna ek olarak, Jacobi eliptik fonksiyon açılımı yöntemi, etkileşim denklemlerinin özel çözümlerini sunmak için kullanıldı.

Anahtar kelimeler: uzun dalga ve kısa dalga etkileşimleri, dalga yayılımı, tam çözümler, mikromorfik elastisite

A HIGHER-ORDER LONG LONGITUDINAL WAVE AND SHORT LONGITUDINAL WAVE EQUATIONS IN AN GENERALIZED ELASTIC MEDIUM

ABSTRACT

In this study, the contribution of higher-order nonlinear and dispersive effects to the interaction between long and short longitudinal waves propagating in a generalized cubic elastic medium is examined. For this purpose, first, the higher order nonlinear Schrödinger equation which describes evolution of the short longitudinal wave included the higher-order nonlinear and dispersive effects is derived by using a reductive perturbation method. Then the higher-order long longitudinal wave and short longitudinal wave equations are obtained for the description of the interaction in the case where the phase velocity of a long longitudinal wave is equal to the group velocity of a short longitudinal wave. In addition, the Jacobi elliptic function expansion method is used to present the special solutions of the interaction equations.

Keywords: long-wave and short-wave interactions, wave propagation, exact solutions, micromorphic elasticity

*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90 212 285 32 51 ; e-mail / e-posta: hacinliy@itu.edu.tr

İ. HACINLIYAN

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere zayıf doğrusal olmayan ve dispersif sürekli elastik bir katı, optik, plazma, su yüzeyi, kabarcıklı sıvılar gibi ortamlarda modüle olmuş uzun dalga yayılımının uzak zaman davranışı

$$L_t + p\,L_{xxx} + q\,L\,L_x = 0 \tag{1}$$

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi [1-5] ile tanımlanırken kısa dalga yayılımının uzak zaman davranışı

$$i\,S_t + p\,S_{xx} + q\left|S\right|^2 S = 0 \tag{2}$$

nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi [6-10] ile modellenir. Denklem (1) ve denklem (2)'deki, t zaman ve x uzay koordinatları olmak üzere, L uzun dalganın gerçel genliğini ve S kısa dalganın karmaşık genliğini göstermektedir. KdV ve NLS denklemleri, denklemdeki doğrusal olmayan etkiler ile dispersif etkileri dengelendiği yalnız dalga, soliton gibi çözümlere sahiptirler. Fakat bu denklemler, farklı fiziksel durumlarda ise, dalga hareketini doğru bir şekilde karakterize edemeyebilirler. Bu gibi durumlarda, yeni bir denge denkleminin üretilmesi gerekir.

Kısa dalga sinyalinin genliği zamana ve mekâna göre değiştiğinde, uzun dalga ile kısa dalganın zarfı arasında etkileşim oluşabilir. Bu durum, plazma, akışkanlar ve elastik gibi çeşitli ortamlarda ele alınarak

$$\begin{aligned} &L_t = \alpha\left(\left|S\right|^2\right)_x, \\ &i\,S_t + p\,S_{xx} = \beta\,L\,S \end{aligned} \tag{3}$$

uzun dalga ve kısa dalga denklemleri bulunmuştur [7, 11-14]. Öte yandan, dalga boyunun dalga genişliğine yakın olması durumunda, NLS denklemi geçerli olmaktan çıkar ve dalga yayılımını modelleyen evolüsyon denklemlerinde daha yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif terimlerin göz önüne alınmasını gerekir. Bu problem, ilk önce doğrusal olmayan optik alanında Kodama [15] ve Kodama ve Hasegawa [16] tarafından incelenerek

$$i\,S_t + p\,S_{xx} + q\left|S\right|^2 S + i\varepsilon(r\,S_{\xi\xi\xi} + a\,S^2\,\overline{S}_\xi + b\left|S\right|^2 S_\xi) = 0 \tag{4}$$

yüksek mertebe NLS (YMNLS) denklemi türetilmiştir. Denklemi (4)'deki üst çizgi ile ifade edilen fonksiyon karmaşık eşleniği göstermektedir. Daha sonra Hacinliyan ve Erbay, genelleştirilmiş elastik bir ortamda aynı anda yayılan iki kısa enine dalganın modülasyon probleminde yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersiyonun etkilerini araştırmışlar ve denklem (4)'ü kuple denklem sisteminde elde etmişlerdir [17]. Akhatov ve Khismatullin ise kabarcıklı sıvılarda kısa dalga ve uzun dalga etkileşim problemini incelemişler ve yüksek mertebe etkileri içeren uzun dalga ve kısa dalga denklemlerini hesaplamışlardır [18].

Bu çalışmada ise sonsuz, homojen üçüncü derece doğrusal olmayan genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan boyuna dalgalarının yüksek mertebe etkileri, indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelendi. Bunun için öncelikle yüksek mertebe türevler içeren birinci ve ikinci mertebe boyuna modların sağladığı evrim denklemleri türetildi. Daha sonra, bu modların uygun bir bileşimi düşünülerek YMNLS denklemi bulundu. YMNLS denkleminin, boyuna dalganın grup hızının faz hızına eşit olduğu durumda geçerliliğini yitirdiği gözlendi. Bu eksikliği düzeltmek için hareketi karakterize eden yüksek mertebede uzun ve kısa boyuna dalgaların etkileşim denklemleri yeni bir pertürbasyon açılımı kullanılarak elde edildi. Ayrıca Jacobi eliptik fonksiyon açılımı yöntemi kullanılarak yüksek mertebe uzun ve kısa boyuna dalga denklemlerinin gezen dalga şeklindeki özel çözümleri de hesaplandı.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Alan Denklemleri

Maddenin ayrık yapısını klasik elastisite teorisine katmak için yüksek mertebe gradyan teorileri, yerel olmayan elastisite ve mikromorfik elastisite gibi çok sayıda sürekli ortam teorileri ortaya atılmıştır. Mikromorfik elastisite teorisinin basitleştirilmiş bir hali olan elastisitenin moment teorisine göre, bir cismin şekil değiştirme durumu makro şekil değiştirme tansörü

$$2e_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l} \tag{5}$$

ve mikro şekil değiştirme gradyeni

$$\Gamma_{klm} = -u_{l,km}$$
(6)

ile verilir [19]. Burada u_k yer değiştirme vektörünün bileşenleri olmak üzere, virgülden sonra gelen k indisi x_k uzay değişkenine göre kısmi türevi göstermekte olup tekrarlanan indisler üzerinde toplama uzlaşımı geçerlidir.

Bu çalışmada, yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamda zayıf doğrusal olmayan dalga yayılımına yüksek mertebe terimlerin katkısı problemi inceleceğinden Σ iç enerji yoğunluğu, makro şekil değiştirme tansörünün dördüncü mertebe terimlerini içeren

$$\Sigma = \frac{\lambda}{2} e_{kk} e_{mm} + \mu e_{ik} e_{ik} + 2\mu m^2 (\Gamma_{klm}\Gamma_{klm} + \nu \Gamma_{klm}\Gamma_{lkm}) + \frac{\mathrm{A}}{3} e_{ik} e_{lk} e_{il} + \mathrm{B} e_{ik} e_{ki} e_{mm} + \frac{\mathrm{C}}{3} e_{kk} e_{ll} e_{mm}$$
$$+ \mathrm{D} e_{kk} e_{ll} e_{mm} e_{ii} + G\, e_{ik} e_{lk} e_{li} e_{mm} + H\, e_{ik} e_{ki} e_{ll} e_{mm} + K\, e_{ik} e_{ki} e_{ml} e_{lm}$$
(7)

fonksiyonu ile tanımlanmıştır [20]. Burada, λ ve μ lineer elastik sabitler, A , B ve C ikinci mertebe elastik sabitler, D , G , H ve K ise üçüncü mertebe elastik sabitlerdir. Ayrıca ν ve m ise mikro yapıyı karakterize eden sabitlerdir.

Kinetik enerji ise klasik elastisite teorisindeki gibi, ρ_0 kütle yoğunluğunu olmak üzere

$$T = \frac{1}{2}\rho_0 \left[\left(u_{1,t}\right)^2 + \left(u_{2,t}\right)^2 + \left(u_{3,t}\right)^2 \right]$$
(8)

ile tanımlandı. Bu durumda, bir boyutlu hareketi yöneten denklemler

$$\delta \int L\, dt = \delta \int\int \mathrm{L}\, dxdt = 0$$
(9)

ile verilen Hamilton prensibinden hesaplanabilir. Buradaki $\mathrm{L} = T - \Sigma$, Lagrange yoğunluk fonksiyonudur.

Denklem (7)'deki iç enerji yoğunluk fonksiyonu ve denklem (8)'deki kinetik enerji, denklem (9)'daki Hamilton prensibinden elde edilecek Euler-Lagrange denklemlerinde kullanılırsa, yüksek mertebe yer değiştirme gradyenleri ve zayıf doğrusal olmayan etkileri içeren sonsuz homojen bir ortamda bir boyutlu bir boyuna ve iki enine dalgaların yayılımını tanımlayan

$$u_{tt} - c_L^2 u_{xx} + 4c_T^2 m^2 \left(1+\nu\right) u_{xxxx} = \gamma_1 u_x u_{xx} + \gamma_2 \left(v_x v_{xx} + w_x w_{xx}\right) + \gamma_3 (u_x)^2 u_{xx}$$
$$+ \gamma_4 \left\{ u_{xx} \left((v_x)^2 + (w_x)^2 \right) + 2u_x \left(v_x v_{xx} + w_x w_{xx} \right) \right\}$$
$$v_{tt} - c_T^2 v_{xx} + 4c_T^2 m^2 v_{xxxx} = \gamma_2 \left(u_{xx} v_x + u_x v_{xx} \right) + \gamma_4 \left(2v_x u_x u_{xx} + (u_x)^2 v_{xx} \right)$$
$$+ \gamma_5 \left(3(v_x)^2 v_{xx} + 2v_x w_x w_{xx} + (w_x)^2 v_{xx} \right)$$
$$w_{tt} - c_T^2 w_{xx} + 4c_T^2 m^2 w_{xxxx} = \gamma_2 \left(u_{xx} w_x + u_x w_{xx} \right) + \gamma_4 \left(2w_x u_x u_{xx} + (u_x)^2 w_{xx} \right)$$
$$+ \gamma_5 \left(3(w_x)^2 w_{xx} + 2v_x w_x v_{xx} + (v_x)^2 w_{xx} \right)$$
(10)

hareket denklemleri bulunur. Denklem (10)'da, u yer değiştirme vektörünün boyuna, v ve w ise vektörün enine bileşenlerini gösterir. c_L boyuna dalganın ve c_T enine dalgaların hızları olmak üzere, denklemdeki katsayılar ise

$$c_L^2 \equiv (\lambda + 2\mu)/\rho_0,\ c_T^2 \equiv \mu/\rho_0, \gamma_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]/\rho_0$$
$$\gamma_2 = (2\lambda + 4\mu + A + 3B)/\rho_0, \gamma_3 = 3[\lambda + 2\mu + 4A + 12B + 4C + 8(D + G + H + K)]/2\rho_0 \qquad (11)$$
$$\gamma_4 = (2\lambda + 4\mu + 5A + 14B + 4C + 6G + 4H + 8K)/4\rho_0, \gamma_5 = (\lambda + 2\mu + A + 2B + 2K)/2\rho_0$$

ile ifade edilir.

Denklem (10) doğrusallaştırılarak, k dalga sayısı ve ω dalga frekansı olmak üzere, u boyuna bileşeninin

$$D_1(k,\omega)=\omega^2-c_L^2k^2-4c_T^2m^2(1+\nu)k^4=0\,,\qquad (12)$$

v ve w enine bileşenlerinin

$$D_2(k,\omega)=D_3(k,\omega)=\omega^2-c_T^2k^2-4c_T^2m^2k^4=0\qquad (13)$$

dispersiyon bağıntıları bulunur. (12) ve (13) denklemlerinden görüldüğü üzere yer vektörünün hem boyuna hem de enine bileşenleri dispersiftir. Bu çalışmada, genelleştirilmiş elastik bir ortamdaki boyuna dalganın genliği modelleneceği için $D_1(k,\omega)=0$ ve $D_2(nk,n\omega)\neq 0,\ (n=1,2,\ldots)$ kabul edilecektir. Ayrıca birinci boyuna dalga modunun yüksek harmoniklerle etkileşimi de incelenmeyeceğinden $D_1(l\,k,l\,\omega)\neq 0,\ (l=2,3,\ldots)$ alınacaktır.

2.2. İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

Yüksek mertebe uzaysal türevleri içeren dispersif alan denklemleri ile temsil edilen fiziksel sistemler, dalga yayılımındaki dispersiyonun neden olduğu dağılma ve doğrusal olmayan terimlerin neden olduğu kırılmayı dengeleyerek doğrusal sistem gibi davranışlara neden olduğu gözlenmiştir. Diğer bir deyişle, bu tip alan denklemlerinden yalnız dalga adı verilen düzgün yapıları çözüm olarak kabul eden evrim denklemleri elde edilebilir. Evrim denklemlerini türetecek birçok asimptotik yaklaşım önerilmiştir [21]. Bu çalışmada, zayıf doğrusal olmayan ve dispersif elastik bir ortamda yayılan boyuna dalgaların modülasyon problemi indirgeyici pertürbasyon yöntemi ile incelenecektir [22]. Bu yönteme göre, dalga hareketini doğrusal olmayan ve dispersif etkilerin bir dengesini kuran $\varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi ele alınır. ε parametresi, dispersiyonun bir ölçüsü olarak

$$\xi=\varepsilon(x-\Lambda t),\qquad \tau=\varepsilon^2 t\qquad (14)$$

yavaş değişen yeni değişkenler tanımlamakta kullanılırken, sistemin doğrusal olmama özelliğinin bir ölçüsü olarak da bağımlı değişkenlerin ε'nun bir asimptotik seri şeklinde yazılabileceği varsayılır. Böylece, yavaş değişkenler ve asimptotik açılımlar alan denklemlerine yerleştirilerek ε parametresine göre denklem hiyerarşilerinden evrim denklemleri bulunur.

2.3. Jacobi Eliptik Fonksiyon Açılımı Yöntemi

Doğrusal olmayan dalga denklemlerinde, gezen dalga tipindeki özel çözümlerin bulunması önemli bir araştırma alanıdır. Bu çalışmada, Jacobi eliptik fonksiyon açılımı yöntemi [23-25] kullanılarak yüksek mertebe uzun ve kısa boyuna dalga denklemlerinin gezen dalga çözümleri araştırılacaktır. Bu yöntemde $F(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xx},\ldots)=0$ doğrusal olmayan dalga denkleminde, $\xi=k_1x-w_1t+\theta_1$ olmak üzere, u gerçel değerli bir fonksiyon ise $u=H(\xi)$ ve karmaşık bir fonksiyon ise $u=H(\xi)\exp[-i(k_2x-w_2t+\theta_2)]$ şeklinde çözüm aranır. Ayrıca $H(\xi)$ gerçel fonksiyonunun, $\Phi(\xi)=sn\,\xi$ Jacobi eliptik sine fonksiyonu ile verilen

$$H(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\Phi^i(\xi)+\sum_{i=1}^{n}a_{-i}\Phi^{-i}(\xi)\qquad (15)$$

sonlu bir seri açılımının var olduğu kabul edilir. Böylece $\Phi(\xi)$ fonksiyonu,

$$(\Phi')^2=1-(1+m^2)\Phi^2+m^2\Phi^4,\qquad 0<m<1\qquad (16)$$

diferansiyel denklemini sağlamaktadır. Denklem (15)'deki n, dalga denklemindeki doğrusal olmayan terim ile yüksek mertebe türev terimini dengeleyecek biçimde seçilir. a_i ve a_{-i} katsayıları ise Denklem (15)'deki açılımın dalga denkleminde yerine yazılmasıyla belirlenir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Yüksek Mertebe NLS Denklemi

Bu bölümde, genelleştirilmiş elastik bir ortamdaki yüksek mertebe NLS denklemi türetilecektir. Bunun için, Alan denklemleri (10)'deki çözüm fonksiyonlarına aşağıdaki yaklaşık ε parametresine göre asimptotik seri açılımı önerilmiştir.

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\tau) &= \varepsilon[u_1^{(0)}(\xi,\tau)+u_1^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+c.c] \\
&+\varepsilon^2[u_2^{(0)}(\xi,\tau)+u_2^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+u_2^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+c.c] \\
&+\varepsilon^3[u_3^{(0)}(\xi,\tau)+u_3^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+u_3^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+u_3^{(3)}(\xi,\tau)e^{3i\theta}+c.c]+\ldots \\
v(\xi,\tau) &= v_0^{(0)}(\xi,\tau)+\varepsilon[v_1^{(0)}(\xi,\tau)+v_1^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+c.c] \\
&+\varepsilon^2[v_2^{(0)}(\xi,\tau)+v_2^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+v_2^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+c.c] \\
&+\varepsilon^3[v_3^{(0)}(\xi,\tau)+v_3^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+v_3^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+v_3^{(3)}(\xi,\tau)e^{3i\theta}+c.c]+\ldots \\
w(\xi,\tau) &= w_0^{(0)}(\xi,\tau)+\varepsilon[w_1^{(0)}(\xi,\tau)+w_1^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+c.c] \\
&+\varepsilon^2[w_2^{(0)}(\xi,\tau)+w_2^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+w_2^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+c.c] \\
&+\varepsilon^3[w_3^{(0)}(\xi,\tau)+w_3^{(1)}(\xi,\tau)e^{i\theta}+w_3^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+w_3^{(3)}(\xi,\tau)e^{3i\theta}+c.c]+\ldots
\end{aligned}
$$

(17)Burada, $\theta = k\,x-\omega t$ faz fonksiyonunu iken $c.c.$ kendinden önceki terimlerin karmaşık eşleniğidir. Ayrıca, $u_1^{(1)}$ fonksiyonu birinci mertebe kısa boyuna dalganın karmaşık genliği ve $u_2^{(1)}$ ise ikinci mertebe kısa boyuna dalganın karmaşık genliği olarak adlandırılır.

Denklem (14) ve Denklem (17), alan denklemleri (10)'a yerleştirilirse ε parametresine göre denklem hiyerarşileri bulunur. Böylece, $O(\varepsilon)$ mertebesindeki pertürbasyon denklemlerinden, $u_1^{(1)}$ birinci mertebe boyuna modun sıfırdan farklı ve $v_1^{(1)}=w_1^{(1)}=0$ olduğu elde edilir. İkinci mertebe denklemlerden ise $u_2^{(1)}$ ikinci mertebe boyuna modu keyfi bir fonksiyon iken $v_0^{(0)}=w_0^{(0)}=v_2^{(1)}=w_2^{(1)}=v_2^{(2)}=w_2^{(2)}=0$ olduğu görülür. Ayrıca, bu seviyede $\Lambda = c_{g_L}=\omega'(k)$ (burada c_{g_L}, boyuna dalganın grup hızını göstermektedir.) ve $u_2^{(2)}$ fonksiyonun $u_1^{(1)}$ modu cinsinden ifadesi olan

$$
u_2^{(2)}=\frac{i\,k^3\gamma_1\left(u_1^{(1)}\right)^2}{D_1(2k,2\omega)} \tag{18}
$$

denklemi bulunur.

$O(\varepsilon^3)$ mertebesindeki pertürbasyon denklemlerin çözümlerinden ise

$$
u_{1,\xi}^{(0)}=\frac{k^2\gamma_1\left|u_1^{(1)}\right|^2}{c_{g_L}^2-c_L^2},\qquad u_3^{(2)}=\frac{2i\,k^3\gamma_1}{D_1(2k,2\omega)}u_1^{(1)}u_2^{(1)}+\frac{12\,k^2\gamma_1\left(\omega^2-c_L^2k^2\right)}{D_1(2k,2\omega)^2}u_1^{(1)}u_{1,\xi}^{(1)}
$$

$$
u_3^{(3)}=\frac{-k^4}{D_1(3k,3\omega)}\left(\gamma_3+\frac{6k^2\gamma_1^2}{D_1(2k,2\omega)}\right)\left(u_1^{(1)}\right)^3 \tag{19}
$$

$$
v_1^{(0)}=w_1^{(0)}=v_3^{(1)}=w_3^{(1)}=v_3^{(2)}=w_3^{(2)}=v_3^{(3)}=w_3^{(3)}=0
$$

eşitlikleri ve birinci mertebe boyuna dalganın genliğinin zarf denklemi

$$
i\,u_{1,\tau}^{(1)}+p\,u_{1,\xi\xi}^{(1)}+q\left|u_1^{(1)}\right|^2u_1^{(1)}=0
$$

(20)

elde edilir. Literatürde NLS denklemi olarak bilinen denklem (20)'deki katsayılar ise

$$p=\frac{\omega''(k)}{2},\qquad q=-\frac{k^4\gamma_1^2}{2\omega(c_{g_L}^2-c_L^2)}-\frac{k^6\gamma_1^2}{\omega D_1(2k,2\omega)}-\frac{k^4\gamma_3}{2\omega} \tag{21}$$

olarak tanımlanmıştır. Bilindiği üzere, dalga yayılımda yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif etkilerin önemli olması halinde denklem (20) hareketi tam olarak tanımlayamaz. Bu durumda yüksek mertebe etkilerin de hesaba katılması zorunludur. Bu yüzden, $u_2^{(1)}$ ikinci mertebe boyuna modun sağladığı evolüsyon denklemi $O(\varepsilon^4)$ seviyesinden gelen pertürbasyon denklemlerinden elde edilmelidir. Böylece ε^4 mertebesindeki e^{i0} ve $e^{i\theta}$ terimlerinin katsayılarından oluşan denklemlerden

$$u_{2,\xi}^{(0)}=\frac{k^2\gamma_1}{c_{g_L}^2-c_L^2}(u_1^{(1)}\bar{u}_2^{(1)}+\bar{u}_1^{(1)}u_2^{(1)})+\frac{i\,k\,\gamma_1(c_L^2-c_{g_L}^2+2\,p\,k\,c_{g_L})}{(c_{g_L}^2-c_L^2)^2}(\bar{u}_1^{(1)}u_{1,\xi}^{(1)}-u_1^{(1)}\bar{u}_{1,\xi}^{(1)})$$

$$v_2^{(0)}=w_2^{(0)}=0$$

(22)

çözümleri ve aşağıdaki ikinci mertebe moda ait evolüsyon denklemi

$$i\,u_{2,\tau}^{(1)}+p\,u_{2,\xi\xi}^{(1)}+i\,pp\,u_{1,\xi\xi\xi}^{(1)}+q(u_1^{(1)})^2\bar{u}_2^{(1)}+qq\left|u_1^{(1)}\right|^2u_2^{(1)}+i\,r_1(u_1^{(1)})^2\bar{u}_{1,\xi}^{(1)}+i\,r_2\left|u_1^{(1)}\right|^2u_{1,\xi}^{(1)}=0$$

(23)

Hesaplanır. x 'e göre yüksek mertebe türev terimini içeren denklem (23)'deki katsayılar ise

$$pp=-\frac{\omega'''(k)}{6},\ r_1=-\frac{k^4c_{g_L}}{2\omega^2}\left(\gamma_3+\gamma_1^2\left(\frac{2}{c_{g_L}^2-c_L^2}+\frac{2k^2}{D_1(2k,2\omega)}-\frac{24c_T^2k^2m^2(1+\nu)}{(c_{g_L}^2-c_L^2)^2}\right)\right)$$

$$qq=-\frac{k^2\gamma_1^2p}{12c_T^2m^2(1+\nu)(c_{g_L}^2-c_L^2)}$$
$$+\frac{k^2\gamma_3(2c_L^4-32c_T^2c_{g_L}^2k^2m^2(1+\nu)+128c_T^4k^4m^4(1+\nu)^2-2c_L^2(c_{g_L}^2-28c_T^2k^2m^2(1+\nu)))}{24\omega c_T^2m^2(1+\nu)(c_{g_L}^2-c_L^2)} \tag{24}$$

$$r_2=\frac{k^3(2\omega-k\,c_{g_L})\gamma_3}{\omega^2}$$
$$+\frac{k^3\gamma_1^2}{\omega^2}\left(\frac{2\omega}{c_{g_L}^2-c_L^2}-\frac{(\omega\,p+c_{g_L}^2-c_L^2)\,k\,c_{g_L}}{(c_{g_L}^2-c_L^2)^2}+\frac{192c_T^2k^6m^2(1+\nu)\omega}{D_1(2k,2\omega)^2}+\frac{2k^2(3\omega-kc_{g_L})}{D_1(2k,2\omega)}\right)$$

dır. Denklem (23)'ün doğrusal olmamasının kaynağının $u_1^{(1)}$ birinci modu olduğu gözlenmektedir. Bu yüzden, $S=\varepsilon\,u_1^{(1)}+\varepsilon^2\,u_2^{(1)}$ yeni bağımsız değişken tanımlanarak birinci ve ikinci mertebe evolüsyon denklemleri birleştirilebilir. Bu aşamada, $q=2qq$ kabulü altında, denklemi (20) ε ile ve denklem (23) ise ε^2 ile çarparak toplandığında katsayıları $\bar{q}=q/\varepsilon^2$, $\bar{r}_1=r_1/\varepsilon^2$, $\bar{r}_2=r_2/\varepsilon^2$ ile verilen

$$iS_\tau+p\,S_{\xi\xi}+\bar{q}\left|S\right|^2S+i\varepsilon(pp\,S_{\xi\xi\xi}+\bar{r}_1S^2S_\xi+\bar{r}_2\left|S\right|^2S_\xi)=O(\varepsilon^3)$$

(25)

YMNLS denklemi bulunur.

3.2. Yüksek Mertebe Uzun Dalga ve Kısa Dalga Denklemleri

Birinci ve ikinci modlara ait olan evrim denklemleri (20) ve (23) ve bunların birleşiminden oluşan YMNLS denklemi (25) , $c_{g_L}^2=c_L^2$ rezonans durumunda geçerliliklerini yitirdiği görülmektedir. Bu durumda, uzun boyuna dalga ve kısa boyuna dalga kesişimini tanımlayan yeni bir evolüsyon denklemi gelişebilir. Bu denklemin bulunması için denklem (10)'deki u boyuna bileşeninin, denklem (14)'deki yavaş değişen değişkenlerinde tanımlı ε parametresine göre aşağıda verilen yeni bir asimptotik açılımı alınmalıdır:

$$u(\xi,\tau)=\varepsilon L_1(\xi,\tau)+\varepsilon^{3/2}[S_1(\xi,\tau)e^{i\theta}+c.c]+\varepsilon^2 L_2(\xi,\tau)+\varepsilon^{5/2}[S_2(\xi,\tau)e^{i\theta}+c.c]$$
$$+\varepsilon^3[u_1^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+c.c]+\varepsilon^4[u_2^{(2)}(\xi,\tau)e^{2i\theta}+c.c]+\varepsilon^{9/2}[u_1^{(3)}(\xi,\tau)e^{3i\theta}+c.c]+\mathrm{K}$$
(26)

Bu açılımında S_1 ve S_2 fonksiyonu sırasıyla birinci ve ikinci mertebe kısa boyuna dalganın karmaşık genliğini, L_1 ve L_2 ise sırasıyla birinci ve ikinci mertebe uzun boyuna dalganın gerçel genliğini göstermektedir.

Bu aşamada, denklem (14) ve denklem (26), alan denklemleri (10)'a yerleştirilerek ε parametresine göre denklem hiyerarşilerinden sırasıyla $O(\varepsilon^{3/2})$ seviyesinden S_1 ve $O(\varepsilon^{5/2})$ seviyesinden S_2 kısa modları keyfi fonksiyonlar olarak bulunur. ε^3 mertebesinden ise L_1 kısa dalganın sıfırdan farklı olduğu ve

$$u_1^{(2)}=\frac{i k^3\gamma_1 S_1^2}{D_1(2k,2\omega)} \tag{27}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$i S_{1,\tau}+\frac{12c_T^2m^2(1+\nu)k^2}{\omega}S_{1,\xi\xi}=\frac{k^2\gamma_1}{2\omega}S_1L_{1,\xi}$$
(28)

birinci mertebe kısa dalga evolüsyon denklemi $O(\varepsilon^{7/2})$ seviyesinden gelmektedir. $O(\varepsilon^4)$ seviyesindeki denklemlerin çözümünden, L_2 modu keyfi bir fonksiyon,

$$u_2^{(2)}=\frac{2i k^2\gamma_1 S_1}{D_1(2k,2\omega)}\left(\frac{6i(c_L^2k^2-\omega^2)}{D_1(2k,2\omega)}S_{1,\xi}+k S_2\right)$$
(29)

ve aşağıdaki birinci mertebe uzun dalga evolüsyon denklemi bulunur:

$$L_{1,\tau\xi}=-\frac{k^2\gamma_1}{2c_L}(|S_1|^2)_\xi$$
(30)

Ayrıca $O(\varepsilon^{9/2})$ seviyesinden

$$u_1^{(3)}=\frac{-k^4}{D_1(3k,3\omega)}\left(\gamma_3+\frac{6k^2\gamma_1^2}{D_1(2k,2\omega)}\right)S_1^3 \tag{31}$$

eşitliği bulunurken aynı seviyeden S_2 ve ε^5 mertebesinden ise L_2 modunun sağladığı evolüsyon denklemleri hesaplanır:

$$i S_{2,\tau}+\frac{12c_T^2m^2(1+\nu)k^2}{\omega}S_{2,\xi\xi}+\frac{4ic_T^2m^2(1+\nu)k(3k\,c_L-2\omega)}{\omega^2}S_{1,\xi\xi\xi}=\frac{k^2\gamma_1}{2\omega}\left(S_2L_{1,\xi}+S_1L_{2,\xi}\right)$$
$$+\frac{i\gamma_1k(k\,c_L-2\omega)}{2\omega^2}S_{1,\xi}L_{1,\xi}+\frac{i\gamma_1k(k\,c_L-\omega)}{2\omega^2}S_1L_{1,\xi\xi}+\frac{k^4}{2\omega}\left(\gamma_3-\frac{2k^2\gamma_1^2}{D_1(2k,2\omega)}\right)S_1|S_1|^2$$
$$L_{2,\tau\xi}-\frac{2c_T^2m^2(1+\nu)}{c_L}L_{1,\xi\xi\xi\xi}=-\frac{k^2\gamma_1}{2c_L}(S_1\bar{S}_2+\bar{S}_1S_2)_\xi-\frac{\gamma_1}{4c_L}\left((L_{1,\xi})^2\right)_\xi$$
$$-\frac{ik\gamma_1(6c_T^2k^3m^2(1+\nu)-c_L\omega)}{2c_L^2\omega}(S_{1,\xi}\bar{S}_1-S_1\bar{S}_{1,\xi})_\xi$$
(32)

YMNLS denkleminde olduğu gibi yeni bağımlı uzun dalga değişkeni $S = \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2$ ve kısa dalga değişkeni de $L = \varepsilon L_{1,\xi} + \varepsilon^2 L_{2,\xi}$ olarak tanımlanırsa denklem (28) ve denklem (30)'deki birinci mertebe ve denklem (32)'deki ikinci mertebe evolüsyon denklemleri birleştirilebilir. Böylece yüksek mertebe uzun ve kısa boyuna dalgaların (YMUKBD) denklemleri

$$L_\tau = a_1\left(|S|^2\right)_\xi + \varepsilon\left(a_2 L_{\xi\xi} + a_3 \operatorname{Im}\left(S\,\bar{S}_\xi\right) + a_4 L^2\right)_\xi + O\left(\varepsilon^3\right),$$

$$i\,S_t + p\,S_{\xi\xi} = b_1 L\,S + \varepsilon\left(i\left(b_2 S_{\xi\xi\xi} + b_3 L_\xi S + b_4 L\,S_\xi\right) + b_5 |S|^2\,S\right) + O\left(\varepsilon^3\right)$$

(33)

olarak tanımlanır. Buradaki katsayılar ise

$$p = \frac{12c_T^2 m^2(1+\nu)k^2}{\omega}, \quad a_1 = -\frac{k^2\gamma_1}{2c_L\varepsilon}, \quad a_2 = \frac{2c_T^2 m^2(1+\nu)}{c_L}, \quad a_3 = \frac{k\gamma_1(6c_T^2 k^3 m^2(1+\nu) - c_L\omega)}{c_L^2\omega\,\varepsilon}$$

$$a_4 = -\frac{\gamma_1}{4c_L\varepsilon}, \quad b_1 = \frac{k^2\gamma_1}{2\omega\,\varepsilon}, \quad b_2 = \frac{4c_T^2 m^2(1+\nu)k(-3k\,c_L + 2\omega)}{\omega^2}$$

$$b_3 = \frac{\gamma_1 k(k\,c_L - \omega)}{2\omega^2\varepsilon}, \quad b_4 = \frac{\gamma_1 k(k\,c_L - 2\omega)}{2\omega^2\varepsilon}, \quad b_5 = \frac{k^4}{2\omega\,\varepsilon^2}\left(\gamma_3 - \frac{2k^2\gamma_1^2}{D_1(2k, 2\omega)}\right)$$

(34)

olarak hesaplanır.

3.3. Özel Çözümler

Bu bölümde, denklem (33)'deki YMUKBD denklemlerinin $b_4 = b_3$ ve $b_5 = 0$ durumundaki özel çözümleri Jacobi eliptik fonksiyon açılımı yöntemi ile araştırılacaktır. Öncelikle, denklem (33)

$$x = a_1 b_1\,\xi,\; t = a_1^2 b_1^2\,p\,\tau,\; \tilde{L} = a_1^2 b_1\,p\,L,\; \tilde{S} = a_1 b_1\,p\,S \qquad (35)$$

boyutsuz değişkenler cinsinden yazılarak

$$L_\tau = \left(|S|^2\right)_x + \varepsilon\left(\frac{a_1 a_2 b_1}{p} L_{xx} + a_3 b_1 \operatorname{Im}\left(S\,\bar{S}_x\right) + a_1 a_4 L^2\right)_x$$

$$i\,S_t + S_{xx} = L\,S + i\,\varepsilon\left(\frac{a_1 b_1 b_2}{p} S_{xx} + a_1 b_3 L S\right)_x \qquad (36)$$

bulunur. Burada, karmaşık eşlenik sembolü ile karışmaması için boyutsuz bağımlı değişkenlerin üzerindeki tildalar düşürülmüştür. Daha sonra denklem (36)'ya, w sonradan belirlenmek üzere,

$$L = F(\xi), \qquad S = H(\xi)\exp\left[-i\left(\frac{b_1 b_2 + b_3 p}{2a_1 b_1 b_2 b_3\varepsilon} x - \frac{-b_1 b_2 - b_3 p + a_1^2 b_3^3 \varepsilon^2 p w}{a_1^2 b_3^3 \varepsilon^2 p} t + \theta_2\right)\right] \qquad (37)$$

gezen dalga tipindeki çözümler önerilir. Burada $\xi = \dfrac{3b_1 b_2 + b_3 p}{2a_1 b_1 b_2 b_3 \varepsilon} x - w t + \theta_1$ dir. Denklem (37)'deki çözümler, denklem (36)'da yerine yazılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$H + \alpha_1 H'' + \beta_1 F H = 0$$

$$F' + \alpha_2 (F^2)' + \beta_2 (H^2)' + \gamma_2 F''' = 0 \qquad (38)$$

Bu denklem sistemindeki katsayılar ise

$$\alpha_1 = -\frac{(3b_1b_2+b_3p)^3}{9b_1^3b_2^3 - b_1b_2b_3^2p^2 - b_3^3p^3 + b_1^2b_2^2b_3p(9-8a_1^3b_3^2\varepsilon w)},\ \alpha_2 = \frac{a_4(3b_1b_2+a_4b_3p)}{2b_1b_2b_3w}$$
$$\beta_1 = -\frac{4a_1^2b_1b_2b_3^2\varepsilon^2p(3b_1b_2+b_3p)}{9b_1^3b_2^3 - b_1b_2b_3^2p^2 - b_3^3p^3 + b_1^2b_2^2b_3p(9-8a_1^3b_3^2\varepsilon w)} \tag{39}$$
$$\beta_2 = \frac{(a_1b_2b_3 - a_3(b_1b_2+b_3p))(3b_1b_2+b_3p)}{2a_1^2b_1b_2^2b_3^2\varepsilon w},\ \gamma_2 = \frac{a_2(3b_1b_2+b_3p)^3}{8a_1^2b_1^2b_2^2b_3^3\varepsilon^2pw}$$

ile verilir. Bu aşamada, denklem (38)'deki H ve F bilinmeyen fonksiyonlarının $\Phi(\xi) = sn\,\xi$ fonksiyonuna göre aşağıda verilen açılımlara sahip olduğu kabul edilir:

$$H(\xi) = \sum_{i=0}^{n_1} A_i\Phi^i(\xi) + \sum_{i=1}^{n_1} A_{-i}\Phi^{-i}(\xi)$$
$$F(\xi) = \sum_{i=0}^{n_2} B_i\Phi^i(\xi) + \sum_{i=1}^{n_2} B_{-i}\Phi^{-i}(\xi) \tag{40}$$

Denklem (38)'deki H'' ile FH terimleri ve F''' ile $\left(F^2\right)'$ terimleri, denklem (40)'daki açılıma göre dengelenebilmesi için $n_1 = n_2 = 2$ seçilir. Böylece denklem (40) açılımı, denklem (38)'de yerine yazılarak

$$\alpha_2 = \frac{\beta_1\left(1-4\gamma_2\sqrt{1+14m^2+m^4}\right)}{2-8\alpha_1\sqrt{1+14m^2+m^4}},\quad w = \frac{-a_2\sqrt{1+14m^2+m^4}(3b_1b_2+b_3p)^3}{2a_1^2b_1^2b_2^3b_3^3\varepsilon^2p}$$

(41)

kısıtları altında aşağıdaki çözümler hesaplanır:

$$H(\xi) = A_0 + A_2sn^2\,\xi + A_{-2}sn^{-2}\,\xi$$
$$F(\xi) = B_0 + B_2sn^2\,\xi + B_{-2}sn^{-2}\,\xi \tag{42}$$

Buradaki katsayılar ise

$$A_0 = \frac{A_{-2}}{3}(-1-m^2+\sqrt{1+14m^2+m^4}),\qquad A_2 = m^2A_{-2}$$
$$A_{-2} = \frac{3\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\beta_1\beta_2\sqrt{(1+14m^2+m^4)}\left(-1+4\alpha_1\sqrt{1+14m^2+m^4}\right)}} \tag{43}$$
$$B_0 = \frac{1}{\beta_1}\left[-1+2\alpha_1\left(1+m^2+\sqrt{1+14m^2+m^4}\right)\right],\quad B_2 = -\frac{6\alpha_1m^2}{\beta_1},\quad B_{-2} = -\frac{6\alpha_1}{\beta_1}$$

ile tanımlanır.

$m \to 1$ iken $sn\,\xi \to \tanh\xi$ olduğu için denklem (36)'nın çözümleri

$$L = \frac{-1+12\alpha_1}{\beta_1} - \frac{6\alpha_1}{\beta_1}\left(\tanh^2\xi + \coth^2\xi\right)$$
$$S = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\beta_1\beta_2(-1+16\alpha_1)}}\left(1+\frac{3}{2}\left(\tanh^2\xi+\coth^2\xi\right)\right)\exp(-i\eta) \tag{44}$$

şeklinde tekilliği olan yalnız dalga yapısındadır. Benzer şekilde, $m \to 0$ iken $sn\,\xi \to \sin\xi$ olduğu için denklem (36)'nın çözümleri

$$L = \frac{-1+4\alpha_1}{\beta_1} - \frac{6\alpha_1}{\beta_1}\csc^2\xi$$
$$S = \frac{3\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\beta_1\beta_2(-1+4\alpha_1)}}\left(\csc^2\xi\right)\exp(-i\eta) \tag{45}$$

şeklinde tekilliği olan periyodik dalga yapısındadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, genelleştirilmiş bir kübik elastik ortamda yayılan uzun ve kısa boyuna dalgalar arasındaki etkileşimindeki yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif etkilerin katkısı problemi araştırılmıştır ve YMNLS denklemi (25) ile YMUKBD denklemi (33) bulunmuştur. YMNLS denklemi, genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif etkilerini katkısını içeren boyuna dalgaların bileşimini yavaş değişen genliğini modellemektedir. Bu denklem, [17]'de genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan yüksek mertebe etkilerin gözlendiği iki enine dalganın kısa genliklerini karakterize eden kuple YMNLS denkleminin tek dalga genliğine indirgenmesidir. Denklem (25), [15] ve [16]'da doğrusal olmayan optikte de türetmiştir. Öte yandan YMUKBD denklemi, genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan yüksek mertebe doğrusal olmayan ve dispersif etkilerini katkısını içeren bir kısa boyuna dalga ve bir uzun boyuna dalganın etkileşimini tanımlamaktadır. Ayrıca kabarcıklı sıvılarda da türetilmiş [6] olan denklem (33)'ün tekilliğe sahip yalnız dalga ve periyodik özel çözümleri de hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] KORTEWRG, D. J., de VRIES, F., "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves", Philosophical Magazine, 39, 422-443, 1895.

[2] GARDNER, C. S., MORIKAWA, G. K., Similarity in the Asymptotic Behavior of Collision-free Hydromagnetic Waves and Water Waves, Courant Institute of Mathematical Sciences Report, New York University, TID-6184, 1960.

[3] WIJNGAARDEN, L. van., "On the Equations of Motion for Mixtures of Liquid and Gas Bubbles", Journal of Fluid Mechanics, 33, 465-474, 1968.

[4] DRAZIN, P. G., JOHNSON, R. S., Solitons: An Introduction, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] ERBAY, H. A., "Nonlinear Transverse Waves in a Generalized Elastic Solid and the Complex Modified Korteweg-de Vries Equation", Physica Scripta, 58, 9-14, 1998.

[6] HASIMOTO, H., ONO, H., "Nonlinear Modulation of Gravity Waves", Journal of the Physical Society of Japan, 33, 805-811, 1972.

[7] ZAKHAROV, V. E., "Collapse of Langmuir Waves", Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 35, 908, 1972.

[8] ERBAY, S., ERBAY, H. A., DOST, S., "Nonlinear Wave Modulation in Micropolar Elastic Media-I. Longitudinal waves", International Journal of Engineering Science, 29, 845-858, 1991.

[9] ABLOWITZ, M. J., CLARKSON, P. A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[10] GUMEROV, N. A., "Quasi-monochromatic Weakly Non-linear Waves in a Low-dispersion Bubble Medium", Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 56, 50-59, 1992.

[11] BENNEY, D. J., "Significant Interactions between Small and Large Scale Surface Waves", Studies in Applied Mathematics, 55, 93-106, 1976.

[12] BENNEY, D. J., "A General Theory for Interactions between Short and Long Waves", Studies in Applied Mathematics, 56, 81-94, 1977.

[13] DJORDJEVIC, V. D., REDEKOPE L. G., "On Two-dimensional Packets of Capillary-Gravity Waves", Journal of Fluid Mechanics, 79, 703-714, 1977.

[14] ERBAY, S., "Nonlinear Interaction between Long and Short Waves in a Generalized Elastic Solid", Chaos, Solitons and Fractals, 11, 1789-1789, 2000.

[15] KODAMA, Y., “Optical Solitons in a Monomode Fiber”, Journal of Statistical Physics, 39, 597-614, 1985.

[16] KODAMA, Y., HASEGAWA, A., “Nonlinear Pulse Propagation in a Monomode Dielectric Guide”, IEEE Journal of Quantum Electronics, 23, 510-524, 1987.

[17] HACINLIYAN, I., ERBAY, S., “A Higher-Order Model for Transverse Waves in a Generalized Elastic Solid”, Chaos, Solitons and Fractals, 14, 1127-1135, 2002.

[18] AKHATOV, I. SH., KHISMATULLIN, D. B., “Long-wave-short-wave Interaction in Bubbly Liquids”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 63, 917-926, 1999.

[19] SUHUBİ, E.S., ERINGEN A.C., “Nonlinear Theory of Micro-elastic Solids II”, International Journal of Engineering Science, 2, 389-404, 1964.

[20] EROFEYEV, V. I., POTAPOV, A. I., “Longitudinal Strain Waves in Non-linearly Elastic Media with Couple Stresses”, International Journal of Non-Linear Mechanics. 28, 483-488, 1993.

[21] JEFFREY, A., KAWAHARA, T., Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, 1982.

[22] TANIUTI, T., “Reductive Perturbation Method and Far Fields of Wave Equations”, Progress of Theoretical Physics Supplements, 55, 1-35, 1974.

[23] LIU, S., FU, Z., LIU, S., ZHAO, Q., “Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Periodic Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations”, Physics Letters A, 289, 69-74, 2001.

[24] TIAN, Y. H., CHEN, H. L, LIU, X. Q., “New Exact Solutions to Long-Short Wave Interaction Equations”, Communications in Theoretical Physics, 46, 397-402, 2006.

[25] ALOFI, A. S., “Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method for Nonlinear Benjamin-Bona-Mahony Equations”, International Mathematical Forum, 53, 2639-2649, 2012.