BEÜ Fen Bilimleri Dergisi
8 (4), 1276-1280, 2019

BEU Journal of Science
8 (4), 1276-1280, 2019

Araştırma Makalesi / Research Article

Plücker Konoidi ile İlgili Bir Nevi Işın Kongrüanslarının Simetri Özellikleri

M. Zihni TEMEL*

Dicle Üniversitesi, Mimarlık Fakültesi, Diyarbakır
(ORCID: 0000-0002-5837-6882)

Öz
O. Bottema ve V. Nice, literatürde belirtilen çalışmalarında, metrik haldeki Plücker Konoidinin eksenlerine dik düzlemler üzerindeki doğuranlarda geçen düzlem demetleri üzerindeki koniklerinin merkezlerine, bu düzlem demetlerinin normallerini bağlamak sureti ile tanımladıkları kongrüansın özelliklerini sentetik ve analitik olarak incelemişlerdir. Bu çalışmada, bu koniklerin merkezlerinin eksene dik ilgili düzlemler üzerindeki izdüşüm noktalarının, verilen konoidin koordinat eksenlerinin başlangıç noktasına göre simetriği olan ikinci bir plücker konoidi üzerinde olacağı gösterilerek konikleri ihtiva eden düzlem demetlerinin normallerinin bu konoidin karşılık gelen noktalarına bağlanması ile oluşturulan kongrüansın özellikleri incelenerek, bu özelliklerin ortaya konulan simetriden derhal elde edilebileceği gösterilmiştir. En önemlisi esas konoidin noktalarına, anılan düzlem demetlerinden karşılık gelenlerinin normallerinin bağlanması ile elde edilecek kongrüansa geometrik bir yorum getirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Plücker, Konoid, Kongrüans.

Symmetry Properties of Some Kind of Line Congruences Related to Plucker Conoid

Abstract
O. Bottema and V. Nice examined synthetic and analytical properties of the congruence that they defined by linking the normals of these plane bundies to the centers of their conics on the plane elements passing through the planes perpendicular to the axes of the plucker conoid in the metric state. In this study, it is shown that the projection points of the centers of these cones on the respective planes perpendicular to the axis will be on a second plucker conoid which is symmetrical with respect to the star-ting point of the given conoid coordinates, and the properties of the congruence formed by connecting the normals of the plane bundles containing the conics to the corresponding points of this conoid are examined it has been determined that these properties can be obtained immediately from the symmetry revealed in particular, it has been found that this symmetry feature provides convenience in finding singularities of congruence. Most importantly, a geometric interpretation can be brought to the congruence that will be obtained by connecting the normals of the corresponding bundles of planes to the points the main conoid.

Keywords: Plucker, Congruence, Conoid.

1. Giriş

$[K]$ ile göstereceğimiz metrik haldeki plücker konoidi, uygun seçilmiş bir kartezyen koordinat sisteminde 2d konoidin yüksekliğini göstermek üzere Monge notasyonunda,

$$(x^2 + y^2)z = 2dxy \tag{1}$$

denklemi ile verilebilir. Aynı sistemde konoidin Gauss notasyononda vektörel denklemi,

*Sorumlu yazar: ztemelr@dicle.edu.tr
Geliş Tarihi: 19.09.2019, Kabul Tarihi: 04.10.2019

$$\vec{Y}(r,\theta) = (0,0,1)d\sin 2\theta + r(\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu vektörel denklemin bileşenleri 2π peryotlu fonksiyonlar olduklarından, konoidin kapalı bir regle yüzey olmasının yanısıra, yüzeyin bir doğrultman düzleminin varlığını gösterir. Ayrıca yüzeyin bütün doğrularının, aynı zamanda yüzeyinde ekseni olan Oz eksenini dik kestiği görülmekle birlikte, konoidin Oz eksenli rektikongrüansın bir regle yüzeyi olacağı sonucuna varılır.

2. Materyal ve Metot

Cebirsel işlemlerle konu araştırılıp, oluşturulan kongrüansa geometrik bir yorum getirilerek problemin çözümü için daha kısa bir yaklaşım metodu geliştirilmiştir.

3. Plücker Konoidi ile İlgili Bir Nevi Işın Kongrüanslarının Simetri Özellikleri

Genel olarak z= $c \in$ IR şeklinde konoidin eksenine dik düzlemle konoidin kesişmesi için (2)'den c= $d\sin 2\theta$ olması gerekir. Bu koşul altında arakesitler (1)'den,

$$L_1 : x\cos\theta - y\sin\theta = 0\ ;\ z = d\sin 2\theta$$
$$L_2 : x\sin\theta - y\cos\theta = 0\ ;\ z = d\sin 2\theta \quad (3)$$

şeklinde Oz ekseninde kesişen yüzeye ait L_1 ve L_2 değerleri ile $z = c$ düzleminin sanal bir doğrusundan oluşur. Yüzeye ait bu reel doğrular,

$$\theta = \frac{\pi}{4}\ \text{için}\ T_1 : x - y = 0\ ;\ z = d$$
$$\theta = -\frac{\pi}{4}\ \text{için}\ T_1 : x - y = 0\ ;\ z = -d \quad (4)$$

çakışık durumları gösterirler. Bu hal sınır halidir.(Bu çalışmada yalnızca reel arakesitler üzerinde durulduğunu, sanal kesitlerin incelenmesinin bir başka çalışmanın konusu olacaktır.) $[K]$'nın L_1 doğuranından geçen bir düzlem demeti, $\mu \epsilon$IR bir parametre olmak üzere,

$$x\cos\theta - y\sin\theta + \mu(z - d\sin 2\theta) = 0 \quad (5)$$

şeklinde olup, bu demetle $[K]$'nın arakesitleri,

$$(x\cos\theta - y\sin\theta)(x^2 + y^2 - 2\mu d\sin 2\theta) = 0 \quad (6)$$

Denklemine uygun olacak tarzda, L_1 ve $z = 0$ düzlemi üzerindeki izdüşümü koordinat eksenlerinin başlangıcından geçen dairelerden ibaret olan (k_1) elipslerinden oluşurlar. Aslında bu husus aşikârdır. Zira üçüncü dereceden bir regle yüzeyin bir doğuranından geçen düzlem demetleri ile arakesitleri ∞^2 konik ihtiva eder. Eşitlik (6) ile belli olan koniklerin merkezleri,

$$\vec{Z}_1 = (\mu d\sin\theta, -\mu d\cos\theta, 0) \quad (7)$$

bulunur. Bu merkezlerin $z = c = d\sin 2\theta$ düzlemleri üzerindeki izdüşümleri,

$$\vec{M}_1 = (\mu d\sin\theta, -\mu d\cos\theta, d\sin 2\theta) \quad (8)$$

olup $\mu\ ve\ \theta$ değiştiğine göre bu izdüşüm noktalarının geometrik yerinin $[K]$ konoidinin koordinat eksenlerinin başlangıç noktasına göre simetriği olan ikinci bir $[K_1]$ plücker konoidi olacağı anlaşılır. Benzer tarzda L_2'den geçen düzlem demeti ile $[K]$'nın arakesit koniklerinin $z = c = d\sin 2\theta$ düzlemleri izdüşüm noktaları, $\vec{M}_1$'de θ yerine $\frac{\pi}{2} - \theta$ almakla görüleceği üzere, yine $[K_1]$ konoidine ait,

$$\vec{M}_2 = (\mu d\cos\theta, -\mu d\sin\theta, d\sin 2\theta) \quad (9)$$

şeklinde noktalar bulunur. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1: Bir Plücker konoidinin eksenine dik bir E düzleminde kalan doğuranlarından geçen düzlem demetleri üzerindeki koniklerinin merkezlerinin E düzlemindeki izdüşümleri, bu konoidin koordinat eksenlerinin başlangıcına göre simetriği olan ikinci bir Plücker konoidi üzerindedir.

L_1 ve L_2 doğuranlarından geçen düzlem demetlerinin normal vektörleri sırası ile,

$$\vec{N}_1 = (\cos\theta, -\sin\theta, \mu)$$
$$\vec{N}_2 = (\sin\theta, -\cos\theta, \mu) \qquad (10)$$

olup, N_1'in M_1'e, N_2'nin M_2'ye bağlanması ile tanımlanacak kongrüansın parametrik denklemleri , $\mu_1, \mu_2 \epsilon$ IR yeni paremetreler olmak üzere,

$$x = \mu d \sin\theta + \mu_1 \cos\theta$$
$$y = -\mu d \cos\theta - \mu_1 \sin\theta$$
$$z = d\sin 2\theta + \mu\mu_1 \qquad (11)$$

$$x = \mu d \cos\theta + \mu_2 \sin\theta$$
$$y = -\mu d \sin\theta - \mu_2 \cos\theta$$
$$z = d\sin 2\theta + \mu\mu_2 \qquad (12)$$

yazılır. Eşitlik (11) ve (12)'den sırasıyla μ, μ_1 ve μ, μ_2 yok edilirse her ikisindende aynı,

$$S_1 \ldots (x^2 + y^2)\sin 2\theta + 2xy + 2dz(\cos 2\theta)^2 - 2d^2 \sin 2\theta\,(\cos 2\theta)^2 = 0 \qquad (13)$$

θ ya bağlı paraboloid ailesi elde edilir. Buradan aşagıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1: θ'nın tesbit edilmiş bir değeri için kongrüansların doğuranları, sırası ile, aynı S_1 paraboilidinin her iki regle demetinin doğuranlarından oluşur.

Bu paraboloidin rank'ı $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ için daima dörttür. Ancak $\theta = \frac{\pi}{4}$ için S_1 paraboloidi $U_1 \equiv\ x + y = 0$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ için $U_2 \equiv x - y = 0$ düzlemlere dönüşür ki, bu durumda $[K]$'nın (4) ile belli çakışık doğuranlarından geçen düzlem demetlerinin normalleri söz konusudur.

i. $\theta = \frac{\pi}{4}$ için (13) denkleminin $U_1 \equiv 0$ koşulu altında,

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} 2\mathrm{d}(z - d\sin 2\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} (((x^2 + y^2)\sin 2\theta + 2xy)/(cos2\theta)^2)$$
$$x^2 + y^2 - 4d(z - d) \qquad (14)$$

paraboloidi elde edilir. Bu takdirde söz konusu düzlem normalleri bu paraboloidle $U_1 \equiv 0$ düzleminin arakesiti olan ve

$$-x^2 + 2d(z - d) = 0 :\ U_1 \equiv x + y = 0 \ldots (P_1)$$

ile belli (P_1) parobollerinin teğetlerini oluşturur.

ii. $\theta = \frac{\pi}{4}$ için (14) paraboloidi, limit bu hal için alınacağından, $x^2 + y^2 + 4d(z - d) = 0$ şeklindeki bir başka paraboloid olarak elde edilecektir. Bu sınır hali için göz önüne alınan düzlem normalleri bu paraboloid ile $U_2 \equiv 0$ düzlemlerinin arakesiti olan ve

$$x^2 + 2d(z - d) :\ U_2 \equiv x - y = 0 \ldots (P_2)$$

ile belli (P_2) parobolünün teğetlerini oluşturur.

Aranılan ışın kongrüanslarını S_1 paraboloid sisteminin bütün doğuranlarından meydana geldiğini bulduğumuza göre (13)'te $\sin 2\theta = k$ alarak bu sistemi,

$$S_1 \ldots k(x^2+y^2)+2xy+2dz(1-k^2)-2d^2k(1-k^2)=0 \tag{15}$$

şeklinde yazarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2: Işın kongrüansı (15) ile verilen S_1 sisteminin kuadratik yüzeylerinin bütün doğuranlarından oluşur.

Burada S_1 paraboloidlerin kuadratik bir kümesi olarak görülmektedir. (15)'ten dolayı uzayın belli bir noktasından, S_1'in en az birisi reel üç elemanının geçeceği ve dolayısı ile altı normalinin belli olacağından kongrünsların mertebesi altıdır sonucu elde edilir. u_1, u_2, u_3, u_4 dual homogen koordinatları, x, y, z kartezyen koordinatları göstermek üzere S_1'in teğetsel denklemi,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 1 & k & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & d(1-k^2) & u_3 \\ 0 & 0 & d(1-k^2) & -2d^2k(1-k^2) & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

yazılır. Bu determinant $k^2 \neq 1$ koşulu ile açılırsa,

$$kd(u_1^2+u_2^2-2u_3^2)-(du_1u_2+u_3u_4)=0 \tag{16}$$

denklemi elde edilir. k'ya göre lineer olan bu ifade kuadriklerin bir demetini belirtir. Bu denklem nokta koordinatlarına göre yazılırsa dördüncü dereceden bir yüzey belirteceğinden kuardiklerin bütün demetlerini göstermez. $k=1$ için U_1 düzleminde (P_1) parabolünü, $k=-1$ için ise U_2 düzleminde (P_2) parabolünü gösterir. U_1 ve U_2 düzlemlerinin, kongrüansa ait sonsuz doğrular içermeleri nedeniyle kongrüansın singüler düzlemleri olacağını, belli bir doğrunun S_1'in bir elemanına genel olarak değmesinden, kongrüansın rank'ı üçtür. Uzayın her düzleminin S_1'in bir elemanına genel anlamda değmesinden ve (16) denkleminin derecesinin iki olmasından da mertebesi iki dir. Son olarak, kongrüansın $k=\infty$ için singülaritesini inceliyelim. Eğer benzer tarzda $[K]$'nın noktalarına izafe edilecek kongrüansın yani $[K_1]$'in eksenine dik E düzleminin üzerindeki doğuranlardan geçen düzlem demetleri üzerindeki koniklerin merkezlerinin, bu eksene dik düzlemler üzerindeki izdüşüm noktalarına, bu noktalara karşılık gelen düzlemlerin normallerinin bağlanması ile elde edilecek kongrüansın denklemi (15) denkleminin koordinat başlangıcına göre simetriği alınmak üzere yani x yerine $-x$, y yerine $-y$, z yerine $-z$ yazılarak,

$$\text{S} \ldots\ k(x^2+y^2)+2xy-2dz(1-k^2)-2kd^2(1-k^2)=0 \tag{17}$$

şeklinde S_1 yüzeyinin simetriği elde edilir. Esasen oluşturmak istediğimiz kongrüans bu olacaktı. Ancak kongrüansın direkt tesisinde geometrik yorum yönünden kavram karışıklığına sebep olmamak ve geometrik yorumlamayı yapabilmek için, simetriğinin buraya kadar anlatıldığı şekliyle, oluşturulmasında zorunluluk oluşmuştur. (17) ile tanımlanan kongrüansın mertebesi ve rank'ı simetriğinin aynısıdır. Aynı U_1 ve U_2 singüler düzlemlerine sahiptir. (15) ve (17) yüzey aileleri $z=0$ merkez düzleminde, $k(x^2+y^2)+2xy-2kd^2(1-k^2)=0$ konikleri boyunca kesişirler. Bu konik ailesinin teğetleri her iki kongrüansın ortak doğruları olup, $k=\infty$ için adı geçen singülarite bundan ibarettir. $k=\pm 1$ için (17) denklemi U_1 ve U_2'ye dönüşür ki; S'nin bu durumda U_1 ve U_2 üzerindeki P_i parabollerinin teğetlerinin, başlangıç noktasına göre simetriği olan doğrular olacaktır.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada yalnızca reel arakesitler üzerinde durulmuştur. Sanal kesitlerin incelenmesi başka bir çalışmanın konusu olması sebebiyle konuyla ilgili araştırma yapmak isteyenler için iyi bir yöntem verildiği kanısındayım.

Kaynaklar

[1] Bottema O. 1971. Eine Plücker Konoid Zugeordnete Strahlenkongruenz. Technische Hogeschool, Delft, Hollanda.

[2] Nice V. 1969. Noch Einige Eigenshften des Plückersehen Konoids. Mathematischtes İnstitu der Universitat, Zagreb, Hırvatistan.

[3] Nice V. 1971. Die Direktrixkongruenz der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids. Mathematisches İnstitut der Üniversitat, Zagreb, Hırvatistan.

[4] Hacısalihoğlu H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No. 2.

[5] Hacısalihoğlu H.H. 1998. İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

[6] Izumiya S., Takeuchi N. 2001. Singularities of Ruled Surfaces in $\square^3$, Math., Proceedings of Cambridge Philosophical Soc.

[7] Izumiya S., Saji K., Takeuchi N. 2003. Singularities of Line Congruences. Procveeding of the Royal Society of Edinburgh.