Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(2), 592-599
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(2), 592-599
DOI: 10.18185/erzifbed.690071
Research Article

Bol E-Tümlenmiş Modüllere ve E-Yükseltilebilir Modüllere Torsiyon-Teorik Bir Yaklaşım

Esra Öztürk Sözen[1*]

[1]Sinop Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Geliş / Received: 17/02/2020, Kabul / Accepted: 01/06/2020

Öz

Bu çalışmada bol τ_e-tümlenmiş ve τ_e-yükseltilebilir modülleri tanımlıyoruz ve bu yapıların temel özelliklerini araştırıyoruz. Ayrıca τ_e-tümlenmiş, bol τ_e-tümlenmiş ve τ_e-yükseltilebilir modüllerin arasındaki ikili ilişkileri belirtiyoruz.
Anahtar Kelimeler: e-küçük alt modül, bol e-tümlenmiş modül, e-yükseltilebilir modül, kalıtsal torsiyon teorisi.

A Torsion-Theoretic Approximation to Amply e-Supplemented Modules and e-Lifting Modules

Abstract
In this study, we define amply τ_e-supplemented and τ_e-lifting modules and investigate main structures of them. Moreover we determine their relationship τ_e-supplemented, amply τ_e-supplemented and τ_e-lifting modules with each other' düzenlemesi yapılabilir.

Keywords: e-small submodule, amply e-supplemented module, e-lifting module, hereditary torsion theory.

1. Giriş

Bu çalışmada R, M ve τ notasyonları sırasıyla birimli halkaları, üniter R-modülleri ve kalıtsal torsiyon teorisini belirtecektir. M modülünün bir X alt modülü için $X + Y = M$ koşulu yalnızca $Y = M$ olduğunda sağlanıyorsa, X alt modülüne M nin küçük alt modülü denir ve $''X \ll M''$ ile gösterilir. Diğer taraftan $X \leq M$ alt modülünün M nin sıfır alt modülünden farklı tüm öz alt modülleri ile arakesiti sıfırdan farklı oluyorsa, X alt modülüne M nin büyük alt modülüdür denir. Tümlenmiş modül, projektif örtü, ve dolayısıyla yarı mükemmel modüllerin tanımlanmasında kilit rol üstlenen küçük alt modüller bu yönüyle modül ve halka teorisinin odağında kalmayı hak etmektedir. Ayrıca 2011 yılında Zhou ve Zang tarafından, küçük ve büyük alt modüllerden esinlenerek tanımlanan, e-küçük alt modül kavramı da bu alanda güncel pek çok çalışmanın ortaya konmasına olanak sağlamıştır (Quynh ve Tin, 2013; Koşar ve ark., 2015). Bu sayede e-tümlenmiş modül, e-yükseltilebilir modül gibi kavramlar ve bir takım genelleştirmeleri literatüre kazandırılmıştır.
Bir modülün küçük ve büyük alt modüllerinin torsiyon teorik versiyonları ilk olarak 1998 yılında Bland tarafından verilmiştir. 2007

*Sorumlu Yazar: esozen@sinop.edu.tr

yılında Charalambides ve Clark CS modülleri torsiyon teorisine göre irdelemiştir. 2004 yılında ise Harmancı ve Koşan' ın tümlenmiş modüllerin kalıtsal torsiyon teorisine göre varyasyonunu sunan çalışmaları yayımlanmıştır.

Bu çalışmada da e-tümlenmiş modüllerin, bol e-tümlenmiş modül ve e-yükseltilebilir modül gibi iki özel genelleştirmesinin kalıtsal bir torsiyon teorisine göre cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Bu bağlamda özellikle, τ_e-tümlenmiş ile bol τ_e-tümlenmiş modüller arasındaki ilişkiler ve halka karakterizasyonları verilmiştir. τ_e-yükseltilebilir bir modülün her direkt toplam terimi de τ_e-yükseltilebilirdir. Buna karşılık, τ_e-yükseltilebilir iki modülün de τ_e-yükseltilebilir olmasını sağlayacak ön koşullar belirlenmiştir. τ_e-tümlenmiş ve bol τ_e-tümlenmiş modüllerin belli koşullar altında τ_e-yükseltilebilir olduğu ispatlanmıştır.

2. Materyal ve Metot

Tanım 2.1: R-mod da bir τ-torsiyon teorisi aşağıdaki koşulları gerçekleyen $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ sınıflarının ikilisidir.

1. $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$.
2. $T \longrightarrow M \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $T \in \mathcal{T}$ ise $M \in \mathcal{T}$ dir.
3. $0 \longrightarrow M \longrightarrow F$ dizisi tam ve $F \in \mathcal{F}$ ise $M \in \mathcal{F}$ dir.
4. Her M modülü için $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$ dizisi tam olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ ve $F \in \mathcal{F}$ modülleri vardır (Bland, 1998).

Tanım 2.2: $M \in \mathcal{T}$ ise M ye τ-torsiyon modül; $M \in \mathcal{F}$ ise M ye τ-serbest torsiyon modül denir (Bland, 1998).

Tanım 2.3: $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ τ-torsiyon teorisinde $\tau(M) = \sum\{N \leq M \mid N \in \tau\}$ olmak üzere

$\mathcal{T} = \{M \in R - mod \mid \tau(M) = M\}$; τ-torsiyon modüllerin sınıfıdır.

$\mathcal{F} = \{M \in R - mod \mid \tau(M) = 0\}$; τ-serbest torsiyon modüllerin sınıfıdır (Bland, 1998).

Tanım 2.4: $\mathcal{T}$ sınıfı alt modüller altında kapalı ise yani içerdiği τ-torsiyon modüllerin her alt modülü de τ-torsiyon ise τ ya kalıtsal torsiyon teorisi denir (Bland, 1998).

Tanım 2.5: $\mathcal{F}$ sınıfı homomorfik görüntüler altında kapalı ise τ ya eşkalıtsal torsiyon teorisi denir (Bland, 1998).

Önerme 2.6: $\mathcal{T}$ sınıfı homomorfik görüntüler, direkt toplamlar ve genişlemeler altında kapalıdır (Bland, 1998).

Önerme 2.7: $\mathcal{F}$ sınıfı alt modüller, direkt çarpımlar ve genişlemeler altında kapalıdır (Bland, 1998).

Tanım 2.8: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $M/_N$ bölüm modülü τ-torsiyon ise N ye M nin τ-yoğun alt modülü denir ve $''N \leq_{\tau-d} M''$ ile gösterilir (Bland, 1998).

Tanım 2.9: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $N \trianglelefteq M$ ve $N \leq_{\tau-d} M$ ise N ye M nin τ-büyük alt modülü denir ve $''\, N \trianglelefteq_{\tau} M\, ''$ ile gösterilir (Bland, 1998).

Her τ-büyük alt modülün büyük alt modül olduğu açıktır. Ve tanımları gereği τ-büyük alt modülün büyük alt modülün bir genelleştirilmiş versiyonu değil özelleştirilmişi olduğuna ulaşılabilir.

Bu bölümde verilen tüm tanım ve diğer bilgilerin detaylı formu için Bland (1998) a ait kaynak incelenebilir.

Tanım 2.10: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $K \trianglelefteq_{\tau} M$ için $N + K = M$ ifadesi yalnızca

$K = M$ olduğunda gerçekleniyorsa N ye M nin τ_e-küçük alt modül denir ve $''N \ll_{\tau_e} M''$ ile gösterilir (Sözen, 2020).

Bir modülün her e-küçük alt modülü τ_e-küçüktür. τ-torsiyon modüller için tersi de söylenebilir.

Şimdi τ_e-küçük alt modüllerin özelliklerini aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 2.11: M bir modül olsun.

1. $K, L, N \leq M$ ve K$\leq N$ olsun.
   a) $N \ll_{\tau_e} M$ ise $K \ll_{\tau_e} M$ ve $N/_K \ll_{\tau_e} M/_K$ dır.
   b) $N + L \ll_{\tau_e} M \Leftrightarrow N \ll_{\tau_e} M$ ve $L \ll_{\tau_e} M$ dir.

2. τ_e-küçük alt modüllerin homomorfik görüntüsü de τ_e-küçük alt modüldür.

3. $K_1 \leq M_1 \leq M,\ K_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda, $K_1 \oplus K_2 \ll_{\tau_e} M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow K_1 \ll_{\tau_e} M_1$ ve $K_2 \ll_{\tau_e} M_2$ dir.

4. $K \leq N \leq M$, $K \ll_{\tau_e} M$ ve N, M nin direkt toplam terimi ise $K \ll_{\tau_e} N$ dir (Sözen, 2020).

Tanım 2.12: M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve bir $T \trianglelefteq_\tau V$ için $M = U + T$ olması $T = V$ olmasını gerektiriyorsa V ye U nun M de τ_e-tümleyeni denir. Eğer M nin her alt modülü τ_e-tümleyene sahipse M ye τ_e-tümlenmiş modül denir (Sözen, 2020).

E-tümlenmiş her modül τ_e-tümlenmiştir.

Lemma 2.13: M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. U alt modülünün M de bir V τ_e-tümleyene sahip olması için gerek ve yeter koşul $U + V = M$ ve $U \cap V \ll_{\tau_e} V$ olmasıdır (Sözen, 2020).

3. Bulgular

Bol τ_e-Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.1: M bir modül ve $X \leq M$ olsun. Eğer $M = X + K$ koşulunu gerçekleyen her K alt modülü X in M de bir τ_e-tümleyenini içeriyorsa bu takdirde X, M de bol τ_e-tümleyene sahiptir denir. Eğer M nin her alt modülü M de bir bol τ_e-tümleyenine sahipse M ye bol τ_e-tümlenmiş modül adı verilir.

τ_e-tümlenmiş ve bol e-tümlenmiş modüllerin bol τ_e-tümlenmiş oldukları açıktır.

Teorem 3.2: M bir modül ve X ile Y, M de bol τ_e-tümleyene sahip ve $M = X + Y$ koşulunu gerçekleyen alt modüller olsun. Bu takdirde $X \cap Y$ alt modülü de M de bol τ_e-tümleyene sahiptir.

İspat: $W \leq M$ için $M = (X \cap Y) + W$ olsun. Modüler kuralı gereği, $X = (X \cap Y) + (W \cap X)$ ve $Y = (X \cap Y) + (W \cap Y)$ elde edilir. Buradan, $M = X + Y$ olduğu için $M = X + (W \cap Y)$ ve $M = Y + (W \cap X)$ yazılabilir. Hipotez gereği, X ve Y sırasıyla M de $V_1 \leq W \cap Y$ ve $V_2 \leq W \cap X$ olacak şekilde V_1 ve V_2 τ_e-tümleyenlerine sahiptir. Yani,

$$X + V_1 = M,\ X \cap V_1 \ll_{\tau_e} V_1 \text{ ve } Y + V_2 = M,\ Y \cap V_2 \ll_{\tau_e} V_2$$

dir. Böylelikle $V_1 \leq W \cap Y \leq Y$ için Modüler kuralı gereği $Y = V_1 + (X \cap Y)$ dir. Benzer şekilde $X = V_2 + (X \cap Y)$ olduğu görülebilir. Buradan $M = X + Y = (X \cap Y) + (V_1 + V_2)$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}(X \cap Y) \cap (V_1 + V_2) &= X \cap [Y \cap (V_1 + V_2)] \\ &= X \cap [V_1 + (V_2 \cap Y)] \\ &= (X \cap V_1) \\ &\quad + (V_2 \cap Y) \ll_{\tau_e} V_1 + V_2\end{aligned}$$

olduğundan $V_1 + V_2$, $X \cap Y$ nin M de $V_1 + V_2 \leq W$ olacak şekilde bir τ_e-tümleyeni olur.

Teorem 3.3: Bol τ_e-tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de bol τ_e-tümlenmiştir.

İspat: Standart şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.4: Bol τ_e-tümlenmiş bir modülün homomorfik görüntüsü de bol τ_e-tümlenmiştir.

Teorem 3.5: Bir M modülünün her alt modülü τ_e-tümlenmiş ise M aynı zamanda bol τ_e-tümlenmiş modüldür.

İspat: $N \leq M$ ve bir $T \leq M$ için $M = N + T$ olsun. Hipotez gereği, $N \cap T$, T de bir K τ_e-tümleyenine sahiptir. Bu durumda $(N \cap T) + K = T$ ve $(N \cap T) \cap K = N \cap K \ll_{\tau_e} K$ dır. Buradan $M = N + T = N + (N \cap T) + K = N + K$ elde edilir. Sonuç olarak, K, N nin M de T tarafından kapsanan τ_e-tümleyenidir dolayısıyla M bol τ_e-tümlenmiştir.

Hatırlatmak gerekirse, bir M modülünün $X, Y \leq M$ olmak üzere $M = X + Y$ koşulunu gerçekleyen her $X, Y \leq M$ alt modülü için $f(M) \subseteq X$ ve $(I - f)(M) \subseteq Y$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ var ise M ye π-projektif modül denir. Her projektif modül π-projektiftir.

Teorem 3.6: M modülü π-projektif ve τ_e-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde M bol τ_e-tümlenmiştir.

İspat: X, M nin herhangi bir alt modülü ve $Y \leq M$ için $M = X + Y$ olsun. M, π-projektif olduğundan $f(M) \subseteq Y$ ve $(I - f)(M) \subseteq X$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ vardır. Ayrıca hipotez gereği X, M de bir T τ_e-tümleyenine sahiptir. Yani, $X + T = M$ ve $X \cap T \ll_{\tau_e} T$ dir. Buradan $M = f(M) + (I - f)(M) = f(X) + f(T) + X = X + f(T)$ elde edilir. Ayrıca $X \cap f(T) \leq f(X \cap T) \ll_{\tau_e} f(T)$ olup $f(T), M$ de X in Y de içerilen τ_e-tümleyenidir.

Sonuç 3.7: M modülü projektif ve τ_e-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde M bol τ_e-tümlenmiştir.

Not: τ_e-tümlenmiş modüllerin sonlu toplamları ve homomorfik görüntüleri de τ_e-tümlenmiş olduğundan τ_e-tümlenmiş bir M modülünün her sonlu M-üretilmiş modülü de τ_e-tümlenmiştir. Dolayısıyla bir R halkasının τ_e-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu R-üretilmiş modülünün τ_e-tümlenmiş olmasıdır.

Teorem 3.8: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. ${}_R R$ modülü τ_e-tümlenmiştir.
2. ${}_R R$ modülü bol τ_e-tümlenmiştir.
3. Her sonlu üretilmiş R-modül τ_e-tümlenmiştir.
4. Her sonlu üretilmiş R-modül bol τ_e-tümlenmiştir.

İspat: ($1 \Leftrightarrow 2$): Sonuç 3.7 gereği açıktır.

($1 \Longrightarrow 3$): Not 3.8 den açıktır.

($3 \Longrightarrow 4$): M sonlu üretilmiş τ_e-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde sonlu bir I indeks kümesi için $f: R^{(I)} \longrightarrow M$ epimorfizması mevcuttur. Hipotez gereği $R^{(I)}$ τ_e-tümlenmiş olup R projektif olduğundan

$R^{(I)}$ (sonlu kopyalarının toplamı) projektiftir. Not 3.8 gereği $R^{(I)}$ bol τ_e-tümlenmiştir.

($4 \Longrightarrow 1$): Açıktır.

τ_e—Yükseltilebilir Modüller

Tanım 3.9: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda M nin $X \leq N$ ve $N \cap Y \ll_{\tau_e} M$ olacak şekilde bir $M = X \oplus Y$ ayrışımı mevcut ise M ye τ_e-yükseltilebilir modül denir.

Her e-yükseltilebilir modül τ_e-yükseltilebilirdir. Ayrıca τ-torsiyon serbest her τ_e-yükseltilebilir modül ise e-yükseltilebilirdir. Bununla birlikte τ_e-yükseltilebilir modüller τ_e-tümlenmiştir.

Aşağıdaki örnekte τ_e-tümlenmiş bir modülün τ_e-yükseltilebilir olmayabileceği gösterilmektedir.

Örnek 3.10: p bir asal tam sayı, $R = \mathbb{Z}_{p^3}$ ve $M = \mathbb{Z}/_{p^3\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ olsun. R halkası mükemmel olduğundan ${}_RR$ modülü τ_e-tümlenmiştir ancak τ_e-yükseltilebilir değildir.

Aşağıda bir modülün τ_e-yükseltilebilir olmasına eşdeğer koşullar sıralanmaktadır.

Lemma 3.11:

1. Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:
   a) M τ_e-yükseltilebilirdir.
   b) M nin herhangi bir N alt modülü için X, M nin bir direkt toplam terimi ve $Y \ll_{\tau_e} M$ olacak şekilde $N = X \oplus Y$ parçalanışı mevcuttur.
   c) M nin herhangi bir N alt modülü için $X \leq N$ ve $N/_X \ll_{\tau_e} M/_X$ olacak şekilde M de bir X direkt toplam terimi mevcuttur.
2. τ_e-yükseltilebilir bir modülün her direkt toplam terimi de τ_e-yükseltilebilirdir.

İspat: 1. $(1a \Longrightarrow 1b)$: Açıktır.

$(1b \Longrightarrow 1c)$: $N \leq M$ olsun. Hipotez gereği N nin, M nin bir direkt toplam terimi ve $Y \ll_{\tau_e} M$ olacak şekilde $N = X \oplus Y$ parçalanışı mevcuttur. $\pi: M \longrightarrow M/_X$ doğal homomorfizması için $Y \ll_{\tau_e} M$ olduğundan $\pi(Y) = Y + X/_X = N/_X \ll_{\tau_e} M/_X$ dir.

$(1c \Longrightarrow 1a)$: $N \leq M$ olsun. Hipotez gereği M nin, $X \leq N$ ve $N/_X \ll_{\tau_e} M/_X$ olacak şekilde $M = X \oplus Y$ parçalanışı mevcuttur. Dolayısıyla, açıkça $M = N + Y$ ve $N = X \oplus (Y \cap N)$ elde edilir. Ayrıca $M/_X \cong Y$ ve $N/_X \cong Y \cap N$ olduğundan $Y \cap N \ll_{\tau_e} Y$ olur. Sonuç olarak M τ_e-yükseltilebilirdir.

2. M τ_e-yükseltilebilir bir modül ve $N \leq M$ bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde bir $T \leq M$ için $M = N \oplus T$ dir. $X \leq N \leq M$ için M τ_e-yükseltilebilir olduğundan $Z \leq X$ ve $X \cap Y \ll_{\tau_e} Y$ olmak üzere $M = Z \oplus Y$ parçalanışı mevcuttur. Dolayısıyla $N = Z \oplus (N \cap Y)$; $N \cap (X \cap Y) = X \cap (N \cap Y) = X \cap Y \ll_{\tau_e} N \cap Y$.

Lemma 3.11 de τ_e-yükseltilebilir modüllerin sınıfının direkt toplamlar altında kapalı olduğu ispatlandı. Aşağıdaki örnekte τ_e-yükseltilebilir modüllerin sınıfının bölüm modülleri için kapalı olmadığı gösterilmektedir. Ardından belli koşullar altında bunun doğrulandığını gösteren önerme verilecektir.

Örnek 3.12: p bir asal tam sayı, $R = \mathbb{Z}_{p^3}$ ve $M = \mathbb{Z}_{p^3} \oplus (p\mathbb{Z}/_{p^2\mathbb{Z}})$ olsun. M, (R^2) nin bir homomorfik görüntüsü olup R halkası mükemmel olduğundan (R^2) serbest modülü de τ_e-yükseltilebilirdir. Diğer taraftan, Örnek 3.1 gereği M, τ_e-yükseltilebilir değildir.

$\forall\, X, Y, Z \leq M$ için $X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z)$ oluyorsa M ye dağılımlı modül adı verilir. Ayrıca $\forall\, f \in End(M)$ için $f(X) \subseteq X$ oluyorsa $X \leq M$ alt modülüne tam invaryanttır denir.

Önerme 3.13: M τ_e-yükseltilebilir bir modül ve $X \leq M$ olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlandığı takdirde $M/_X$ bölüm modülü de τ_e-yükseltilebilirdir.

1. N, M nin direkt toplam terimi olmak üzere $N + X/_X, M/_X$ in direkt toplamıdır.
2. M dağılımlı modüldür.
3. $f = f^2 \in End(M)$ için $f(X) \subseteq X$ dir.

Özel olarak X, M nin tam invaryant alt modülüdür.

İspat:

1. $K/_X \leq M/_X$ olsun. $K \leq M$ ve M τ_e-yükseltilebilir olduğundan $T \leq K$ ve $K/_T \ll_{\tau_e} M/_T$ olacak şekilde M de bir T direkt toplam terimi mevcuttur. Burada $T+X/_X \leq M/_X$ bir direkt toplam terimi ve $T+X/_X \leq K/_X \leq M/_X$ dir. $K/_T \ll_{\tau_e} M/_T$ olduğundan $K/_{T+X} \ll_{\tau_e} M/_{T+X}$ dir. Sonuç olarak $M/_X$ bölüm modülü de τ_e-yükseltilebilirdir.

2. Birinci koşuldan faydalanarak ispat yapılacaktır. $M = Y \oplus Z$ olsun. Bu durumda $M/_X = Y+X/_X + Z+X/_X$ ve $\left(Y+X/_X\right) \cap \left(Z+X/_X\right) = (Y \cap Z)+X/_X = 0_{M/_X}$ dır. Sonuç olarak $Y+X/_X$, $M/_X$ in direkt toplam terimi olup $M/_X$ τ_e-yükseltilebilirdir.

3. $M = A \oplus B$ olsun. Birinci koşul gereği $A+X/_X$, $M/_X$ in direkt toplam terimi olduğu gösterilmelidir. $\pi: A \oplus B \longrightarrow A$, $(1-\pi)M = B$ çekirdeğine sahip projeksiyon dönüşümü olsun. Bu takdirde $\pi^2 = \pi \in End(M)$ ve $\pi(M) = A$ dır. Hipotez gereği, $\pi(X) \leq X$ ve $(1-\pi)X \leq X$ dir. Bu durumda $\pi(X) = X \cap A$ ve $(1-\pi)X = X \cap B$ dir. Dolayısıyla $X = \pi(X) \oplus (1-\pi)(X) = (X \cap A) \oplus (X \cap B)$ dir. Buradan $A+X/_X = A \oplus (X \cap B)/_X$ ve $B+X/_X = B \oplus (X \cap A)/_X$ olduğu kolayca görülür. Böylece $M/_X = A \oplus (X \cap B)/_X + B \oplus (X \cap A)/_X$ elde edilir. Ayrıca Modüler kuralından $[A \oplus (X \cap B)] \cap [B \oplus (X \cap A)] = [A \oplus (X \cap B)] \cap B \oplus (X \cap A) = (X \cap B) \oplus (A \cap B) \oplus (X \cap A) = X \cap B \oplus X \cap A = X$ olup $A+X/_X$, $M/_X$ in direkt toplam terimidir.

Lemma 3.11 de τ_e-yükseltilebilir bir modülün her direkt toplam teriminin de τ_e-yükseltilebilir olduğu gösterildi. Fakat tersinin doğrulandığını söylemek genelde mümkün değildir. Teorem 3.15 ile uygun koşullar altında bunun sağlandığı gösterilecektir. Ancak öncesinde aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.14: $M = X \oplus Y$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. X, Y-projektiftir.
2. Her $T \leq M$ için $M = T + Y$ ise $M = T' \oplus Y$ olacak şekilde bir $T' \leq T$ vardır (Wisbauer, 41.14).

Teorem 3.15: X, M nin self-projektif ve Y-projektif bir alt modülü olmak üzere $M = X \oplus Y$ olsun. X ve Y, M nin τ_e-yükseltilebilir alt modülleri ise M de τ_e-yükseltilebilirdir.

İspat: $N \leq M$ olsun. $X \cap (N+Y) \leq X$ için X τ_e-yükseltilebilir olduğundan $D \leq X \cap (N+Y)$ ve $(X \cap (N+Y) \cap D' = (N+Y) \cap D' \ll_{\tau_e} D'$. Böylece $M = X \oplus Y = D \oplus D' \oplus Y = N + D' \oplus Y$ dir. X self ve Y-projektif olduğundan aynı zamanda M-projektiftir. $D \longrightarrow D \oplus (D' \oplus Y) \longrightarrow D' \oplus Y$ tam dizisi göz önüne alınarak D nin $D' \oplus Y$-projektif olduğu söylenebilir. Dolayısıyla Lemma 3.14 gereği $M = N' \oplus (D' \oplus Y)$ olacak şekilde bir $N' \leq N$ vardır. Buna göre $W \leq Y$ için $N \cap (W + D') = W \cap (N + D')$ yazılabilir. Diğer taraftan, Y τ_e-yükseltilebilir olduğundan $Y_1 \leq N \cap (Y + D') = Y \cap (N + D')$ ve $Y_2 \cap (N + D') \ll_{\tau_e} Y_2$ olacak şekilde $Y = Y_1 \oplus Y_2$ ayrışımı mevcuttur. Dolayısıyla $M = N' + (Y + D') = N' \oplus (D' \oplus Y_1 \oplus Y_2) = (N' \oplus Y_1) \oplus (Y_2 \oplus D')$ olduğu kolayca görülebilir. $N' \leq N$ ve $X \leq N \cap (Y + D') \leq N$ olduğundan $N' \oplus Y_1 \leq N$ olur ve dolayısıyla $M = N + (Y \oplus D')$ olur. Ayrıca $N \cap (Y_2 \oplus D') = Y_2 \cap (N + D') \ll_{\tau_e} Y_2 \leq Y + D'$ dır.

Sonuç 3.16: X ve Y, X-projektif modüller olmak üzere X yarı basit ve Y, τ_e-yükseltilebilir olsun. Bu takdirde $M = X \oplus Y$ modülü de τ_e-yükseltilebilirdir.

Örnek 3.17: $M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}$-modülünün her bir direkt toplam terimi oyuk olduğundan τ_e-yükseltilebilirdir. Ancak $\mathbb{Z}_3$ ün $\mathbb{Z}_{27}$-projektif olmadığı göz önüne alınırsa M nin kendisi τ_e-yükseltilebilir değildir.

Aşağıdaki teoremde duo modüller (alt modülleri tam invaryant olan modüller) için τ_e-yükseltilebilir iki modülün direkt toplamının da τ_e-yükseltilebilir olduğu gösterilmektedir.

Önerme 3.18: $M = X \oplus Y$ bir duo modül olsun. X ve Y, τ_e-yükseltilebilir modüller ise M de τ_e-yükseltilebilirdir.

İspat: $N \leq M$ olsun. M bir duo modül olduğundan $N = (N \cap X) \oplus (N \cap Y)$ şeklimde yazılabilir. Hipotez gereği $N \cap X \leq X$, $N \cap Y \leq Y$ alt modülleri için $X = X_1 \oplus X_2$, $X_1 \leq N \cap X$, $N \cap X_2 \ll_{\tau_e} X_2$ ve $Y = Y_1 \oplus Y_2$, $Y_1 \leq N \cap Y$, $N \cap Y_2 \ll_{\tau_e} Y_2$ olacak şekilde $X_1, X_2 \leq X$ ve $Y_1, Y_2 \leq Y$ alt modülleri mevcuttur. Dolayısıyla, $M = X \oplus Y = (X_1 \oplus X_2) \oplus (Y_1 \oplus Y_2) = (X_1 \oplus Y_1) \oplus (X_2 \oplus Y_2)$ dir. Buradan, $X_1 \oplus Y_1 \leq (N \cap X) \oplus (N \cap Y) = N \cap (X \oplus Y) = N \cap M = M$ ve $N \cap (X_2 \oplus Y_2) = (N \cap X_2) \oplus (N \cap Y_2) \ll_{\tau_e} X_2 \oplus Y_2$ dir.

Aşağıdaki önermelerde τ_e-tümlenmiş ve bol τ_e-tümlenmiş modüllerin τ_e-yükseltilebilir olma koşulları verilmektedir.

Önerme 3.19: M her τ_e-tümleyen alt modülü bir direkt toplam terimi olan projektif τ_e-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde M τ_e-yükseltilebilirdir.

İspat: $X \leq M$ olsun. M τ_e-tümlenmiş modül olduğundan bir $Y \leq M$ alt modülü $X + Y = M$ ve $X \cap Y \ll_{\tau_e} Y$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda M projektif ve $M = X + Y$ olduğundan Lemma 3.14 gereği $D \subseteq X$ dir. Sonuç olarak M nin her X alt modülü için $D \subseteq X$ ve $X \cap Y \ll_{\tau_e} Y$ olacak şekilde . $M = Y \oplus D$ parçalanışı bulunmuş olur. Bu takdirde M modülü τ_e-yükseltilebilirdir.

Önerme 3.20: M her τ_e-tümleyen alt modülü bir direkt toplam terimi olan bol τ_e-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde M τ_e-yükseltilebilirdir.

İspat: M bol τ_e-tümlenmiş modül olduğundan M nin herhangi bir X alt modülü için bir Y τ_e-tümleyeni; ve $Y \leq M$ alt modülüne karşılık da $Y' \leq M$ (bol) τ_e-tümleyeni $Y' \subseteq X, M = Y' \oplus D$ olacak şekilde mevcuttur. $M = Y' \oplus D$ olacak şekilde mevcuttur. $M = Y' \oplus Y$ olup $X = Y' + (Y \cap X) = Y' \oplus (X \cap D)$ elde edilir. $\pi: Y' \oplus D \longrightarrow D$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $\pi(Y \cap X) = \pi(X) = X \cap D$ dir. Ayrıca $Y \cap X \ll_{\tau_e} Y$ olduğundan $\pi(Y \cap X) = X \cap D \ll_{\tau_e} \pi(Y) \subseteq D$ olup $X \cap D \ll_{\tau_e} D$ dir. Böylelikle, M nin her X alt modülü için $Y' \subseteq X$ ve $X \cap D \ll_{\tau_e} D$ olacak şekilde M nin $M = Y' \oplus D$ parçalanışı mevcuttur.

4. Teşekkür

Makalenin değerlendirilmesine ve geliştirilmesine katkı sağlayan değerli hakemlere teşekkür ederiz.

5. Kaynaklar

Bland, P.E. (1998). “Topics in Torsion Theory”, Mathematical Research, Wiley VCH Verlag Berlin GmbH, 103. Berlin.

Charalambides, S. 2006 “Topics in Torsion Theory”, PhD Thesis, University of Otago, Dunedin, New Zealand.

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). “Lifting Modules”, Birkhauser, Basel.

Koşan, T. and Harmancı, A. 2004. “Modules Supplemented with Respect to a Torsion Theory”, Turkish Journal of Mathematics, 28: 177-184.

Koşar, B., Nebiyev, C. and Sökmez, N. 2015. “G-supplemented Modules”, Ukrainian Mathematical Journal, 67: 861-864.

Quynh, T.C. and Tin, P.H. 2013. “Some Properties of e-Supplemented and e-Lifting Modules”, Vietnam Journal of Mathematics”, 41: 303-312.

Sözen, Ö.E. 2020. “E-tümlenmiş Modüllerin Torsiyon Teorisine Göre Genelleştirilmiş Versiyonu”, 13 (Özel Sayı I), 76-82, (32. Ulusal Matematik Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun).

Zhou, D.X., Zhang, X.R., 2011. “Small-essential Submodules and Morita Duality”, Southeast Asian Bull. Math., 35: 1051-1062.